Журнал математической физики, анализа, геометрии
2005, т. 1, № 2, с. 182–191

Уточнения аналога изопериметрического неравенства и теорема устойчивости его экстремального решения

В.И. Дискант

Черкасский государственный технологический университет
бульв. Шевченко, 460, Черкассы, 18006, Украина
E-mail:diskant@chiti.uch.net
diskant@chstu.cherkassy.ua

Статья поступила в редакцию 29 декабря 2004 г.

Доказано следующее неравенство:

$$V_m^{n/(n-m)}(A,B) - V^{m/(n-m)}(B)V(A) \geq (V_m^{1/(n-m)}(A,B)$$
$$-\rho V^{1/(n-m)}(B))^n - V^{m/(n-m)}(B)V(A_{-\rho}(B)), 0 \leq \rho \leq q,$$

его следствия и теорема устойчивости решения X уравнения $V_m^n(X,B) - V^m(B)V^{n-m}(X) = 0$ при $V(X) = V(B)$. В приведенном неравенстве $V(A)$, $V(B)$ — объемы выпуклых тел A и B в R^n $(n \geq 2)$, $V_m(A,B)$ — m-й смешанный объем тел A и B, $1 \leq m \leq n-1$, q — коэффициент вместимости тела B в тело A, $A_{-\rho}(B)$ — внутреннее тело, параллельное телу A относительно B с коэффициентом ρ.

Доведено наступну нерівність:

$$V_m^{n/(n-m)}(A,B) - V^{m/(n-m)}(B)V(A) \geq (V_m^{1/(n-m)}(A,B)$$
$$-\rho V^{1/(n-m)}(B))^n - V^{m/(n-m)}(B)V(A_{-\rho}(B)), 0 \leq \rho \leq q,$$

її наслідки і теорему стійкості розв'язку X рівняння $V_m^n(X,B) - V^m(B)V^{n-m}(X) = 0$ при $V(X) = V(B)$. У наведеній нерівності $V(A)$, $V(B)$ — об'єми опуклих тіл A і B в R^n $(n \geq 2)$, $V_m(A,B)$ — m-й мішаний об'єм тіл A і B, $1 \leq m \leq n-1$, q — коефіцієнт місткості тіла B в тіло A, $A_{-\rho}(B)$ — внутрішнє тіло, яке паралельне тілу A відносно B з коефіцієнтом ρ.

Mathematics Subject Classification 2000: 52A38, 52A40.

Ключевые слова: изопериметрическое неравенство, аналог изопериметрического неравенства, устойчивость экстремального решения геометрического неравенства.

Выпуклым телом в n-мерном евклидовом пространстве R^n $(n \geq 2)$ будем называть замкнутое ограниченное выпуклое множество R^n. Выпуклое тело, содержащее внутренние точки, будем называть собственным.

Пусть $H_1, H_2, \ldots, H_s$ — выпуклые тела в R^n, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ — неотрицательные числа. Г. Минковский ввел в рассмотрение линейную комбинацию тел $H_1, H_2, \ldots, H_s$ с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ следующим образом. Полагая, что в R^n выбрано начало координат, рассмотрим множество H всех таких точек R^n, которые являются концами радиус-векторов вида $\lambda_1\bar{x}_1 + \lambda_2\bar{x}_2 + \cdots + \lambda_s\bar{x}_s$, где $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_s$ — радиус-векторы точек тел $H_1, H_2, \ldots, H_s$ соответственно. Назовем H линейной комбинацией тел $H_1, H_2, \ldots, H_s$ с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ и положим $H = \lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2 + \cdots + \lambda_s H_s$. Можно показать, что H — выпуклое тело в R^n, а изменение положения начала координат в R^n влечет параллельный перенос тела H [1, с. 78].

Г. Минковский показал [2, с. 59], что объем $V(H)$ тела $H = \sum\limits_{i=1}^{s} \lambda_i H_i$ является однородным многочленом степени n относительно переменных $\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots, \lambda_s$, т.е.

$$V(H) = \sum_{i_1=1}^{s} \sum_{i_2=1}^{s} \cdots \sum_{i_n=1}^{s} V_{i_1 i_2 \ldots i_n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \ldots \lambda_{i_n}, \tag{1}$$

где индексы $i_1, i_2, \ldots, i_n$ принимают независимо друг от друга значения от 1 до s, а коэффициенты $V_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ однозначно определяются требованием: они не должны зависеть от порядка индексов. Тогда коэффициент $V_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ многочлена (1) зависит только от тел $H_{i_1}, H_{i_2}, \ldots, H_{i_n}$ и определяется однозначно заданием этих тел. Коэффициент $V_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ называется смешанным объемом тел $H_{i_1}, H_{i_2}, \ldots, H_{i_n}$ и обозначается через $V(H_{i_1}, H_{i_2}, \ldots, H_{i_n})$.

В случае, если $H = \lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2$, из (1) имеем

$$V(H) = V(\lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m V_{n-m}(H_1, H_2) \lambda_1^m \lambda_2^{n-m}, \tag{2}$$

где $V_{n-m}(H_1, H_2) = V(\underbrace{H_1, \ldots, H_1}_{m}, \underbrace{H_2, \ldots, H_2}_{n-m})$.

Пусть теперь A и B — выпуклые тела в R^n. Для объема тела $A_\rho(B) = A + \rho B$, $\rho \geq 0$, — внешнего тела, параллельного телу A относительно тела B с коэффициентом ρ [3, с. 209], из (2) следует формула Минковского

$$V(A_\rho(B)) = V(A + \rho B) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m V_m(A, B) \rho^m, \tag{3}$$

в которой $V_m(A, B) = V(\underbrace{A, \ldots, A}_{n-m}, \underbrace{B, \ldots, B}_{m})$ — m-й смешанный объем тел A и B.

Если в (3) положить $B = E$, где E — единичный шар R^n, то (3) преобразуется в формулу Штейнера [4, с. 57]. Известно, что в формуле Штейнера коэффициент при ρ равен $F(A)$, где $F(A)$ — площадь поверхности тела A. Это приводит к равенству $F(A) = nV_1(A, E)$. Поэтому величину $nV_1(A, B)$ называют площадью поверхности тела A относительно тела B и обозначают через $F(A, B)$ [5, с. 100].

Относительное изопериметрическое неравенство для тел A и B в R^n имеет вид

$$F^n(A, B) - n^n V(B) V^{n-1}(A) \geq 0. \tag{4}$$

Неравенство (4) равносильно первому неравенству Минковского для смешанных объемов [4, с. 113]

$$\Delta_1(A, B) = V_1^n(A, B) - V(B) V^{n-1}(A) \geq 0. \tag{5}$$

Знак равенства в (5) для собственных выпуклых тел A и B имеет место тогда и только тогда, когда A и B положительно гомотетичны.

В настоящей работе под изопериметрическим неравенством будем понимать неравенство (5).

Неравенство

$$\Delta_m(A, B) = V_m^n(A, B) - V^m(B) V^{n-m}(A) \geq 0, \quad 2 \leq m \leq n-1, \tag{6}$$

называется m-м аналогом изопериметрического неравенства. Знак равенства в (6) для собственных выпуклых тел A и B имеет место тогда и только тогда, когда A и B положительно гомотетичны [5, с. 104].

Отметим, что (6) является следствием общего неравенства А.Д. Александрова для смешанных объемов выпуклых тел [6, с. 1220]

$$V^k(H_1, \ldots, H_n) \geq \prod_{i=1}^{k} V(H_i, \ldots, H_i, H_{k+1}, \ldots, H_n), \tag{7}$$

если в нем положить

$$k = n, H_1 = \ldots = H_{n-m} = A, H_{n-m+1} = \ldots = H_n = B, 2 \leq m \leq n-1.$$

В работе под аналогом изопериметрического неравенства будем понимать неравенство $\Delta_m(A, B) \geq 0$ при $1 \leq m \leq n-1$, включив тем самым (5) в число своих аналогов. Кроме того, заметим, что неравенство

$$\Delta_{m,k}(A, B) = V_m^{\frac{n}{k}}(A, B) - V^{\frac{m}{k}}(B) V^{\frac{n-m}{k}}(A) \geq 0$$

равносильно неравенству $\Delta_m(A, B) \geq 0$ при любом натуральном k и $\Delta_m(B, A) = \Delta_{n-m}(A, B)$. Поэтому уточнения неравенств $\Delta_{m,k}(A, B) \geq 0$ и $\Delta_{m,k}(B, A) \geq 0$ при $1 \leq m \leq n-1$ также будем называть уточнениями аналога изопериметрического неравенства. Величину $\Delta_{m,k}(A,B)$ будем называть m-м аналогом изопериметрической разности.

Пусть $q = q(A,B)$ — коэффициент вместимости тела B в тело A, т.е. наибольшее из чисел α таких, что тело αB параллельным сдвигом помещается в тело A, $Q = Q(A,B)$ — коэффициент охвата тела A телом B, т.е. наименьшее из чисел β таких, что тело A параллельным сдвигом помещается в теле βB. В [5, с. 101] для собственных выпуклых тел A и B при любом m $(1 \le m \le n-1)$ доказаны следующие уточнения аналога изопериметрического неравенства:

$$\begin{aligned}\Delta_{m,n-m}(A,B) &= V_m^{\frac{n}{n-m}}(A,B) - V^{\frac{m}{n-m}}(B)V(A)\\ &\ge (V_m^{\frac{1}{n-m}}(A,B) - qV^{\frac{1}{n-m}}(B))^n,\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{m,n-m}(B,A) &= V_m^{\frac{n}{n-m}}(B,A) - V^{\frac{m}{n-m}}(A)V(B)\\ &\ge (V_m^{\frac{1}{n-m}}(B,A) - \tfrac{1}{Q}V^{\frac{1}{n-m}}(A))^n.\end{aligned} \tag{9}$$

Обозначим через A/B разность Минковского выпуклых тел A и B в R^n [3, с. 202]. Тело $A_{-\rho}(B) = A/(\rho B), 0 \le \rho \le q$, называется внутренним телом, параллельным телу A относительно тела B с коэффициентом ρ [3, с. 209].

В настоящей работе для собственных тел A и B при любом m $(1 \le m \le n-1)$ будет доказано следующее уточнение аналога изопериметрического неравенства:

$$\Delta_{m,n-m}(A,B) \ge (V_m^{\frac{1}{n-m}}(A,B) - \rho V^{\frac{1}{n-m}}(B))^n - V^{\frac{m}{n-m}}(B)V(A_{-\rho}(B)), \tag{10}$$

его следствия

$$\Delta_{m,n-m}(A,B) \ge \Delta_{m,n-m}(A_{-\rho}(B),B), \tag{11}$$

$$\Delta_{m,n-m}(A,B) \ge (V_m^{\frac{1}{n-m}}(A,B) - qV^{\frac{1}{n-m}}(B))^n \ge V_m^{\frac{n}{n-m}}(A_{-q}(B),B), \tag{12}$$

$$\Delta_{m,n-m}(B,A) \ge (V_m^{\frac{1}{n-m}}(B,A) - \frac{1}{Q}V^{\frac{1}{n-m}}(A))^n \ge V_m^{\frac{n}{n-m}}(B_{-\frac{1}{Q}}(A),A) \tag{13}$$

и теорема устойчивости экстремального решения неравенства $\Delta_m(X,B) \ge 0$, удовлетворяющего условию $V(X) = V(B)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о   н е р а в е н с т в а (10). В [7, с. 45] для собственных выпуклых тел A и B доказано, что

$$\frac{dV(A_{-\sigma}(B))}{d\sigma} = -nV_1(A_{-\sigma}(B),B), \sigma \in (0;q).$$

Интегрируя это равенство на промежутке $[0;\rho]$, $0 \le \rho \le q$, и учитывая, что $A_o(B) = A$, получим

$$V(A) - V(A_{-\rho}(B)) = n\int\limits_0^\rho V_1(A_{-\sigma}(B), B)d\sigma\,. \tag{14}$$

Полагая в общем неравенстве А.Д. Александрова (7) $k = n-1$, $H_1 = \ldots = H_{n-m} = A$, $H_{n-m+1} = \ldots = H_n = B$, придем к неравенству

$$V_m^{n-1}(A,B) \ge V^{m-1}(B)V_1^{n-m}(A,B).$$

Заменяя в последнем неравенстве A на $A_{-\sigma}(B)$ и учитывая, что $V(B) > 0$, получим следующую оценку сверху для $V_1(A_{-\sigma}(B), B)$:

$$V_1(A_{-\sigma}(B), B) \le [V_m^{\frac{1}{n-m}}(A_{-\sigma}(B), B)]^{n-1}/V^{\frac{m-1}{n-m}}(B) \tag{15}$$

при $1 \le m \le n-1$.

Согласно общей теореме Брунна [2, с. 67] функция $f(t) = V_m^{\frac{1}{n-m}}(C_t, B)$ (где $C_t = (1-t)K + tL$, K и L — выпуклые тела в R^n, $0 \le m \le n-1$) при $t \in [0;1]$ выпукла вверх. Из этой теоремы следует

$$V_m^{\frac{1}{n-m}}(A_{-\sigma}(B) + \sigma B, B) \ge V_m^{\frac{1}{n-m}}(A_{-\sigma}(B), B) + \sigma V^{\frac{1}{n-m}}(B). \tag{16}$$

Так как разность Минковского $D = K/L$ выпуклых тел K и L является множеством всех таких точек $d \in R^n$, для каждой из которых $d + L \subset K$, то из равенства $A_{-\sigma}(B) = A/(\sigma B)$ вытекает, что $A_{-\sigma}(B) + \sigma B \subset A$. Из этого включения и свойства монотонности смешанного объема по каждому из своих аргументов [4, с. 49] имеем

$$V_m^{\frac{1}{n-m}}(A_{-\sigma}(B) + \sigma B, B) \le V_m^{\frac{1}{n-m}}(A, B).$$

Следствием последнего неравенства и неравенства (16) является неравенство

$$V_m^{\frac{1}{n-m}}(A_{-\sigma}(B), B) \le V_m^{\frac{1}{n-m}}(A, B) - \sigma V^{\frac{1}{n-m}}(B). \tag{17}$$

Подставляя эту оценку сверху для $V_m^{\frac{1}{n-m}}(A_{-\sigma}(B), B)$ линейной функцией от σ в (15), а затем полученную оценку для $V_1(A_{-\sigma}(B), B)$ в (14), придем к неравенству

$$V(A) - V(A_{-\rho}(B)) \le \frac{n}{V^{\frac{m-1}{n-m}}(B)}\int\limits_0^\rho (V_m^{\frac{1}{n-m}}(A, B) - \sigma V^{\frac{1}{n-m}}(B))^{n-1}d\sigma.$$

Последнее неравенство, после интегрирования его правой части, совпадает с неравенством (10).

Доказательство неравенства (11). Полагая в (17) $\sigma = \rho$, придем к неравенству

$$V_m^{\frac{1}{n-m}}(A,B) - \rho V^{\frac{1}{n-m}}(B) \geq V_m^{\frac{1}{n-m}}(A_{-\rho}(B),B), \tag{18}$$

которое является оценкой снизу для основания степени в правой части (10). Применение этой оценки приводит к (11). Заметим, что из неравенства (11) следует утверждение: m-й аналог изопериметрической разности при переходе от тела A к $A_{-\rho}(B)$ — внутреннему телу, параллельному телу A относительно B с коэффициентом ρ, не увеличивается.

Доказательство неравенства (12). Из (10) и (18) имеем

$$\begin{aligned}\Delta_{m,n-m}(A,B) &\geq (V_m^{\frac{1}{n-m}}(A,B) - \rho V^{\frac{1}{n-m}}(B))^n - V^{\frac{m}{n-m}}(B)V(A_{-\rho}(B)) \\ &\geq V_m^{\frac{n}{n-m}}(A_{-\rho}(B),B) - V^{\frac{m}{n-m}}(B)V(A_{-\rho}(B)).\end{aligned}$$

Полагая в последних неравенствах $\rho = q$ и учитывая, что $V(A_{-q}(B)) = 0$, придем к неравенству (12).

Замечание. Неравенство (12) равносильно неравенству

$$\frac{V_m^{\frac{1}{n-m}}(A,B) - (\Delta_{m,n-m}(A,B))^{\frac{1}{n}}}{V^{\frac{1}{n-m}}(B)} \leq q \leq \frac{V_m^{\frac{1}{n-m}}(A,B) - V_m^{\frac{1}{n-m}}(A_{-q}(B),B)}{V^{\frac{1}{n-m}}(B)}, \tag{19}$$

в котором выписаны оценки для q. Оценки для q можно получить и из (8), если учесть, что правая часть (8) неотрицательна. Оценка сверху для q в (19) при $V_m(A_{-q}(B),B) > 0$ является уточнением оценки сверху для q из (8). Отметим, что $V_m(A_{-q}(B),B) > 0$, если размерность $A_{-q}(B)$ не меньше $n-m$ [4, с. 50].

Доказательство неравенства (13). Коэффициент $q(B,A)$ является наибольшим из чисел α_1 таких, что тело $\alpha_1 A$ параллельным переносом помещается в тело B. Отсюда следует, что $\frac{1}{q(B,A)}$ является наименьшим из чисел β таких, что тело A параллельным переносом помещается в тело βB, т.е. $\frac{1}{q(B,A)} = Q(A,B) = Q$. Условия, которым удовлетворяют A и B в (12), одинаковы. Поэтому, заменяя в (12) A на B, B на A, q на $\frac{1}{Q}$, придем к неравенству (13).

Замечание. Так как $V_m(B,A) = V_{n-m}(A,B)$, то $\Delta_{m,n-m}(B,A) = V_m^{\frac{n}{n-m}}(B,A) - V^{\frac{m}{n-m}}(A)V(B) = V_{n-m}^{\frac{n}{n-m}}(A,B) - V^{\frac{m}{n-m}}(A)V(B)$. Полагая в (13)

$n-m=k$, придем к неравенствам

$$V_k^{\frac{n}{k}}(A,B)-V^{\frac{n-k}{k}}(A)V(B)\geq (V_k^{\frac{1}{k}}(A,B)-\frac{1}{Q}V^{\frac{1}{k}}(A))^n\geq V_k^{\frac{n}{k}}(A,B_{-\frac{1}{Q}}(A)),$$

где $1\leq k<n-1$, т.к. $1\leq m\leq n-1$.

Принимая в последних неравенствах $k=m$, получим неравенства

$$\Delta_{m,m}(A,B)\geq (V_m^{\frac{1}{m}}(A,B)-\frac{1}{Q}V^{\frac{1}{m}}(A))^n\geq V_m^{\frac{n}{m}}(A,B_{-\frac{1}{Q}}(A)).$$

Последнее неравенство равносильно неравенству

$$\frac{V_m^{\frac{1}{m}}(A,B)-(\Delta_{m,m}(A,B))^{\frac{1}{n}}}{V^{\frac{1}{m}}(A)}\leq\frac{1}{Q}\leq\frac{V_m^{\frac{1}{m}}(A,B)-V_m^{\frac{1}{m}}(A,B_{-\frac{1}{Q}}(A))}{V^{\frac{1}{m}}(A)}. \tag{20}$$

Оценка сверху для $\frac{1}{Q}$ в (20) является уточнением оценки сверху для $\frac{1}{Q}$ из (9).

Отметим, что следствием нижних оценок для q из (19) и $\frac{1}{Q}$ из (20) является следующая оценка сверху для величины $Q-q$:

$$Q-q\leq\frac{V^{\frac{1}{m}}(A)}{V_m^{\frac{1}{m}}(A,B)-(\Delta_{m,m}(A,B))^{\frac{1}{n}}}-\frac{V_m^{\frac{1}{n-m}}(A,B)-(\Delta_{m,n-m}(A,B))^{\frac{1}{n}}}{V^{\frac{1}{n-m}}(B)}, \tag{21}$$

обобщающая оценку для $Q-q$ в [8, с. 156]. Можно показать, что неравенство (21) является следствием неравенств (8) и (9).

Для собственных выпуклых тел X и B в R^n их m-й аналог изопериметрического неравенства имеет вид

$$\Delta_m(X,B)=V_m^n(X,B)-V^m(B)V^{n-m}(X)\geq 0. \tag{22}$$

Будем считать X переменным телом. Тела X, для которых $\Delta_m(X,B)=0$, будем называть экстремальными решениями аналога (22). Как показано в [5, с. 104], экстремальными решениями (22) будут тела, положительно гомотетичные телу B, и только такие тела. В случае, если $V(X)=V(B)$, экстремальное решение (22) единственно. Это решение, с точностью до параллельного переноса, имеет вид $X=B$. Единственность экстремального решения (22) при $V(X)=V(B)$ порождает вопрос об его устойчивости в классе выпуклых тел R^n.

Обозначим через $\delta(X,B)$ величину, равную

$$\delta(X,B)=\min_{\tilde{X}\in\{\tilde{X}\}}\rho(\tilde{X},B),$$

где $\left\{\tilde{X}\right\}$ — множество тел, которые получаются из X с помощью параллельного переноса, $\rho(\tilde{X},B)$ — хаусдорфово расстояние между телами $\tilde{X}$ и B в R^n [1, с. 144]. Величина $\delta(X,B)$ называется отклонением тел X и B.

В следующей теореме устойчивости экстремального решения (22) r_B — радиус наибольшего шара, который может быть вложен в B, R_B — радиус наименьшего шара, в который можно поместить B. Заметим, что $V(r_BE)\le V(B)\le V(R_BE)$.

Теорема. *Пусть X и B — собственные выпуклые тела в R^n, $n\ge 2$. Найдутся такие величины $\varepsilon_0>0$, $C>0$, зависящие от n, r_B, R_B, что из выполнения условий*

$$\Delta_m(X,B)<\varepsilon, 0<\varepsilon<\varepsilon_0, V(X)=V(B), m\in\overline{1;n-1}$$

следует

$$\delta(X,B)<C\varepsilon^{\frac{1}{n}}.$$

Доказательство. Оценим сверху в условиях теоремы величину

$$\frac{(\Delta_{m,k}(X,B))^{\frac{1}{n}}}{V^{\frac{1}{k}}(B)}=\frac{(V_m^{\frac{n}{k}}(X,B)-V^{\frac{m}{k}}(B)V^{\frac{n-m}{k}}(X))^{\frac{1}{n}}}{V^{\frac{1}{k}}(B)}. \tag{23}$$

Положим $a=V_m^{\frac{n}{k}}(X,B)$, $b=V^{\frac{m}{k}}(B)V^{\frac{n-m}{k}}(X)$ и отметим, что $a^k-b^k=\Delta_m(X,B)$, $0<b\le a$. Тогда

$$\frac{(\Delta_{m,k}(X,B))^{\frac{1}{n}}}{V^{\frac{1}{k}}(B)}=\frac{(a-b)^{\frac{1}{n}}}{V^{\frac{1}{k}}(B)}=\frac{(a-b)^{\frac{1}{n}}(a^{k-1}+a^{k-2}b+\ldots+ab^{k-2}+b^{k-1})^{\frac{1}{n}}}{V^{\frac{1}{k}}(B)(a^{k-1}+a^{k-2}b+\ldots+ab^{k-2}+b^{k-1})^{\frac{1}{n}}}$$
$$\le\frac{(\Delta_m(X,B))^{\frac{1}{n}}}{V^{\frac{1}{k}}(B)(b^{k-1})^{\frac{1}{n}}}\le\frac{\varepsilon^{\frac{1}{n}}}{V(B)}\le\frac{\varepsilon^{\frac{1}{n}}}{V(r_BE)}=C_1\varepsilon^{\frac{1}{n}}. \tag{24}$$

Из m-го аналога изопериметрического неравенства (22) и равенства $V(B)=V(X)$ следует, что при любом $k\in\overline{1;n-1}$ имеет место неравенство

$$\frac{V_m^{\frac{1}{k}}(X,B)}{V^{\frac{1}{k}}(B)}=\frac{V_m^{\frac{1}{k}}(X,B)}{V^{\frac{1}{k}}(X)}\ge 1. \tag{25}$$

Тогда, полагая в уменьшаемом правой части неравенства (21) $A=X$, из оценки (24) для величины (23) и оценки (25) при $k=m$ получаем оценку сверху для уменьшаемого в (21) величиной $\frac{1}{1-C_1\varepsilon^{\frac{1}{n}}}$. Полагая $A=X$ в вычитаемом правой части (21), из оценки (24) для величины (23) и оценки (25) при

$k = n - m$ получаем оценку снизу для вычитаемого в (21) величиной $1 - C_1\varepsilon^{\frac{1}{n}}$. Величина $C_1 > 0$. Поэтому при $C_1\varepsilon^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{2}$ для уменьшаемого правой части (21) имеет место оценка сверху величиной $1 + 2C_1\varepsilon^{\frac{1}{n}}$, т. к. $\frac{1}{1 - C_1\varepsilon^{\frac{1}{n}}} \le 1 + 2C_1\varepsilon^{\frac{1}{n}}$.

Из оценки сверху $1 + 2C_1\varepsilon^{\frac{1}{n}}$ для уменьшаемого в (21) и оценки снизу $1 - C_1\varepsilon^{\frac{1}{n}}$ для вычитаемого в (21) приходим к следующей оценке для величины $Q - q$:

$$Q - q \le 1 + 2C_1\varepsilon^{\frac{1}{n}} - (1 - C_1\varepsilon^{\frac{1}{n}}) = 3C_1\varepsilon^{\frac{1}{n}},$$

где $Q = Q(X, B)$, $q = q(X, B)$.

Не умаляя общности можем считать, что $qB \subset X \subset QB$. Тогда из условия теоремы $V(B) = V(X)$ имеем $q \le 1$, $Q \ge 1$. Из включения $qB \subset QB$ следует, что центр гомотетии этих тел принадлежит qB. Значит, $qB \subset B \subset QB$ и $\delta(X, B) \le \rho(X, B) \le \rho(qB, QB) \le (Q - q)d(B)$, где $d(B)$ диаметр B. Так как $d(B) \le 2R_B$, то

$$\delta(X, B) \le 3C_1\varepsilon^{\frac{1}{n}} 2R_B = C\varepsilon^{\frac{1}{n}}.$$

З а м е ч а н и е. Условие $V(B) = V(X)$ в теореме может быть заменено на условие $V(X) = V(sB)$, $s > 0$. Действительно,

$$\Delta_m(X, sB) = V_m^n(X, sB) - V^m(sB)V^{n-m}(X) = s^{mn}\Delta_m(X, B) \le C_2\varepsilon.$$

Следовательно, тела X и sB удовлетворяют условиям теоремы. Поэтому $\delta(X, sB) < C_3\varepsilon^{\frac{1}{n}}$, где C_3 зависит от s, n, m, r_B и R_B. Это утверждение является теоремой устойчивости экстремального решения $X = sB$ аналога $\Delta_m(X, B) \ge 0$.

References

[1] *K. Leichtweis*, Convex sets. Nauka, Moscow (1985). (Russian)

[2] *H. Busemann*, Convex surfaces. Nauka, Moscow (1964). (Russian)

[3] *H. Hadwiger*, Lectures about volume, area surface and isoperimetry. Nauka, Moscow (1966). (Russian)

[4] *T. Bonnesen and W. Fenchel*, Theory of convex bodies. Fazis, Moscow (2002), XIV+210. (Russian)

[5] *V. Diskant*, Refinements of the isoperimetric inequality and stability theorems in the theory of convex bodies. — *Tr. Inst. Mat.* Nauka, Novosibirsk **14** (1989), 98–132. (Russian)

[6] *A. Alexandrov*, New inequalities between mixed volumes and its applications. — *Mat. sb.* **2(44)** (1937), No. 6, 1205–1235. (Russian)

[7] *V. Diskant*, About the behavior of isoperimetric difference when turning to parallel body and proving the generalized inequality of Hadwiger. — *Mat. fiz., analiz, geom.* **10** (2003), 40–48. (Russian)

[8] *Ju. Burago and V. Zalgaller*, Geometric Inequalities. Nauka, Leningrad (1980). (Russian)

Improvements of the analogy isoperimetric inequality and the theorem of stability of its extremal solution

V.I. Diskant

Cherkassy State Technological University
460 Blvd. Schevchenko, Cherkassy, 18006, Ukraine

E-mail:diskant@chiti.uch.net
diskant@chstu.cherkassy.ua

Received December 29, 2004

The following inequality is proved:

$$V_m^{n/(n-m)}(A,B) - V^{m/(n-m)}(B)V(A) \geq (V_m^{1/(n-m)}(A,B)$$
$$-\rho V^{1/(n-m)}(B))^n - V^{m/(n-m)}(B)V(A_{-\rho}(B)), 0 \leq \rho \leq q,$$

his consequents and the theorem of stability of solution X equation $V_m^n(X,B)$ $-V^m(B)V^{n-m}(X) = 0$ at $V(X) = V(B)$. In given inequality $V(A)$, $V(B)$ — the volumes of convex bodies A and B in $R^n (n \geq 2)$, $V_m(A,B)$ — m-mixed volume of bodies A and B, $1 \leq m \leq n-1$, q — a capacity coefficient of a body B in a body A, $A_{-\rho}(B)$ — internal body which is parallel to body A relatively to B with coefficient ρ.

Mathematics Subject Classification 2000: 52A38, 52A40.

Key words: isoperimetric inequality, analogy of isoperimetric inequality, stability of extremal solution of geometric inequality.