Журнал математической физики, анализа, геометрии
2005, т. 1, № 1, с. 74–92

О комплексной проблеме моментов на радиальных лучах

С.М. Загороднюк

Механико-математический факультет
Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина
пл. Свободы, 4, Харьков, 61077, Украина
E-mail:Sergey.M.Zagorodnyuk@univer.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 19 апреля 2004 г.

Изучается комплексная проблема моментов в том случае, когда носитель меры сосредоточен на алгебраических кривых $P_N = \{z \in \mathbb{C} : z^N - \overline{z}^N = 0\}$, $N = 1, 2, 3, \ldots$. Для $N = 2, 3$ получены необходимые и достаточные условия разрешимости и описаны все решения задачи. Показано, как данная задача для произвольного N связывается с проблемой моментов Гамбургера с параметрами.

Вивчається комплексна проблема моментів у тому випадку, коли носій міри розташований на алгебраїчних кривих $P_N = \{z \in \mathbb{C} : z^N - \overline{z}^N = 0\}$, $N = 1, 2, 3, \ldots$. Для $N = 2, 3$ одержано необхідні та достатні умови розв'язності та описано всі розв'язки задачі. Показано, як дана задача для довільного N пов'язується з проблемою моментів Гамбургера з параметрами.

Как известно, комплексная проблема моментов (см. [1, 2]) состоит в нахождении позитивной, борелевской меры μ в комплексной плоскости такой, что

$$\int\limits_{\mathbb{C}} z^m \overline{z}^n \mu(dz) = c_{m,n}, \ m, n \in \mathbb{Z}_+, \tag{1}$$

где $\{c_{m,n}\}_{n,m=0}^{\infty}$ — заданная последовательность комплексных чисел.

Для данной задачи, в частности, были установлены условия разрешимости [1, Satz 7, S. 28], [2, Th. 11, p. 447–448]. Также изучалась задача (1) в том случае, когда носитель меры сосредоточен на алгебраических кривых вида $L(p) = \{z \in \mathbb{C} : p(z, \overline{z}) = 0\}$, где p — многочлен двух переменных. Получены условия разрешимости [2, Th. 52, p. 482] в случае, если $p(0, 0) \neq 0$, и в общем случае [2, Prop. 51, p. 481–482]. Кроме того, получены условия разрешимости

Mathematics Subject Classification 2000: 44A60.

в случае, когда многочлен $p(z,\overline{z})$ имеет доминирующий коэффициент (т.е. коэффициент при члене с максимальной степенью, по модулю превосходящий сумму модулей всех других коэффициентов при членах с максимальной степенью) [3, Th. 4, p. 35]. Заметим также, что из результата [4, Th. 5.4, p. 142] и связи двумерной вещественной и комплексной проблем моментов (см. [2, Prop. 57, p. 486]) можно легко получить условия разрешимости задачи (1) на $L(p)$, где p — многочлен не выше второй степени.

Заметим, однако, при этом, что процедура проверки условий [2, Prop. 51], как и [1, Satz 7], [2, Th. 11], неясна. Описание всех решений для упомянутых задач также не проводилось.

Мы изучаем задачу (1) в том случае, когда носитель меры лежит на кривых $P_N = \{z \in \mathbb{C} : z^N - \overline{z}^N = 0\}$, где $N = 1, 2, 3, \ldots$. Для $N = 2, 3$ получены необходимые и достаточные условия разрешимости и описаны все решения задачи. Для произвольного N задача связана с некоторыми проблемами моментов Гамбургера с параметрами.

1. Рассмотрим следующую задачу: найти неубывающую функцию $\sigma(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R} \cup T$, $T = (-i\infty, i\infty)$, $(\sigma(\lambda_2) \geq \sigma(\lambda_1)$, $\frac{\lambda_2}{i} \geq \frac{\lambda_1}{i}$, если $\lambda_1, \lambda_2 \in T)$, $\sigma(0) = 0$, такую, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}\cup T} \lambda^m \overline{\lambda}^n d\sigma(\lambda) = s_{m,n},\ m, n \in \mathbb{Z}_+, \tag{2}$$

где $\{s_{m,n}\}_{n,m=0}^{\infty}$ — заданная последовательность комплексных чисел. Здесь интеграл понимается как сумма интегралов по вещественной и мнимой осям. Если задача (2) разрешима для некоторой последовательности $\{s_{m,n}\}_{n,m=0}^{\infty}$, то последовательность $\{s_{m,n}\}_{n,m=0}^{\infty}$ называем моментной. В случае разрешимости задачи (2), из структуры носителя меры заключаем, что

$$s_{m,2k} = s_{m+2k,0},\ s_{m,2k+1} = s_{m+2k,1},\ m, k \in \mathbb{Z}_+. \tag{3}$$

Далее,

$$\int\limits_{\mathbb{R}\cup T} \lambda^k d\sigma(\lambda) = s_{k,0},\ \int\limits_{\mathbb{R}\cup T} \lambda^k \overline{\lambda} d\sigma(\lambda) = s_{k,1},\ k \in \mathbb{Z}_+. \tag{4}$$

С другой стороны, если для комплексных чисел $\{s_{k,0}, s_{k,1}\}_{k=0}^{\infty}$ найдется неубывающая функция $\sigma(\lambda)$ такая, что выполнено (4) и выполнено (3), то $\{s_{m,n}\}_{n,m=0}^{\infty}$ — моментная последовательность.

Из (4) заключаем, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \lambda^k d\sigma(\lambda) + \int\limits_{T} \lambda^k d\sigma(\lambda) = s_{k,0},\ \int\limits_{\mathbb{R}} \lambda^{k+1} d\sigma(\lambda) - \int\limits_{T} \lambda^{k+1} d\sigma(\lambda) = s_{k,1},\ k \in \mathbb{Z}_+,$$

откуда

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda^k d\sigma(\lambda) = \frac{1}{2}(s_{k,0} + s_{k-1,1}), \ \int_{T} \lambda^k d\sigma(\lambda) = \frac{1}{2}(s_{k,0} - s_{k-1,1}), \ k \in \mathbb{N},$$

$$\int_{\mathbb{R}} d\sigma(\lambda) + \int_{T} d\sigma(\lambda) = s_{0,0}.$$

Обозначим

$$A = \int_{\mathbb{R}} d\sigma(\lambda).$$

Тогда

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda^k d\sigma(\lambda) = \frac{1}{2}(s_{k,0} + s_{k-1,1}), \ k \in \mathbb{N}, \ \int_{\mathbb{R}} d\sigma(\lambda) = A; \tag{5}$$

$$\int_{\mathbb{R}} y^k d\sigma(yi) = \frac{1}{2i^k}(s_{k,0} - s_{k-1,1}), \ k \in \mathbb{N}, \ \int_{\mathbb{R}} d\sigma(yi) = s_{0,0} - A. \tag{6}$$

Согласно известному критерию разрешимости проблемы моментов Гамбургера (см. [5, с. 52]), выполнение (5),(6) для некоторых неубывающих функций $\sigma(\lambda), \sigma(iy)$ эквивалентно выполнению неравенств:

$$\Gamma_n := \begin{pmatrix} A & \hat{s}_1 & \hat{s}_2 & \dots & \hat{s}_n \\ \hat{s}_1 & \hat{s}_2 & \hat{s}_3 & \dots & \hat{s}_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{s}_n & \hat{s}_{n+1} & \hat{s}_{n+2} & \dots & \hat{s}_{2n} \end{pmatrix} \geq 0, \ n \in \mathbb{N}; \tag{7}$$

$$\tilde{\Gamma}_n := \begin{pmatrix} s_{0,0} - A & \tilde{s}_1 & \tilde{s}_2 & \dots & \tilde{s}_n \\ \tilde{s}_1 & \tilde{s}_2 & \tilde{s}_3 & \dots & \tilde{s}_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{s}_n & \tilde{s}_{n+1} & \tilde{s}_{n+2} & \dots & \tilde{s}_{2n} \end{pmatrix} \geq 0, \ n \in \mathbb{N}; \tag{8}$$

$$\hat{s}_k, \tilde{s}_k \in \mathbb{R}, \ k \in \mathbb{N},$$

где $\hat{s}_k = \frac{1}{2}(s_{k,0} + s_{k-1,1}), \ \tilde{s}_k = \frac{1}{2i^k}(s_{k,0} - s_{k-1,1}), \ k \in \mathbb{N}.$

Поскольку неотрицательность матрицы эквивалентна неотрицательности всех ее главных миноров [6, теор. 4, с. 278], неравенства (7), (8) равносильны следующим неравенствам для главных миноров матриц Γ_n, $\tilde{\Gamma}_n$:

$$\Gamma_n \begin{pmatrix} 1 & i_2 & i_3 & \dots & i_p \\ 1 & i_2 & i_3 & \dots & i_p \end{pmatrix} \geq 0, \ \tilde{\Gamma}_n \begin{pmatrix} 1 & i_2 & i_3 & \dots & i_p \\ 1 & i_2 & i_3 & \dots & i_p \end{pmatrix} \geq 0,$$

$$2 \leq i_2 < i_3 < \ldots < i_p \leq n+1; \ p = 1, 2, \ldots, n; \ n \in \mathbb{N}; \tag{9}$$

(здесь при $p=1$ подразумевается $\Gamma_n\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ и $\tilde{\Gamma}_n\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$);

$$\Gamma_n\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \ldots & i_p\\ i_1 & i_2 & \ldots & i_p\end{pmatrix}\geq 0,\ \tilde{\Gamma}_n\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \ldots & i_p\\ i_1 & i_2 & \ldots & i_p\end{pmatrix}\geq 0,$$

$$2\leq i_1<i_2<\ldots<i_p\leq n+1;\ p=1,2,\ldots,n;\ n\in\mathbb{N}. \tag{10}$$

Заметим, что миноры в (10) не зависят от числа A. Раскрывая определители в (9) по первой строке, получаем

$$\Gamma_n\begin{pmatrix}1 & i_2 & i_3 & \ldots & i_p\\ 1 & i_2 & i_3 & \ldots & i_p\end{pmatrix}=Ac_n(i_2,i_3,\ldots,i_p)+d_n(i_2,i_3,\ldots,i_p)\geq 0;$$

$$\tilde{\Gamma}_n\begin{pmatrix}1 & i_2 & i_3 & \ldots & i_p\\ 1 & i_2 & i_3 & \ldots & i_p\end{pmatrix}=(s_{0,0}-A)\tilde{c}_n(i_2,i_3,\ldots,i_p)+\tilde{d}_n(i_2,i_3,\ldots,i_p)\geq 0,$$

$$n=1,2,3,\ldots, \tag{11}$$

где $c_n=\Gamma_n\begin{pmatrix}i_2 & i_3 & \ldots & i_p\\ i_2 & i_3 & \ldots & i_p\end{pmatrix}$, $\tilde{c}_n=\tilde{\Gamma}_n\begin{pmatrix}i_2 & i_3 & \ldots & i_p\\ i_2 & i_3 & \ldots & i_p\end{pmatrix}$,
$d_n=\Gamma'_n\begin{pmatrix}1 & i_2 & i_3 & \ldots & i_p\\ 1 & i_2 & i_3 & \ldots & i_p\end{pmatrix}$, $\tilde{d}_n=\tilde{\Gamma}'_n\begin{pmatrix}1 & i_2 & i_3 & \ldots & i_p\\ 1 & i_2 & i_3 & \ldots & i_p\end{pmatrix}$, Γ'_n, $\tilde{\Gamma}'_n$ — матрицы, получаемые из Γ_n, $\tilde{\Gamma}_n$ заменой числа A нулем, при $p\neq 1$, а при $p=1$ положено $c_n=\tilde{c}_n=1$, $d_n=\tilde{d}_n=0$.

Обозначим

$$A_1=\lim_{n\to\infty}\max_{\substack{2\leq i_2<i_3<\ldots<i_p\leq n+1,\\ p=1,2,\ldots,n:\ c_n\neq 0}}\left(-\frac{d_n(i_2,i_3,\ldots,i_p)}{c_n(i_2,i_3,\ldots,i_p)}\right),$$

$$A_2=\lim_{n\to\infty}\min_{\substack{2\leq i_2<i_3<\ldots<i_p\leq n+1,\\ p=1,2,\ldots,n:\ \tilde{c}_n\neq 0}}\left(s_{0,0}+\frac{\tilde{d}_n(i_2,i_3,\ldots,i_p)}{\tilde{c}_n(i_2,i_3,\ldots,i_p)}\right), \tag{12}$$

где при $p=1$ величины c_n, $\tilde{c}_n$, d_n, $\tilde{d}_n$ вычисляются, как в (11).

Из (11) заключаем, что $A_1\leq A_2$.

Теорема 1. *Пусть задана проблема моментов (2) с некоторым набором комплексных чисел $\{s_{m,n}\}_{n,m=0}^{\infty}$. Для того чтобы проблема моментов имела решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

1) $s_{m,2k}=s_{m+2k,0},\ s_{m,2k+1}=s_{m+2k,1},\ m,k\in\mathbb{Z}_+$*;*

2) $\hat{s}_k:=\frac{1}{2}(s_{k,0}+s_{k-1,1})\in\mathbb{R},\ \tilde{s}_k:=\frac{1}{2i^k}(s_{k,0}-s_{k-1,1})\in\mathbb{R},\ k\in\mathbb{N}$;

3) $A_1\leq A_2$*, где* A_1,A_2 *определены, как в (12);*

4) выполнены соотношения (10);

5) $d_n(i_2, i_3, \ldots, i_p) \geq 0$, *если* $c_n(i_2, i_3, \ldots, i_p) = 0$, $2 \leq i_2 < i_3 < \ldots < i_p \leq n+1$; $p = 2, 3, \ldots, n$; $n = 1, 2, 3, \ldots$;

6) $\tilde{d}_n(i_2, i_3, \ldots, i_p) \geq 0$, *если* $\tilde{c}_n(i_2, i_3, \ldots, i_p) = 0$, $2 \leq i_2 < i_3 < \ldots < i_p \leq n+1$; $p = 2, 3, \ldots, n$; $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Тогда набор функций $\{\sigma_A(\lambda), \lambda \in \mathbb{R} \cup T : \ \sigma_A(\lambda) = \tilde{\sigma}_A(\lambda), \lambda \in \mathbb{R};\ \sigma_A(yi) = \tilde{\sigma}_A(yi), y \in \mathbb{R}$, *где* $\tilde{\sigma}_A(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}$, *и* $\tilde{\sigma}_A(yi), y \in \mathbb{R}$, *— всевозможные решения разрешимых проблем моментов Гамбургера (5) и (6), соответственно, нормированные условием* $\sigma(0) = 0$; $A \in [A_1, A_2]\}$, *если имеют место 1)–6), дает все решения задачи (2).*

Проблема моментов (2) будет определенной тогда и только тогда, когда $A_1 = A_2 = a \in \mathbb{R}$ *и проблемы моментов (5) и (6) определены для* $A = a$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость условий 1)–4) показана перед формулировкой теоремы. Необходимость условий 5), 6) следует из (11).

Обратно, пусть выполнены условия 1)–6). В этом случае существует $A \in [A_1, A_2]$, для которого выполнены условия (11) при $c_n \neq 0$, $\tilde{c}_n \neq 0$. Учитывая 5),6), заключаем, что (11) выполнено. Учитывая 4), заключаем, что условия (9),(10) выполнены. Тогда выполняются (7), (8). При этом элементы матриц в (7),(8) вещественны, как следует из условия 2). Значит, задачи (5),(6) имеют решения $\sigma(\lambda)$, $\sigma(yi)$. Функции $\tilde{\sigma}_A(\lambda)$, определяемые, как в условии теоремы, будут решениями (4), а значит, в силу 1) и (2). С другой стороны, как было показано перед теоремой, любое решение задачи (2) является решением задач (5), (6) с некоторым $A \in [A_1, A_2]$.

Утверждение об определенности очевидно. Теорема доказана.

В предыдущей теореме для краткости мы не выписываем известных формул для параметрического представления всех решений проблемы моментов Гамбургера в невырожденном случае и решения в вырожденном случае (см. [7, 8]).

2. Перейдем к рассмотрению более общей задачи: найти функцию $\sigma(\lambda)$, $\lambda \in P_N$, $P_N = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \lambda^N \in \mathbb{R}\}$, $N = 1, 2, 3, \ldots$, неубывающую на каждом радиальном луче в P_N (от нуля к бесконечности), $\sigma(0) = 0$, такую, что

$$\int\limits_{P_N} \lambda^m \overline{\lambda}^n d\sigma(\lambda) = s_{m,n},\ m, n \in \mathbb{Z}_+, \tag{13}$$

где $\{s_{m,n}\}_{n,m=0}^{\infty}$ — заданная последовательность комплексных чисел. Здесь интеграл понимается как сумма интегралов по всем радиальным лучам, входящим в P_N.

Легко видеть, что

$$P_N = \cup_{k=0}^{N-1} \{x u^k,\ x \in \mathbb{R}\},$$

если N — нечетно,

$$P_N = \cup_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}\{xu^k,\ x\in\mathbb{R}\}\cup\{xu^k\varepsilon,\ x\in\mathbb{R}\},$$

если N — четно, где $u=\cos\frac{2\pi}{N}+i\sin\frac{2\pi}{N}$; $\varepsilon=\cos\frac{\pi}{N}+i\sin\frac{\pi}{N}$.

Рассмотрим случай нечетного N. Обозначим $\Phi_k=\{xu^k,\ x\in\mathbb{R}\}$, $k=0,1,\ldots,N-1$. Пусть задача (13) имеет решение $\sigma(\lambda)$. Тогда

$$\sum_{k=0}^{N-1}\int\limits_{\Phi_k}\lambda^m d\sigma(\lambda)=s_{m,0};$$

$$\sum_{k=0}^{N-1}\int\limits_{\Phi_k}\lambda^m\overline{\lambda}d\sigma(\lambda)=s_{m,1};$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{k=0}^{N-1}\int\limits_{\Phi_k}\lambda^m\overline{\lambda}^{N-1}d\sigma(\lambda)=s_{m,N-1},\ m\in\mathbb{Z}_+, \tag{14}$$

$$s_{m,kN+l}=\int\limits_{P_N}\lambda^m\overline{\lambda}^{kN+l}d\sigma(\lambda)=\int\limits_{P_N}\lambda^{m+kN}\overline{\lambda}^l d\sigma(\lambda)=s_{m+kN,l},\ m,k\in\mathbb{Z}_+,$$

$$l=0,1,\ldots,N-1,$$

$$s_{m,kN+l}=s_{m+kN,l},\ m,k\in\mathbb{Z}_+,\ l=0,1,\ldots,N-1. \tag{15}$$

В интегралах по Φ_k сделаем замену $\lambda=xu^k$:

$$\sum_{k=0}^{N-1}u^{km}\int\limits_{\mathbb{R}}x^m d\tilde{\sigma}(xu^k)=s_{m,0};$$

$$\sum_{k=0}^{N-1}u^{km}\overline{u}^k\int\limits_{\mathbb{R}}x^{m+1}d\tilde{\sigma}(xu^k)=s_{m,1};$$

$$\sum_{k=0}^{N-1}u^{km}\overline{u}^{2k}\int\limits_{\mathbb{R}}x^{m+2}d\tilde{\sigma}(xu^k)=s_{m,2};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{k=0}^{N-1}u^{km}\overline{u}^{(N-1)k}\int\limits_{\mathbb{R}}x^{m+N-1}d\tilde{\sigma}(xu^k)=s_{m,N-1},\ m\in\mathbb{Z}_+, \tag{16}$$

где $\tilde{\sigma}(xu^k) = \left\{ \begin{array}{ll} \sigma(xu^k), & x \geq 0 \\ -\sigma(xu^k), & x < 0 \end{array} \right.$.

Далее, мы можем выписать равенства:

$$\sum_{k=0}^{N-1} u^{kl} \int_{\mathbb{R}} x^l d\tilde{\sigma}(xu^k) = s_{l,0};$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} u^{k(l-1)} \overline{u}^k \int_{\mathbb{R}} x^l d\tilde{\sigma}(xu^k) = s_{l-1,1};$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} u^{k(l-2)} \overline{u}^{2k} \int_{\mathbb{R}} x^l d\tilde{\sigma}(xu^k) = s_{l-2,2};$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} u^{k(l-N+1)} \overline{u}^{(N-1)k} \int_{\mathbb{R}} x^l d\tilde{\sigma}(xu^k) = s_{l-N+1,N-1}, \ l \in \mathbb{Z}_+, \tag{17}$$

где равенства, в которых встречается $s_{m,n}$ с отрицательным m, являются определениями для $s_{m,n}$.

Система уравнений (17) является системой N линейных уравнений относительно $\int_{\mathbb{R}} x^l d\tilde{\sigma}(xu^k), \ k = 0, 1, \dots, N-1$. Обозначим матрицу этой системы D_l, и пусть $\Delta_l = \det D_l$. Тогда

$$D_l = \begin{pmatrix} 1 & u^l & u^{2l} & \dots & u^{(N-1)l} \\ 1 & u^{l-2} & u^{2(l-2)} & \dots & u^{(N-1)(l-2)} \\ 1 & u^{l-4} & u^{2(l-4)} & \dots & u^{(N-1)(l-4)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & u^{l-2(N-1)} & u^{2(l-2(N-1))} & \dots & u^{(N-1)(l-2(N-1))} \end{pmatrix}, \tag{18}$$

где мы учли, что $u\overline{u} = 1$. Вынося из k-го столбца определителя этой матрицы $u^{(k-1)l}, \ k = 1, 2, \dots, N$, имеем

$$\Delta_l = u^l u^{2l} \dots u^{(N-1)l} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & u^{-2} & u^{-4} & \dots & u^{-2(N-1)} \\ 1 & u^{-4} & u^{-8} & \dots & u^{-4(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & u^{-2(N-1)} & u^{-4(N-1)} & \dots & u^{-2(N-1)(N-1)} \end{vmatrix}.$$

В строках определителя Δ_l стоят степени чисел $1, u^{-2}, u^{-4}, \dots, u^{-2(N-1)}$. Заметим, что $u^{-2} = u^N u^{-2} = u^{N-2}$. Но числа $N-2$ и N при N нечетном взаимно просты. В противном случае их разность была бы кратна нечетному числу, большему единицы. Значит, u^{-2} — первообразный корень из единицы степени N и числа $1, u^{-2}, u^{-4}, \ldots, u^{-2(N-1)}$ различны. Следовательно, определитель Вандермонда $\Delta_l \neq 0$, $l \in \mathbb{Z}_+$.

Обозначим

$$\begin{pmatrix} \hat{s}_{l,0} \\ \hat{s}_{l,1} \\ \vdots \\ \hat{s}_{l,N-1} \end{pmatrix} = D_l^{-1} \begin{pmatrix} s_{l,0} \\ s_{l-1,1} \\ \vdots \\ s_{l-N+1,N-1} \end{pmatrix}, \; l \in \mathbb{Z}_+. \tag{19}$$

Тогда

$$\int\limits_{\mathbb{R}} x^l d\tilde{\sigma}(x) = \hat{s}_{l,0},$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} x^l d\tilde{\sigma}(xu) = \hat{s}_{l,1},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} x^l d\tilde{\sigma}(xu^{N-1}) = \hat{s}_{l,N-1}, \; l \in \mathbb{Z}_+. \tag{20}$$

Теорема 2. *Пусть задана проблема моментов (13), где N — нечетно, с некоторым набором комплексных чисел $\{s_{m,n}\}_{n,m=0}^{\infty}$. Для того чтобы она имела решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось (15) и существовали числа $s_{-1,1}$; $s_{-2,2}$, $s_{-1,2}; \ldots; s_{-N+1,N-1}$, $s_{-N+2,N-1}, \ldots, s_{-1,N-1}$ $\in \mathbb{C}$ такие, что*

$$\hat{s}_{l,0}, \hat{s}_{l,1}, \ldots, \hat{s}_{l,N-1} \in \mathbb{R}, \; l \in \mathbb{Z}_+, \tag{21}$$

и

$$(\hat{s}_{n+m,k})_{n,m=0}^{M} \geq 0, \; M \in \mathbb{Z}_+; k = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{22}$$

здесь $\hat{s}_{l,k}$ из (19), где D_l — матрица из (18).

Доказательство. Пусть проблема моментов имеет решение $\sigma(\lambda)$. В этом случае, как было показано выше, выполнено (20), и значит, согласно критерию разрешимости проблемы моментов Гамбургера, (21), (22).

Наоборот, если выполнено (21), (22), то согласно критерию разрешимости проблемы моментов Гамбургера существует $\tilde{\sigma}(\lambda), \lambda \in P_N$, такая, что выполняется (20), и значит, (14). Учитывая (15), заключаем, что выполнено (13). Теорема доказана.

Заметим, что неотрицательность матриц в (22) эквивалентна неотрицательности всех главных миноров этих матриц, что приводит к системе неравенств для нахождения неизвестных $s_{-1,1}$; $s_{-2,2}, s_{-1,2}; \ldots; s_{-N+1,N-1}$,

$s_{-N+2,N-1},\ldots,s_{-1,N-1}\in\mathbb{C}$. Естественным действием здесь представляется нахождение при каждом $M\in\mathbb{Z}_+$ решения (21) и системы неравенств, соответствующей (22), и затем нахождение пересечения множеств решений по всем $M=0,1,2,\ldots$. Однако даже для небольших номеров N решение системы (21) и неравенств, соответствующих (22), непросто. Мы будем изучать здесь случай $N=3$.

Пусть задача (13) с $N=3$ имеет решение $\sigma(\lambda)$. Тогда в вышеприведенных рассуждениях (с (14) до (20)) имеем $u^{-2}=u=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$D_l=\begin{pmatrix}1&u^l&u^{2l}\\1&u^{l-2}&u^{2(l-2)}\\1&u^{l-4}&u^{2(l-4)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&u^{-2}&u^{-4}\\1&u^{-4}&u^{-8}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&u^l&0\\0&0&u^{2l}\end{pmatrix}.$$

Поскольку $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&u^{-2}&u^{-4}\\1&u^{-4}&u^{-8}\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&u^{2}&u\\1&u&u^{2}\end{pmatrix}$, то

$$D_l^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&u^{-l}&0\\0&0&u^{-2l}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&u^{2}&u\\1&u&u^{2}\end{pmatrix},l\in\mathbb{Z}_+. \tag{23}$$

Заметим, что $\hat{s}_{l,k},\ k=0,1,2$, лишь при $l=0,1$ могут зависеть от чисел $s_{i,j}$ с отрицательным i. Именно, справедливы равенства:

$$\hat{s}_{0,0}=\frac{1}{3}(s_{0,0}+s_{-1,1}+s_{-2,2}),$$

$$\hat{s}_{0,1}=\frac{1}{3}(s_{0,0}+u^2s_{-1,1}+us_{-2,2}),$$

$$\hat{s}_{0,2}=\frac{1}{3}(s_{0,0}+us_{-1,1}+u^2s_{-2,2}),$$

$$\hat{s}_{1,0}=\frac{1}{3}(s_{1,0}+s_{0,1}+s_{-1,2}),$$

$$\hat{s}_{1,1}=\frac{1}{3}(u^2s_{1,0}+us_{0,1}+s_{-1,2}),$$

$$\hat{s}_{1,2}=\frac{1}{3}(us_{1,0}+u^2s_{0,1}+s_{-1,2}), \tag{24}$$

что следует из (19), (23).

Поскольку $\hat{s}_{i,j}\in\mathbb{R}$, $s_{0,0}=\int_{P_N}d\sigma(\lambda)\geq 0$, $\overline{s_{1,0}}=\int_{P_N}\overline{\lambda}d\sigma(\lambda)=s_{0,1}$, то из последних равенств заключаем, что

$$s_{-1,1}+s_{-2,2},\ u^2s_{-1,1}+us_{-2,2},\ us_{-1,1}+u^2s_{-2,2},\ s_{-1,2}\in\mathbb{R}.$$

Следовательно, приравнивая мнимую часть последних выражений к нулю, заключаем

$$s_{-2,2} = \overline{s_{-1,1}}, \; s_{-1,2} \in \mathbb{R}. \tag{25}$$

Поскольку проблемы моментов в (20) разрешимы, то выполнено:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3}(s_{0,0}+s_{-1,1}+s_{-2,2}) & \frac{1}{3}(s_{1,0}+s_{0,1}+s_{-1,2}) & \hat{s}_{2,0} & \hat{s}_{3,0} & \dots & \hat{s}_{n,0} \\ \frac{1}{3}(s_{1,0}+s_{0,1}+s_{-1,2}) & \hat{s}_{2,0} & \hat{s}_{3,0} & \hat{s}_{4,0} & \dots & \hat{s}_{n+1,0} \\ \hat{s}_{2,0} & \hat{s}_{3,0} & \hat{s}_{4,0} & \hat{s}_{5,0} & \dots & \hat{s}_{n+2,0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{s}_{n,0} & \hat{s}_{n+1,0} & \hat{s}_{n+2,0} & \hat{s}_{n+3,0} & \dots & \hat{s}_{2n,0} \end{vmatrix} \ge 0, \tag{26}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3}(s_{0,0}+u^2 s_{-1,1}+u s_{-2,2}) & \frac{1}{3}(u^2 s_{1,0}+u s_{0,1}+s_{-1,2}) & \hat{s}_{2,1} & \hat{s}_{3,1} & \dots & \hat{s}_{n,1} \\ \frac{1}{3}(u^2 s_{1,0}+u s_{0,1}+s_{-1,2}) & \hat{s}_{2,1} & \hat{s}_{3,1} & \hat{s}_{4,1} & \dots & \hat{s}_{n+1,1} \\ \hat{s}_{2,1} & \hat{s}_{3,1} & \hat{s}_{4,1} & \hat{s}_{5,1} & \dots & \hat{s}_{n+2,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{s}_{n,1} & \hat{s}_{n+1,1} & \hat{s}_{n+2,1} & \hat{s}_{n+3,1} & \dots & \hat{s}_{2n,1} \end{vmatrix} \ge 0, \tag{27}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3}(s_{0,0}+u s_{-1,1}+u^2 s_{-2,2}) & \frac{1}{3}(u s_{1,0}+u^2 s_{0,1}+s_{-1,2}) & \hat{s}_{2,2} & \hat{s}_{3,2} & \dots & \hat{s}_{n,2} \\ \frac{1}{3}(u s_{1,0}+u^2 s_{0,1}+s_{-1,2}) & \hat{s}_{2,2} & \hat{s}_{3,2} & \hat{s}_{4,2} & \dots & \hat{s}_{n+1,2} \\ \hat{s}_{2,2} & \hat{s}_{3,2} & \hat{s}_{4,2} & \hat{s}_{5,2} & \dots & \hat{s}_{n+2,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{s}_{n,2} & \hat{s}_{n+1,2} & \hat{s}_{n+2,2} & \hat{s}_{n+3,2} & \dots & \hat{s}_{2n,2} \end{vmatrix} \ge 0, \tag{28}$$

$$n \in \mathbb{N},$$

$$\begin{aligned} s_{0,0} + s_{-1,1} + s_{-2,2} &\ge 0, \\ s_{0,0} + u^2 s_{-1,1} + u s_{-2,2} &\ge 0, \\ s_{0,0} + u s_{-1,1} + u^2 s_{-2,2} &\ge 0. \end{aligned} \tag{29}$$

Введем следующие обозначения:

$$\Gamma_{2,n,i} = \begin{pmatrix} \hat{s}_{2,i} & \hat{s}_{3,i} & \dots & \hat{s}_{n+1,i} \\ \hat{s}_{3,i} & \hat{s}_{4,i} & \dots & \hat{s}_{n+2,i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{s}_{n+1,i} & \hat{s}_{n+2,i} & \dots & \hat{s}_{2n,i} \end{pmatrix},$$

$A_{j,2,n,i}$ — матрица, получаемая из $\Gamma_{2,n,i}$ вычеркиванием 1-й строки и j-го столбца, $B_{l,n,i}$ — матрица, получаемая из прямоугольной матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & \hat{s}_{2,i} & \hat{s}_{3,i} & \dots & \hat{s}_{n+1,i} \\ \hat{s}_{2,i} & \hat{s}_{3,i} & \hat{s}_{4,i} & \dots & \hat{s}_{n+2,i} \\ \hat{s}_{3,i} & \hat{s}_{4,i} & \hat{s}_{5,i} & \dots & \hat{s}_{n+3,i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{s}_{n,i} & \hat{s}_{n+1,i} & \hat{s}_{n+2,i} & \dots & \hat{s}_{2n,i} \end{pmatrix}$$

вычеркиванием l-го столбца, $l = 1, 2, \dots, n+1$; $i = 0, 1, 2$; $n \in \mathbb{N}$.

Обозначим также

$$d_{j,n,i} = \det A_{j,2,n,i},\ c_{n,i} = \det \Gamma_{2,n,i},\ b_{l,n,i} = \det B_{l,n,i},$$

$$j = 1, 2, \dots, n;\ l = 1, 2, \dots, n+1;\ i = 0, 1, 2;\ n \in \mathbb{N}. \qquad (30)$$

Тогда условия (26)–(28) влекут следующие условия:

$$\frac{1}{3}(s_{0,0} + s_{-1,1} + s_{-2,2})c_{n,0} - \frac{1}{3}(s_{1,0} + s_{0,1} + s_{-1,2})(\frac{1}{3}(s_{1,0} + s_{0,1} + s_{-1,2})d_{1,n,0}$$

$$+b_{2,n,0}) + \sum_{i=2}^{n} \hat{s}_{i,0}(\frac{1}{3}(s_{1,0} + s_{0,1} + s_{-1,2})d_{i,n,0} + b_{i+1,n,0}) \geq 0, \qquad (31)$$

$$\frac{1}{3}(s_{0,0} + u^2 s_{-1,1} + u s_{-2,2})c_{n,1} - \frac{1}{3}(u^2 s_{1,0} + u s_{0,1} + s_{-1,2})(\frac{1}{3}(u^2 s_{1,0} + u s_{0,1} + s_{-1,2})$$

$$\times d_{1,n,1} + b_{2,n,1}) + \sum_{i=2}^{n} \hat{s}_{i,1}(\frac{1}{3}(u^2 s_{1,0} + u s_{0,1} + s_{-1,2})d_{i,n,1} + b_{i+1,n,1}) \geq 0, \qquad (32)$$

$$\frac{1}{3}(s_{0,0} + u s_{-1,1} + u^2 s_{-2,2})c_{n,2} - \frac{1}{3}(u s_{1,0} + u^2 s_{0,1} + s_{-1,2})(\frac{1}{3}(u s_{1,0} + u^2 s_{0,1} + s_{-1,2})$$

$$\times d_{1,n,2} + b_{2,n,2}) + \sum_{i=2}^{n} \hat{s}_{i,2}(\frac{1}{3}(u s_{1,0} + u^2 s_{0,1} + s_{-1,2})d_{i,n,2} + b_{i+1,n,2}) \geq 0,\ n \in \mathbb{N}. \qquad (33)$$

Из (25) следует, что

$$u^2 s_{-1,1} + u s_{-2,2} = -\mathrm{Re}\ s_{-1,1} + \sqrt{3}\mathrm{Im}\ s_{-1,1},$$

$$u s_{-1,1} + u^2 s_{-2,2} = -\mathrm{Re}\ s_{-1,1} - \sqrt{3}\mathrm{Im}\ s_{-1,1}. \qquad (34)$$

Чтобы не рассматривать главные миноры, отличные от угловых, будем считать теперь, что функция $\sigma(\lambda)$ имеет бесконечное число точек роста на каждой прямой в P_3. Тогда в (26)–(29), а значит, и в (31)–(33) имеет место строгое неравенство. Кроме того,

$$c_{n,i} > 0,\ d_{1,n,i} > 0,\ n \in \mathbb{N};\ i = 0, 1, 2;\ s_{0,0} = \int_{P_3} d\sigma(\lambda) > 0.$$

Разделив (31)–(33) на $\frac{1}{3}c_{n,i}$, $i = 0, 1, 2$, соответственно, и учитывая (34), записываем

$$s_{0,0} + 2\mathrm{Re}\ s_{-1,1} - \frac{1}{c_{n,0}}(s_{1,0} + s_{0,1} + s_{-1,2})(\frac{1}{3}(s_{1,0} + s_{0,1} + s_{-1,2})d_{1,n,0}$$

$$+b_{2,n,0}) + \frac{1}{c_{n,0}} \sum_{i=2}^{n} \hat{s}_{i,0}((s_{1,0} + s_{0,1} + s_{-1,2})d_{i,n,0} + 3b_{i+1,n,0}) > 0, \tag{35}$$

$$s_{0,0} - \text{Re } s_{-1,1} + \sqrt{3}\text{Im } s_{-1,1} - \frac{1}{c_{n,1}}(u^2 s_{1,0} + u s_{0,1} + s_{-1,2})(\frac{1}{3}(u^2 s_{1,0} + u s_{0,1}$$

$$+s_{-1,2})d_{1,n,1} + b_{2,n,1}) + \frac{1}{c_{n,1}} \sum_{i=2}^{n} \hat{s}_{i,1}((u^2 s_{1,0} + u s_{0,1} + s_{-1,2})d_{i,n,1} + 3b_{i+1,n,1}) > 0, \tag{36}$$

$$s_{0,0} - \text{Re } s_{-1,1} - \sqrt{3}\text{Im } s_{-1,1} - \frac{1}{c_{n,2}}(u s_{1,0} + u^2 s_{0,1} + s_{-1,2})(\frac{1}{3}(u s_{1,0} + u^2 s_{0,1}$$

$$+s_{-1,2})d_{1,n,2} + b_{2,n,2}) + \frac{1}{c_{n,2}} \sum_{i=2}^{n} \hat{s}_{i,2}((u s_{1,0} + u^2 s_{0,1} + s_{-1,2})d_{i,n,2} + 3b_{i+1,n,2}) > 0,$$

$$n \in \mathbb{N}. \tag{37}$$

Заметим, что "свободные члены"в (31)–(33), т.е. сумма слагаемых, не зависящих от $s_{-1,1}$, $s_{-2,2}$, $s_{-1,2}$, равны определителям в (26)–(28), если положить в них $s_{-1,1} = s_{-2,2} = s_{-1,2} = 0$, а значит, они вещественны. Таким образом, "свободные члены"в (35)–(37) тоже вещественны. Далее, перепишем (35)–(37) в следующем виде:

$$2\text{Re } s_{-1,1} - \frac{d_{1,n,0}}{c_{n,0}} s_{-1,2}^2 + e_0 s_{-1,2} + f_0 > 0, \tag{38}$$

$$-\text{Re } s_{-1,1} + \sqrt{3}\text{Im } s_{-1,1} - \frac{d_{1,n,1}}{c_{n,1}} s_{-1,2}^2 + e_1 s_{-1,2} + f_1 > 0, \tag{39}$$

$$-\text{Re } s_{-1,1} - \sqrt{3}\text{Im } s_{-1,1} - \frac{d_{1,n,2}}{c_{n,2}} s_{-1,2}^2 + e_2 s_{-1,2} + f_2 > 0,\ n \in \mathbb{N}, \tag{40}$$

где $f_i \in \mathbb{R}$ — "свободные члены", e_i — коэффициенты при $s_{-1,2}$ в (35)–(37), $i = 0, 1, 2$. Очевидно, что $e_i \in \mathbb{R}$, т.к. остальные величины в (38)–(40) вещественны. Складывая (38)–(40), получаем

$$-\left(\frac{d_{1,n,0}}{c_{n,0}} + \frac{d_{1,n,1}}{c_{n,1}} + \frac{d_{1,n,2}}{c_{n,2}}\right) s_{-1,2}^2 + (e_0 + e_1 + e_2)s_{-1,2} + (f_0 + f_1 + f_2) > 0,$$

$$n \in \mathbb{N}. \tag{41}$$

Для разрешимости (41) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось

$$\tilde{\Delta}_n := (e_0 + e_1 + e_2)^2 + 4\left(\frac{d_{1,n,0}}{c_{n,0}} + \frac{d_{1,n,1}}{c_{n,1}} + \frac{d_{1,n,2}}{c_{n,2}}\right)(f_0 + f_1 + f_2) > 0. \tag{42}$$

Если (42) выполнено, то $s_{-1,2}\in[A_{1,n},A_{2,n}]$, где

$$A_{1,n}=\frac{-(e_0+e_1+e_2)+\sqrt{\tilde{\Delta}_n}}{-\left(\frac{d_{1,n,0}}{c_{n,0}}+\frac{d_{1,n,1}}{c_{n,1}}+\frac{d_{1,n,2}}{c_{n,2}}\right)},\ A_{2,n}=\frac{-(e_0+e_1+e_2)-\sqrt{\tilde{\Delta}_n}}{-\left(\frac{d_{1,n,0}}{c_{n,0}}+\frac{d_{1,n,1}}{c_{n,1}}+\frac{d_{1,n,2}}{c_{n,2}}\right)}. \tag{43}$$

Введем следующие обозначения:

$$A_1:=\lim_{n\to\infty}\max(A_{1,1},A_{1,2},...,A_{1,n}),\ A_2:=\lim_{n\to\infty}\min(A_{2,1},A_{2,2},...,A_{2,n}). \tag{44}$$

Тогда, очевидно, в рассматриваемом нами случае разрешимости задачи (13) $[A_1,A_2]\neq\emptyset$.

Неравенства (39),(40) перепишем так:

$$\mathrm{Im}\ s_{-1,1}>\frac{1}{\sqrt3}\mathrm{Re}\ s_{-1,1}+\frac{d_{1,n,1}}{\sqrt3 c_{n,1}}s_{-1,2}^2-\frac{e_1}{\sqrt3}s_{-1,2}-\frac{f_1}{\sqrt3}, \tag{45}$$

$$\mathrm{Im}\ s_{-1,1}<-\frac{1}{\sqrt3}\mathrm{Re}\ s_{-1,1}-\frac{d_{1,n,2}}{\sqrt3 c_{n,2}}s_{-1,2}^2+\frac{e_2}{\sqrt3}s_{-1,2}+\frac{f_2}{\sqrt3}. \tag{46}$$

Отсюда

$$\frac{1}{\sqrt3}\mathrm{Re}\ s_{-1,1}+\frac{d_{1,n,1}}{\sqrt3 c_{n,1}}s_{-1,2}^2-\frac{e_1}{\sqrt3}s_{-1,2}-\frac{f_1}{\sqrt3}<-\frac{1}{\sqrt3}\mathrm{Re}\ s_{-1,1}$$

$$-\frac{d_{1,n,2}}{\sqrt3 c_{n,2}}s_{-1,2}^2+\frac{e_2}{\sqrt3}s_{-1,2}+\frac{f_2}{\sqrt3},$$

$$\mathrm{Re}\ s_{-1,1}<-\frac12\left(\frac{d_{1,n,1}}{c_{n,1}}+\frac{d_{1,n,2}}{c_{n,2}}\right)s_{-1,2}^2+\frac12(e_1+e_2)s_{-1,2}+\frac12(f_1+f_2). \tag{47}$$

Условие (38) записываем в виде

$$\mathrm{Re}\ s_{-1,1}>\frac{d_{1,n,0}}{2c_{n,0}}s_{-1,2}^2-\frac{e_0}{2}s_{-1,2}-\frac{f_0}{2}. \tag{48}$$

Из (47), (48) заключаем, что

$$\frac{d_{1,n,0}}{2c_{n,0}}s_{-1,2}^2-\frac{e_0}{2}s_{-1,2}-\frac{f_0}{2}<-\frac12\left(\frac{d_{1,n,1}}{c_{n,1}}+\frac{d_{1,n,2}}{c_{n,2}}\right)s_{-1,2}^2+\frac12(e_1+e_2)s_{-1,2}$$

$$+\frac12(f_1+f_2),$$

$$-\frac12\left(\frac{d_{1,n,0}}{c_{n,0}}+\frac{d_{1,n,1}}{c_{n,1}}+\frac{d_{1,n,2}}{c_{n,2}}\right)s_{-1,2}^2+\frac12(e_0+e_1+e_2)s_{-1,2}+\frac12(f_0+f_1+f_2)>0. \tag{49}$$

Итак, из разрешимости (38)–(40) следует разрешимость (41). И обратно, из разрешимости (41) следует разрешимость (49), разрешимость (47), (48), разрешимость (45)–(48), а значит, разрешимость системы (38)–(40). При этом

$$\mathrm{Re}\ s_{-1,1}\in\left[\frac{d_{1,n,0}}{2c_{n,0}}s_{-1,2}^2-\frac{e_0}{2}s_{-1,2}-\frac{f_0}{2},\ -\frac{1}{2}\left(\frac{d_{1,n,1}}{c_{n,1}}+\frac{d_{1,n,2}}{c_{n,2}}\right)s_{-1,2}^2\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}(e_1+e_2)s_{-1,2}+\frac{1}{2}(f_1+f_2)\right],$$
$$\mathrm{Im}\ s_{-1,1}\in\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{Re}\ s_{-1,1}+\frac{d_{1,n,1}}{\sqrt{3}c_{n,1}}s_{-1,2}^2-\frac{e_1}{\sqrt{3}}s_{-1,2}-\frac{f_1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right.$$
$$\left.\times\mathrm{Re}\ s_{-1,1}-\frac{d_{1,n,2}}{\sqrt{3}c_{n,2}}s_{-1,2}^2+\frac{e_2}{\sqrt{3}}s_{-1,2}+\frac{f_2}{\sqrt{3}}\right],$$
$$s_{-1,2}\in[A_{1,n},A_{2,n}] \tag{50}$$

является набором всех решений (38)–(40).

Условия (29), учитывая (25), (34), можно записать так:

$$s_{0,0}+2\mathrm{Re}\ s_{-1,1}>0, \tag{51}$$

$$s_{0,0}-\mathrm{Re}\ s_{-1,1}+\sqrt{3}\mathrm{Im}\ s_{-1,1}>0, \tag{52}$$

$$s_{0,0}-\mathrm{Re}\ s_{-1,1}-\sqrt{3}\mathrm{Im}\ s_{-1,1}>0. \tag{53}$$

Если $s_{0,0}>0$, тогда система разрешима и ее решение записывается в виде

$$-\frac{s_{0,0}}{2}<\mathrm{Re}\ s_{-1,1}<s_{0,0}, \tag{54}$$

$$\mathrm{Im}\ s_{-1,1}\in(-\frac{1}{\sqrt{3}}(s_{0,0}-\mathrm{Re}\ s_{-1,1}),\frac{1}{\sqrt{3}}(s_{0,0}-\mathrm{Re}\ s_{-1,1})). \tag{55}$$

Обозначим D_n пересечение в трехмерном вещественном пространстве (t,x,y) области

$$t\in[A_1,A_2],$$
$$x\in\left[\frac{d_{1,n,0}}{2c_{n,0}}t^2-\frac{e_0}{2}t-\frac{f_0}{2},\ -\frac{1}{2}\left(\frac{d_{1,n,1}}{c_{n,1}}+\frac{d_{1,n,2}}{c_{n,2}}\right)t^2+\frac{1}{2}(e_1+e_2)t+\frac{1}{2}(f_1+f_2)\right],$$
$$y\in\left[\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{d_{1,n,1}}{\sqrt{3}c_{n,1}}t^2-\frac{e_1}{\sqrt{3}}t-\frac{f_1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}}x-\frac{d_{1,n,2}}{\sqrt{3}c_{n,2}}t^2+\frac{e_2}{\sqrt{3}}t+\frac{f_2}{\sqrt{3}}\right]$$

и области

$$t\in\mathbb{R},\ x\in\left[-\frac{s_{0,0}}{2},s_{0,0}\right],\ |y|<\frac{1}{\sqrt{3}}(s_{0,0}-x).$$

Поскольку мы предполагали существование решения проблемы моментов (13), где $N = 3$, с бесконечным числом точек роста на каждой прямой в P_3, то множество D_n непустое.

Теорема 3. *Пусть задана проблема моментов (13) для $N = 3$ с некоторым набором комплексных чисел $\{s_{m,n}\}_{n,m=0}^{\infty}$. Для того чтобы проблема моментов имела решение с бесконечным числом точек роста на каждой прямой в P_3, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

1) $s_{m,3k} = s_{m+3k,0}$, $s_{m,3k+1} = s_{m+3k,1}$, $s_{m,3k+2} = s_{m+3k,2}$, $m, k \in \mathbb{Z}_+$;

2) $\hat{s}_{l,0}, \hat{s}_{l,1}, \hat{s}_{l,2} \in \mathbb{R}$, $l = 2, 3, 4, \ldots$, где $\hat{s}_{l,i}$ определяются через моменты $\{s_{m,n}\}_{n,m=0}^{\infty}$ по формуле

$$\begin{pmatrix} \hat{s}_{l,0} \\ \hat{s}_{l,1} \\ \hat{s}_{l,2} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & u^l & 0 \\ 0 & 0 & u^{2l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & u^2 & u \\ 1 & u & u^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{l,0} \\ s_{l-1,1} \\ s_{l-2,2} \end{pmatrix},$$

где $u = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $l = 2, 3, 4, \ldots$;

3) $s_{0,0} > 0$, $s_{1,0} = \overline{s_{0,1}}$, $c_{n,i} > 0$, $d_{1,n,i} > 0$, $i = 0, 1, 2$; $n \in \mathbb{N}$, где $c_{n,i}, d_{1,n,i}$ определены, как в (30);

4) $\tilde{\Delta}_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, где $\tilde{\Delta}_n$ из (42), и $A_1 \le A_2$, где A_1, A_2 определены, как в (44);

5) $D := \cap_{n=1}^{\infty} D_n \neq \emptyset$, где D_n определяется, как после формулы (55).

В том случае, когда условия 1)–5) выполнены, набор решений задачи (13) дают всевозможные решения разрешимых проблем моментов Гамбургера (20), нормированные условием $\tilde{\sigma}(0) = 0$, где $\hat{s}_{i,j}$, $i = 0, 1$, $j = 0, 1, 2$, из (24), и где $(s_{-1,2}, \mathrm{Re}\, s_{-1,1}, \mathrm{Im}\, s_{-1,1}) \in D$, $s_{-2,2} = \overline{s_{-1,1}}$.

Проблема моментов (13) будет определенной тогда и только тогда, когда D состоит из одной точки $a \in \mathbb{R}^3$ и проблемы моментов (20), где $\hat{s}_{i,j}$, $i = 0, 1$, $j = 0, 1, 2$, из (24), и где $(s_{-1,2}, \mathrm{Re}\, s_{-1,1}, \mathrm{Im}\, s_{-1,1}) = a$, $s_{-2,2} = \overline{s_{-1,1}}$, определены.

Доказательство. Пусть проблема моментов (13) ($N = 3$) имеет решение $\sigma(\lambda)$. Утверждения 1)–4) теоремы показаны при рассуждениях перед формулировкой теоремы. Определенные в этих рассуждениях числа $s_{-1,1}, s_{-2,2}, s_{-1,2}$ удовлетворяют системам (51)–(53) и (38)–(40) для всех $n \in \mathbb{N}$. Значит, точка $(s_{-1,2}, \mathrm{Re}\, s_{-1,1}, \mathrm{Im}\, s_{-1,1})$ принадлежит всем множествам D_n и D непусто.

Пусть условия 1)–5) выполнены. Полагаем $(s_{-1,2}, \mathrm{Re}\, s_{-1,1}, \mathrm{Im}\, s_{-1,1}) \in D$, $s_{-2,2} = \overline{s_{-1,1}}$ и определяем моменты $\hat{s}_{i,j}$, $i = 0, 1$, $j = 0, 1, 2$, из (24). В силу определения множества D, выполнены системы неравенств (51)–(53) и (38)–(40) для любого n. Отсюда следует выполнение (26)–(29) со строгими неравенствами. Кроме того, моменты $\hat{s}_{l,0}$, $\hat{s}_{l,1}$, $\hat{s}_{l,2}$, $l \in \mathbb{N}$, вещественны.

Это следует из условия 2) теоремы и (24), с учетом условия 3) и того, что $s_{-1,2} \in \mathbb{R}, s_{-2,2} = \overline{s_{-1,1}}$. Значит, согласно критерию разрешимости проблемы моментов Гамбургера для функций с бесконечным числом точек роста [7, теор. 2.1.1, с. 43] проблемы моментов Гамбургера (20) разрешимы и имеют решения с бесконечным числом точек роста. Эти решения дают решение (14) и, учитывая (15), дают решение (13). Если $\sigma_1(\lambda)$ — любое решение задачи (13), то, как было показано выше, ему соответствуют разрешимые задачи (20), где $\hat{s}_{l,k}$ из (19) и $(s_{-1,2}, \mathrm{Re}\, s_{-1,1}, \mathrm{Im}\, s_{-1,1}) \in D$, $s_{-2,2} = \overline{s_{-1,1}}$. Значит, это решение также будет построено указанным в теореме способом.

Утверждение об определенности очевидно. Теорема доказана.

Заметим, что после проверки условий 1)–4) теоремы 3 следует строить множества D_n, $n = 0, 1, 2, \dots$, и находить их пересечение. Это непростая, хотя и выполнимая, геометрическая процедура.

Рассмотрим теперь случай четного N. Введем обозначения: $V_k = \{x\varepsilon u^k,\ x \in \mathbb{R}\}$, $k = 0, 1, \dots, \hat{N} - 1$; $\hat{N} = \frac{N}{2}$, $u = \cos\frac{2\pi}{N} + i \sin\frac{2\pi}{N}$, $\varepsilon = \cos\frac{\pi}{N} + i\sin\frac{\pi}{N}$. Пусть задача (13) имеет решение $\sigma(\lambda)$. Тогда

$$\sum_{k=0}^{\hat{N}-1} \left(\int\limits_{\Phi_k} \lambda^m d\sigma(\lambda) + \int\limits_{V_k} \lambda^m d\sigma(\lambda) \right) = s_{m,0};$$

$$\sum_{k=0}^{\hat{N}-1} \left(\int\limits_{\Phi_k} \lambda^m \overline{\lambda} d\sigma(\lambda) + \int\limits_{V_k} \lambda^m \overline{\lambda} d\sigma(\lambda) \right) = s_{m,1};$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\sum_{k=0}^{\hat{N}-1} \left(\int\limits_{\Phi_k} \lambda^m \overline{\lambda}^{N-1} d\sigma(\lambda) + \int\limits_{V_k} \lambda^m \overline{\lambda}^{N-1} d\sigma(\lambda) \right) = s_{m,N-1},\ m \in \mathbb{Z}_+. \tag{56}$$

В интегралах по Φ_k сделаем замену $\lambda = xu^k$, а в интегралах по V_k — замену $\lambda = x\varepsilon u^k$:

$$\sum_{k=0}^{\hat{N}-1} \left(u^{km} \int\limits_{\mathbb{R}} x^m d\tilde{\sigma}(xu^k) + \varepsilon^m u^{km} \int\limits_{\mathbb{R}} x^m d\tilde{\sigma}(x\varepsilon u^k) \right) = s_{m,0};$$

$$\sum_{k=0}^{\hat{N}-1} \left(u^{km}\overline{u}^k \int\limits_{\mathbb{R}} x^{m+1} d\tilde{\sigma}(xu^k) + \varepsilon^m u^{km} \overline{\varepsilon u}^k \int\limits_{\mathbb{R}} x^{m+1} d\tilde{\sigma}(x\varepsilon u^k) \right) = s_{m,1};$$

$$\sum_{k=0}^{\hat{N}-1} \left(u^{km}\overline{u}^{2k} \int\limits_{\mathbb{R}} x^{m+2} d\tilde{\sigma}(xu^k) + \varepsilon^m u^{km} \overline{\varepsilon}^2 \overline{u}^{2k} \int\limits_{\mathbb{R}} x^{m+2} d\tilde{\sigma}(x\varepsilon u^k) \right) = s_{m,2};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{k=0}^{\hat{N}-1}\left(u^{km}\overline{u}^{(N-1)k}\int\limits_{\mathbb{R}} x^{m+N-1}d\tilde{\sigma}(xu^k)+\varepsilon^m u^{km}\overline{\varepsilon}^{N-1}\overline{u}^{(N-1)k}\int\limits_{\mathbb{R}} x^{m+N-1}\right.$$
$$\left.\times d\tilde{\sigma}(x\varepsilon u^k)\right)=s_{m,N-1},\ m\in\mathbb{Z}_+, \tag{57}$$

где $\tilde{\sigma}(xu^k)=\begin{cases}\sigma(xu^k), & x\geq 0\\ -\sigma(xu^k), & x<0\end{cases}$, $\tilde{\sigma}(x\varepsilon u^k)=\begin{cases}\sigma(x\varepsilon u^k), & x\geq 0\\ -\sigma(x\varepsilon u^k), & x<0\end{cases}$, $k=0,1,\ldots,N-1$.

Далее,

$$\sum_{k=0}^{\hat{N}-1}\left(u^{kl}\int\limits_{\mathbb{R}} x^l d\tilde{\sigma}(xu^k)+\varepsilon^l u^{kl}\int\limits_{\mathbb{R}} x^l d\tilde{\sigma}(x\varepsilon u^k)\right)=s_{l,0};$$

$$\sum_{k=0}^{\hat{N}-1}\left(u^{k(l-1)}\overline{u}^k\int\limits_{\mathbb{R}} x^l d\tilde{\sigma}(xu^k)+\varepsilon^{l-1} u^{k(l-1)}\overline{\varepsilon u}^k\int\limits_{\mathbb{R}} x^l d\tilde{\sigma}(x\varepsilon u^k)\right)=s_{l-1,1};$$

$$\sum_{k=0}^{\hat{N}-1}\left(u^{k(l-2)}\overline{u}^{2k}\int\limits_{\mathbb{R}} x^l d\tilde{\sigma}(xu^k)+\varepsilon^{l-2} u^{k(l-2)}\overline{\varepsilon}^2\overline{u}^{2k}\int\limits_{\mathbb{R}} x^l d\tilde{\sigma}(x\varepsilon u^k)\right)=s_{l-2,2};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{k=0}^{\hat{N}-1}\left(u^{k(l-N+1)}\overline{u}^{(N-1)k}\int\limits_{\mathbb{R}} x^l d\tilde{\sigma}(xu^k)+\varepsilon^{l-N+1} u^{k(l-N+1)}\overline{\varepsilon}^{N-1}\overline{u}^{(N-1)k}\int\limits_{\mathbb{R}} x^l\right.$$
$$\left.\times d\tilde{\sigma}(x\varepsilon u^k)\right)=s_{l-N+1,N-1},\ l\in\mathbb{Z}_+, \tag{58}$$

где равенства, содержащие $s_{m,n}$ с отрицательным индексом m, являются определениями для чисел $s_{m,n}$.

Система уравнений (58) является системой N линейных алгебраических уравнений относительно $\int_{\mathbb{R}} x^l d\tilde{\sigma}(xu^k)$, $k=0,1,\ldots,\hat{N}-1$; $\int_{\mathbb{R}} x^l d\tilde{\sigma}(x\varepsilon u^k)$, $k=0,1,\ldots,\hat{N}-1$. Матрица этой системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & u^l & \ldots & u^{(\hat{N}-1)l} & \varepsilon^l & (u\varepsilon)^l & \ldots & (u^{\hat{N}-1}\varepsilon)^l \\ 1 & u^{l-2} & \ldots & u^{(\hat{N}-1)(l-2)} & \varepsilon^{l-2} & (u\varepsilon)^{l-2} & \ldots & (u^{\hat{N}-1}\varepsilon)^{l-2} \\ 1 & u^{l-4} & \ldots & u^{(\hat{N}-1)(l-4)} & \varepsilon^{l-4} & (u\varepsilon)^{l-4} & \ldots & (u^{\hat{N}-1}\varepsilon)^{l-4} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & u^{l-2(N-1)} & \ldots & u^{(\hat{N}-1)(l-2(N-1))} & \varepsilon^{l-2(N-1)} & (u\varepsilon)^{l-2(N-1)} & \ldots & (u^{\hat{N}-1}\varepsilon)^{l-2(N-1)} \end{pmatrix}, \tag{59}$$

где мы учли, что $u\overline{u} = 1$. Определитель системы имеет вид

$$u^l u^{2l} \ldots u^{(\hat{N}-1)l} \varepsilon^l u^l \varepsilon^l \ldots u^{(\hat{N}-1)l} \varepsilon^l$$

$$\times \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & u^{-2} & \ldots & u^{-2(\hat{N}-1)} & \varepsilon^{-2} & (u\varepsilon)^{-2} & \ldots & (u^{\hat{N}-1}\varepsilon)^{-2} \\ 1 & u^{-4} & \ldots & u^{-4(\hat{N}-1)} & \varepsilon^{-4} & (u\varepsilon)^{-4} & \ldots & (u^{\hat{N}-1}\varepsilon)^{-4} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & u^{-2(N-1)} & \ldots & u^{-2(N-1)(\hat{N}-1)} & \varepsilon^{-2(N-1)} & (u\varepsilon)^{-2(N-1)} & \ldots & (u^{\hat{N}-1}\varepsilon)^{-2(N-1)} \end{vmatrix}. \tag{60}$$

Этот определитель не равен нулю, т.к. он является определителем Вандермонда для чисел u^{-k}, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, которые различны.

Обозначим

$$\begin{pmatrix} \tilde{s}_{l,0} \\ \tilde{s}_{l,1} \\ \vdots \\ \tilde{s}_{l,N-1} \end{pmatrix} = \tilde{D}_l^{-1} \begin{pmatrix} s_{l,0} \\ s_{l-1,1} \\ \vdots \\ s_{l-N+1,N-1} \end{pmatrix}, \ l \in \mathbb{Z}_+, \tag{61}$$

где $\tilde{D}_l$ — матрица из (59).

Тогда, как и в случае нечетного N, приходим к набору проблем моментов Гамбургера

$$\int_{\mathbb{R}} x^l d\tilde{\sigma}(x) = \tilde{s}_{l,0}, \ \int_{\mathbb{R}} x^l d\tilde{\sigma}(xu) = \tilde{s}_{l,1}, \ldots, \int_{\mathbb{R}} x^l d\tilde{\sigma}(xu^{\hat{N}-1}) = \tilde{s}_{l,\hat{N}-1},$$

$$\int_{\mathbb{R}} x^l d\tilde{\sigma}(x\varepsilon) = \tilde{s}_{l,\hat{N}}, \ \int_{\mathbb{R}} x^l d\tilde{\sigma}(xu\varepsilon) = \tilde{s}_{l,\hat{N}+1}, \ldots, \int_{\mathbb{R}} x^l d\tilde{\sigma}(xu^{\hat{N}-1}\varepsilon) = \tilde{s}_{l,N-1},$$

$$l \in \mathbb{Z}_+. \tag{62}$$

Теорема 4. *Пусть задана проблема моментов (13), где N — четно, с некоторым набором комплексных чисел $\{s_{m,n}\}_{n,m=0}^{\infty}$. Для того чтобы она имела решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось (15) и существовали числа $s_{-1,1}$; $s_{-2,2}$, $s_{-1,2}$; $\ldots$; $s_{-N+1,N-1}$, $s_{-N+2,N-1}, \ldots, s_{-1,N-1}$ $\in \mathbb{C}$ такие, что*

$$\tilde{s}_{l,0}, \tilde{s}_{l,1}, \ldots, \tilde{s}_{l,N-1} \in \mathbb{R}, \ l \in \mathbb{Z}_+, \tag{63}$$

и

$$(\tilde{s}_{n+m,k})_{n,m=0}^{M} \geq 0, \ M \in \mathbb{Z}_+; k = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{64}$$

здесь $\tilde{s}_{l,k}$ из (61) и $\tilde{D}_l$ — матрица из (59).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть проблема моментов имеет решение $\sigma(\lambda)$. В этом случае, как было показано выше, выполнено (62), и следовательно, согласно критерию разрешимости проблемы моментов Гамбургера ([5, с. 52]) выполнено (63), (64).

Наоборот, если выполнено (63), (64), то, согласно критерию разрешимости проблемы моментов Гамбургера, существует $\tilde{\sigma}(\lambda)$, $\lambda \in P_N$, такая, что выполняется (62), и значит, (56). Учитывая теперь соотношение (15), заключаем, что выполнено (13).

Теорема доказана.

Список литературы

[1] *Y. Kilpi*, Über das Komplexe Momentenproblem. — *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A* **236** (1957), 2–32.

[2] *J. Stochel and F.H. Szafraniec*, The complex moment problem and subnormality: A polar decomposition approach. — *J. Func. Ann.* **159** (1998), 432–491.

[3] *J. Stochel and F.H. Szafraniec*, Algebraic operators and moments on algebraic sets. — *Port. Math.* **51** (1994), fasc. 1, 25–45.

[4] *J. Stochel*, Moment functions on real algebraic sets. — *Ark. Mat.* **30** (1992), 133–148.

[5] *M.G. Krein*, The fundamental propositions of the theory of representations of Hermitian operators with deficiency index (m, m). — *Ukr. Mat. Zhurn.* (1949), No. 2, 3–66. (Russian)

[6] *F.R. Gantmacher*, The theory of matrices. AMS Chelsea Publ., Providence, RI, 1998.

[7] *N.I. Akhiezer*, The classical moment problem and some related questions in analysis. Hafner Publ. Co., New York, 1965.

[8] *N.I. Akhiezer and M.G. Krein*, On some questions of the moments theory. Nauchno-techn. Izdatelstvo Ukrainy, Kharkov, 1938. (Russian)

On the complex moment problem on radial rays

S.M. Zagorodnyuk

Department of Mechanics and Mathematics
V.N. Karazin Kharkov National University, 4 Svobody Sq., Kharkov, 61077, Ukraine

The complex moment problem in the case when the support of the measure lies on the algebraic curves $P_N = \{z \in \mathbb{C} : z^N - \overline{z}^N = 0\}$, $N = 1, 2, 3, \ldots$, is studied. For $N = 2, 3$ the necessary and sufficient conditions of solvability are obtained and all solutions of the problem are described. It is shown how this problem for arbitrary N is connected with the Hamburger moment problem with parameters.

Key words: complex moment problem, Hamburger moment problem.