Журнал математической физики, анализа, геометрии
2005, т. 1, № 2, с. 147–154

Базисные свойства в пространствах L и C систем экспонент с вырождением

С.Г. Велиев

Институт математики и механики НАН Азербайджана
ул. Ф. Агаева, 9, Баку, AZ1147, Азербайджан
E-mail:rmi@lan.ab.az

Статья поступила в редакцию 9 марта 2005 г.

Рассматриваются системы экспонент с вырождающимися коэффициентами. Получены необходимые и достаточные условия полноты и минимальности этих систем в пространствах суммируемых и непрерывных функций при определенных условиях на коэффициенты.

Розглядаються системи експонент з коефіцієнтами, що вироджуються. Одержано необхідні та достатні умови повноти та мінімальності цих систем в просторах сумовних і неперервних функцій за визначених умов на коефіцієнти.

Mathematics Subject Classification 2000: 47E05.
Ключевые слова: полнота, минимальность, система экспоненциальных функций.

Рассматриваем базисные свойства систем экспонент с вырождающимися коэффициентами в пространстве суммируемых или непрерывных функций. При определенных условиях на коэффициенты получены необходимые и достаточные условия полноты и минимальности этих систем в названных пространствах. Отметим, что в случае, когда коэффициенты не являются вырождающимися, эти же вопросы были изучены в работе Б.Т. Билалова [1]. Нужно подчеркнуть, что даже в случае классической системы экспонент $\left\{t(x)e^{inx}\right\}_{-\infty}^{+\infty}$ подобные вопросы рассматриваются впервые.

1. Базисные свойства систем экспонент в пространстве суммируемых функций

Рассмотрим следующую систему экспонент с вырождающимися коэффициентами:

$$\left\{A^{+}(t)\omega^{+}(t)e^{int};\ \ A^{-}(t)\omega^{-}(t)e^{-i(n+1)t}\right\}_{n\geq 0}, \tag{1}$$

где $A^{\pm}(t) \equiv |A^{\pm}(t)|e^{i\alpha^{\pm}(t)}$ — комплекснозначные функции на сегменте $[-\pi,\pi]$, $\omega^{\pm}(t)$ имеют представления

$$\omega^{\pm}(t) \equiv \prod_{i=1}^{l^{\pm}} \left\{ \sin \left| \frac{t-\tau_i^{\pm}}{2} \right| \right\}^{\beta_i^{\pm}},$$

$\{\tau_i^{\pm}\} \subset (-\pi,\pi)$ — фиксированные точки вырождения, $\{\beta_i^{\pm}\} \subset \mathbb{R}$ — действительные параметры.

На функции $A^{\pm}(t)$ и $\omega^{\pm}(t)$ налагаются следующие условия:

1.1) $\alpha^{\pm}(t)$ — кусочно-гельдеревы функции на отрезке $[-\pi,\pi]$; $\{s_i\}_1^r$ — множество точек разрывов функции $\theta(t) \equiv \alpha^-(t) - \alpha^+(t)$ на интервале $(-\pi,\pi)$;

1.2) $|A^{\pm}(t)|$ — измеримые функции на $(-\pi,\pi)$, и имеет место неравенство

$$\sup_{(-\pi,\pi)} vrai \Big\{ \left|A^+(t)\right|^{\pm 1}; \quad \left|A^-(t)\right|^{\pm 1} \Big\} \le M < +\infty;$$

1.3) множества s_i и $\tau_i^{\pm}$ имеют пустые пересечения

$$\{\tau_i^+\} \cap \{\tau_i^-\} = \{\emptyset\}; \quad \{\tau_i^{\pm}\} \cap \{s_i\} = \{\emptyset\}.$$

Пусть $\{h_i\}_1^r$ — скачки функции $\theta(t)$ в точках s_i: $h_i = \theta(s_i+0) - \theta(s_i-0)$, $i = \overline{1,r}$.

Определим целые числа n_i, $i = \overline{1,r}$, из следующих неравенств:

$$\left.\begin{array}{l} 0 \le \frac{h_i}{2\pi} + n_{i-1} - n_i < 1 \\ n_0 = 0, \quad i = \overline{1,r} \end{array}\right\}. \tag{2}$$

Обозначим

$$\omega = \theta(-\pi) - \theta(\pi) + 2\pi n_r. \tag{3}$$

1.1. Специальный случай.

Сначала рассматриваем случай, когда все условия 1.1)–1.3) выполняются. Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть функции $A^{\pm}(t)$ и $\omega^{\pm}(t)$ удовлетворяют условиям 1.1)–1.3), величина ω определяется из (2), (3). Предположим, что выполняются следующие неравенства:*

$$-1 < \beta_i^{\pm} \le 0, \quad i = \overline{1,l^{\pm}}.$$

Система (1) полна в пространстве суммируемых функций $L_1 \equiv L_1(-\pi,\pi)$ тогда и только тогда, когда $\omega < 2\pi$; минимальна в L_1 тогда и только тогда, когда $\omega \ge 0$.

Доказательство. Вначале рассмотрим случай, когда имеет место неравенство $0 \leq \frac{\omega}{2\pi} < 1$. Совершенно очевидно, что существуют числа $r_i^{\pm} \in (1, +\infty)$, $i = \overline{1, l^{\pm}}$; и $p_i \in (1, +\infty)$, $i = \overline{1, r+1}$, такие, что выполняются неравенства:

$$-\frac{1}{r_i^{\pm}} < \beta_i^{\pm} < \frac{1}{\nu_i^{\pm}}, \quad i = \overline{1, l^{\pm}};$$

$$-\frac{1}{q_i} < \frac{h_i}{2\pi} + n_{i-1} - n_i < \frac{1}{p_i}\,, \quad n_0 = 0, \qquad i = \overline{1, r};$$

$$-\frac{1}{q_{r+1}} < \omega < \frac{1}{p_{r+1}}\,,$$

где $\frac{1}{r_i^{\pm}} + \frac{1}{\nu_i^{\pm}} = 1$; $\frac{1}{p_k} + \frac{1}{q_k} = 1$, $i = \overline{1, l^{\pm}}$; $k = \overline{1, r+1}$.

Примем $p = \min\limits_{i,k}\{r_i^{\pm};\ p_k\}$. Тогда нетрудно заметить, что справедливы следующие неравенства:

$$-\frac{1}{p} < \beta_i^{\pm} < \frac{1}{q}; \qquad i = \overline{1, l^{\pm}};$$

$$-\frac{1}{q} < \frac{h_i}{2\pi} + n_{i-1} - n_i < \frac{1}{p}\,, \quad n_0 = 0, \qquad i = \overline{1, r};$$

$$-\frac{1}{q} < \omega < \frac{1}{p}\,,$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Из результатов работы автора [2] следует, что система (1) полна и минимальна в пространстве L_p, и, следовательно, она полна и в L_1. Причем биортогональная система $\{e_n^{+}(t);\ e_{n+1}^{-}(t)\}_{n \geq 0}$ к системе (1) в L_p, как установлено работе [2], имеет представление

$$\overline{e_n^{\pm}(t)} = \frac{\varphi_n^{\pm}(t)}{\omega^{+}(t) Z^{+}(e^{it})}\,,$$

где

$$\varphi_n^{\pm}(t) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} b_k^{\pm} \cdot e^{\mp ikt}}{2\pi A^{+}(t)}\,,$$

$\{b_n^{\pm}\}$ — определенные коэффициенты, $Z^{+}(e^{it})$ — некасательные граничные значения изнутри единичного круга канонического решения $Z(z)$ однородной задачи сопряжения

$$Z^{+}(\tau) + G(\tau) \cdot Z^{-}(\tau) = 0, \qquad |\tau| = 1,$$

в классах $H^{\pm}_{p,\nu^{\pm}}$, где $\nu^{\pm} = [\omega^{\pm}]^p$ и

$$G(e^{it}) \equiv \frac{\omega^-(t) \cdot A^-(t)}{\omega^+(t) \cdot A^+(t)}.$$

Согласно результатам работы [2] выражение $\left|\omega^+(t) \cdot Z^+(e^{it})\right|$ имеет представление

$$\left|\omega^+(t) \cdot Z^+(e^{it})\right| = \left|\tfrac{A^-(t)}{A^+(t)}\right| \cdot \left|\omega^-(t) \cdot Z^-(e^{it})\right|,$$

$$\left|\omega^-(t) \cdot Z^-(e^{it})\right| = u_0(t) \cdot \left|Z_2^-(e^{it})\right| \cdot \sigma(t) \cdot \left\{\sin\left|\tfrac{t-\pi}{2}\right|\right\}^{-\frac{\omega}{2\pi}},$$

где

$$\sigma(t) \equiv \prod_{i=1} \left\{\sin\left|\frac{s_i - t}{2}\right|\right\}^{-\frac{h_i}{2\pi}} \cdot \left[\omega^+(t) \cdot \omega^-(t)\right]^{\frac{1}{2}},$$

а функции $u_0(t)$, $Z_2^-(e^{it})$ удовлетворяют условиям

$$\sup_{(-\pi,\pi)} vrai \left\{ \ |u_0(t)|^{\pm 1}; \quad \left|Z_2^-(e^{it})\right|^{\pm 1}\right\} < +\infty.$$

Из этих выражений и из условий теоремы следует, что каждый член биортогональной системы $\left\{e_n^+(t); \ \ e_{n+1}^-(t)\right\}_{n\geq 0}$ принадлежит пространству $L_\infty \equiv L_\infty(-\pi,\pi)$, и, таким образом, система (1.1) минимальна в L_1.

А теперь рассмотрим случай, когда $\omega < 0$, например, $-2\pi \leq \omega < 0$. В этом случае вместо системы (1) рассматриваем систему экспонент

$$\left\{A_1^+(t)\omega^+(t)e^{int}, \ \ A^-(t)\omega^-(t)e^{-i(n+1)t}\right\}_{n\geq 0}, \tag{4}$$

где $A_1^+(t) \equiv A(t) \cdot e^{it}$. Для этой системы все величины, кроме ω, остаются прежними, а ω_1, соответствующая системе (4), принадлежит сегменту $[0, 2\pi)$. Тогда из предыдущих рассуждений получаем, что система (4) полна и минимальна в пространстве L_1, и, таким образом, система (1) полна, но не минимальна в L_1.

При $\omega \geq 2\pi$ рассматриваем систему

$$\left\{A^+(t)\omega^+(t)e^{int}, \ \ A^-(t)\omega^-(t)e^{-int}\right\}_{n\geq 0}$$

и из тех же соображений получаем, что система (1) неполна, но минимальна в L_1. Продолжая таким образом, получаем справедливость утверждений теоремы 1. Теорема доказана.

2. Общий случай

В этом разделе рассматриваем общий случай, т.е. когда не требуется выполнения условия 1.3).

Пусть относительно функций $A^{\pm}(t)$ выполнены условия 1) и 2). Обозначим

$$S \equiv \{s_i\}_1^r, \qquad T^{\pm} \equiv \{\tau_i^{\pm}\}_1^{l^{\pm}}.$$

Переобозначим объединение

$$\{\sigma_i\}_1^l \equiv S \cup T^- \cup T^+,$$

где $\sigma_1 < \sigma_2 < \cdots < \sigma_l$.

Образуем однозначные соответствия

$$\tau_k^{\pm} \to \beta_k^{\pm}; \qquad s_k \to \frac{h_k}{2\pi}.$$

Определим

$$\lambda_i^{\pm} = \begin{cases} \frac{\beta_k^{\pm}}{2}, & \text{если } \{\sigma_i\} \cap T^{\pm} = \tau_k^{\pm}, \\ 0, & \text{если } \{\sigma_i\} \cap T^{\pm} = \emptyset, \end{cases}$$

$$\lambda_i = \begin{cases} -\frac{h_k}{2\pi}, & \text{если } \{\sigma_i\} \cap S = \alpha_k, \\ 0, & \text{если } \{\sigma_i\} \cap S = \emptyset, \end{cases}$$

$$\nu_i = -(\lambda_i^+ + \lambda_i^- + \lambda_i), \qquad i = \overline{1, l}. \tag{5}$$

Целые числа n_i, $i = \overline{1, l}$, определим из следующих неравенств:

$$\left.\begin{array}{l} 0 \le \nu_i + n_{i-1} - n_i < 1 \\ n_0 = 0, \qquad i = \overline{1, l} \end{array}\right\}. \tag{6}$$

Обозначим

$$\omega = \theta(-\pi) - \theta(\pi) + 2\pi \cdot n_l. \tag{7}$$

Итак, справедлива

Теорема 2. *Пусть функции $A^{\pm}(t)$ удовлетворяют условиям 1.1)–1.2). Величина ω определяется выражениями (5)–(7). Если имеют место неравенства*

$$-1 < \beta_i^{\pm} \le 0, \;\; i = \overline{1, l^{\pm}},$$

то система (1) полна в пространстве L_1 тогда и только тогда, когда $\omega < 2\pi$; минимальна в L_1 только в том случае, если $\omega \ge 0$.

Доказательство проводится совершенно аналогично доказательству теоремы 1, т.к. в случае, когда $0 \le \omega < 2\pi$, при установлении полноты в L_1 используем результаты работы [2].

При исследовании минимальности, следуя схеме доказательства теоремы 1, нужно обратить внимание на представление для произведения $\omega^+(t)Z^+(e^{it})$, где $Z(z)$ — каноническое решение однородной задачи сопряжения:

$$Z^+(\tau) + G(\tau)Z^-(\tau) = 0, \quad |\tau| = 1,$$

где

$$G(e^{it}) = \frac{\omega^-(t)A^-(e^{it})}{\omega^+(t) \cdot A^+(e^{it})}.$$

Таким образом,

$$\left|\omega^+(t) \cdot Z^+(e^{it})\right| = \left|\frac{A^-(t)}{A^+(t)}\right| \cdot \left|\omega^-(t) \cdot Z^-(e^{it})\right|.$$

Вводя необходимые обозначения

$$\sigma(t) \equiv \prod_{i=1}^{l} \left\{\sin\left|\frac{\sigma_i - t}{2}\right|\right\}^{\nu_i},$$

$$u_0(t) \equiv \left\{\sin\left|\frac{t-\pi}{2}\right|\right\}^{-\frac{h_0}{2\pi}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \theta_0(s) \cdot ctg\frac{t-s}{2}ds\right\},$$

где $\theta_0(t)$ — непрерывная часть функции $\theta(t)$, $h_0^{(0)} = \theta_0(-\pi) - \theta_0(\pi)$, как уже установлено в работе автора [2], выражение $\left|\omega^-(t) \cdot Z^-(e^{it})\right|$ можно представить в виде

$$\left|\omega^-(t) \cdot Z^-(e^{it})\right| = u_0(t)\left|Z_2^-(e^{it})\right| \cdot \sigma(t) \cdot \left\{\sin\left|\frac{t-\pi}{2}\right|\right\}^{-\frac{\omega}{2\pi}}.$$

Для завершения доказательства, необходимо учесть выражение биортогональной системы и условия теоремы 2. Теорема доказана.

3. Некоторые свойства базисности в пространстве непрерывных функций

В настоящем разделе будем рассматривать некоторые достаточные условия минимальности системы экспонент с вырождающимися коэффициентами

$$\left\{\omega^+(t)A^+(t)e^{int}, \quad \omega^-(t)A^-(t)e^{-i(n+1)t}\right\}_{n\ge 0} \tag{8}$$

в пространстве непрерывных функций $C \equiv C[-\pi, \pi]$ с sup-нормой.

Естественно, рассматриваемое пространство налагает ограничения на данные системы (8). Предположим выполнение следующих условий.

2.1) $A^{\pm}(t)$ — непрерывные функции на отрезке $[-\pi, \pi]$, которые удовлетворяют условию

$$\max_{[-\pi,\pi]} \left\{ \left|A^{+}(t)\right|^{\pm 1}; \quad \left|A^{-}(t)\right|^{\pm 1} \right\} < +\infty;$$

2.2) $\alpha^{\pm}(t) = \arg A^{\pm}(t)$ — гельдеревы функции на отрезке $[-\pi, \pi]$;

2.3) $\omega^{\pm}(t)$ имеют представления

$$\omega^{\pm}(t) = \prod_{i=1}^{l^{\pm}} \left\{ \sin \left| \frac{t - \tau_i^{\pm}}{2} \right| \right\}^{\beta_i^{\pm}},$$

где $\{\tau_i^{\pm}\} \subset (-\pi, \pi)$ — фиксированные точки, $\{\beta_i^{\pm}\} \subset [0, +\infty)$ — действительные параметры.

Справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть функции $A^{\pm}(t)$ и $\omega^{\pm}(t)$ удовлетворяют условиям 2.1)–2.3) и выполняются следующие неравенства:*

$$0 \le \beta_i^{\pm} < 1, \qquad i = \overline{1, l^{\pm}}.$$

Тогда при $\omega > 0$ система (8) неполна в пространстве C, а при $\omega > -2\pi$ минимальна в C.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Итак, пусть выполняются все условия теоремы и $\omega > 0$. Тогда очевидно, что существует число $p \in (1, +\infty)$, для которого имеют место

$$-\frac{1}{p} \le \beta_i^{\pm} < \frac{1}{q}, \quad i = \overline{1, l^{\pm}}; \quad \omega > \frac{2\pi}{p},$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. По результатам работы [2] в этом случае система (8) неполна в L_p. Следовательно, она неполна и в пространстве C.

А теперь пусть $\omega > -2\pi$. Опять-таки, существует число $p \in (1, +\infty)$ такое, что выполнены неравенства

$$-\frac{1}{p} \le \beta_i^{\pm} < \frac{1}{q}, \quad i = \overline{1, l^{\pm}}; \quad \omega > -\frac{2\pi}{p},$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. По результатам работы [2] система (8) минимальна в пространстве L_p. В результате она минимальна и в пространстве C, т.к. в противном случае получили бы неминимальность в L_p. Теорема доказана.

Автор выражает глубокую благодарность акад. М.Г. Гасымову за проявленное внимание к работе.

References

[1] *B.T. Bilalov*, The basis properties of some systems of exponential functions, cosines and sines. — *Sib. Mat. Zh.* **45** (2004), No. 2, 264–273. (Russian)

[2] *S.G. Veliev*, Basis of exponential functions with degeneration and boundary-value problems. Preprint IMM NASAz, Baku (2004). (Russian)

Basis properties in the spaces L and C of the systems of exponential functions with degeneration

S.N. Veliev

Institute of Mathematics and Mechanics
National Academy of Sciences of Azerbaijan
9 F. Agayev Str., Baku, AZ1141, Azerbaijan

E-mail:rmi@lan.ab.az

Received March 9, 2005

Systems of exponential functions with degenerating coefficients are considered. Necessary and sufficient conditions of the completeness and minimality of these systems are obtained in the spaces of summable and continuous functions under definite conditions on the coefficients.

Mathematics Subject Classification 2000: 47E05.

Key words: completeness, minimality, system of exponential functions.