

РАСПРОСТРАНЕНИЕ, ДИФРАКЦИЯ И РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

УДК 537.874.6

М. Е. КАЛИБЕРДА¹, Л. Н. ЛИТВИНЕНКО², С. А. ПОГАРСКИЙ¹

PACS number: 41.20.Jb

¹ Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина,
пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61022, Украина,
E-mail: KaliberdaME@yandex.ru

² Радиоастрономический институт НАН Украины,
ул. Мистецтв, 4, г. Харьков, 61002, Украина

ДИФРАКЦИЯ *E*-ПОЛЯРИЗОВАННОЙ ВОЛНЫ НА БЕСКОНЕЧНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЛЕНТОЧНОЙ РЕШЕТКЕ В ОТСУТСТВИЕ ОДНОЙ ЛЕНТЫ

Предмет и цель работы: Рассматривается задача о дифракции *E*-поляризованной электромагнитной волны на бесконечной периодической ленточной решетке с отсутствующей одной лентой.

Методы и методология: Полное поле ищется в виде суммы полей бесконечной периодической решетки и поля, возникающего за счет отсутствия одной ленты. Задача сводится к сингулярным интегральным уравнениям с дополнительными условиями.

Результаты: Представлены диаграммы направленности рассеянного поля и распределение поля в области над решеткой. Заключение: Предложен эффективный алгоритм исследования поля, вызванного отсутствием одной ленты.

Ключевые слова: бесконечная периодическая решетка, интегральное уравнение, дифракция

1. Введение

Ленточные дифракционные решетки находят применение в технике СВЧ и оптике. Исследованию бесконечных, полубесконечных и ограниченных решеток посвящено большое количество работ [1–10]. При этом определенный интерес представляют решетки с нарушением периодичности [11].

Рассмотрим бесконечную периодическую решетку, расположенную в плоскости $z = 0$, с отсутствующей одной лентой с номером 0. Ширина каждой ленты равна $2d$, период решетки равен l . Геометрия структуры представлена на рис. 1, *a*. Соответствующая бесконечная решетка без нарушения периодичности представлена на рис. 1, *б*. Лента с номером 0 располагается так, что ее центр совпадает с осью Ox . Структура однородна вдоль оси Ox .

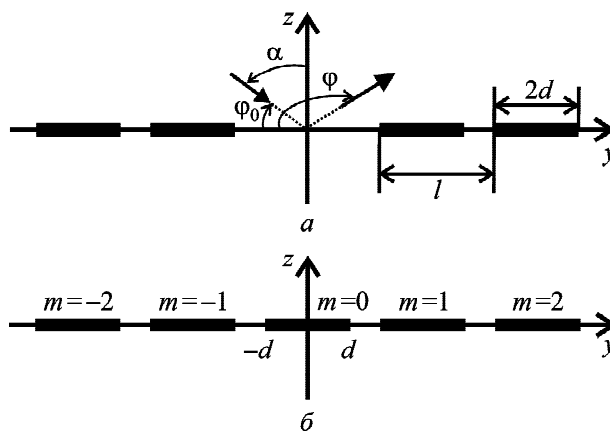


Рис. 1. Геометрия исследуемой структуры: *a* – бесконечная решетка без одной ленты, *б* – соответствующая ей периодическая решетка

При решении представим выражение для плотности тока на каждой ленте в виде суперпозиции двух функций. Первая функция – плотность тока соответствующей бесконечной периодической решетки. Вторая – ток, возникающий за счет от-

сутствия одной ленты. Полное рассеянное поле запишем в виде суммы полей токов каждой ленты при помощи функций Ханкеля. С использованием интегрального представления функции Ханкеля поле, возникающее за счет отсутствия одной ленты, выразим через неизвестную спектральную функцию. Из граничных условий для уравнений Максвелла нетрудно получить парные интегральные уравнения относительно неизвестной спектральной функции. В правой части уравнений стоит слагаемое, зависящее от поля, рассеянного бесконечной периодической решеткой. Это поле найдено из парных сумматорных уравнений относительно амплитуд Фурье плотности тока на каждой ленте бесконечной периодической решетки.

Парные сумматорные уравнения и парные интегральные уравнения сведены к сингулярным интегральным уравнениям с дополнительными условиями, численное решение которых получено методом дискретных особенностей.

Будем предполагать, что на решетку падает плоская E -поляризованная электромагнитная волна из области $z > 0$ под углом φ_0 к оси Oy :

$$E_x^i(y, z) = \exp(ik(\zeta_0 y - \gamma_0 z)), \quad (1)$$

где $\zeta_n = \frac{2\pi n}{kl} + \sin \alpha$, $\gamma_n = \sqrt{1 - \left(\frac{2\pi n}{kl} + \sin \alpha\right)^2}$,
 $n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$, $\operatorname{Re} \gamma_n \geq 0$, $\operatorname{Im} \gamma_n \geq 0$,
 $\alpha = \pi/2 - \varphi_0$, k – волновое число. Зависимость полей от времени примем в виде $\exp(-i\omega t)$, ω – круговая частота.

2. Бесконечная периодическая решетка

Рассмотрим бесконечную периодическую решетку (рис. 1, б), на которую падает плоская волна (1). Отраженное и прошедшее поля в областях $z > 0$, $z < 0$ представим в виде рядов Фурье с неизвестными амплитудами:

$$E_x^{r,\infty}(y, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(ik(\zeta_n y + \gamma_n z)), \quad z > 0,$$

$$E_x^{t,\infty}(y, z) = E_x^i(y, z) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(ik(\zeta_n y - \gamma_n z)),$$

$z < 0$.

Обозначим $b_n = a_n \exp(i\pi n)$ при $n \neq 0$ и $b_0 = a_0 + 1$. Появление множителя $\exp(i\pi n)$ связано с

введением локальной системы координат, начало которой совпадает с центром щели. Амплитуды b_n могут быть найдены из парных сумматорных уравнений, записанных для одного периода $|y'| < l/2$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \exp\left(i \frac{2\pi n}{l} y'\right) = 0, \quad |y'| \geq l/2 - d \quad (\text{на ленте}), \quad (2)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \gamma_n \exp\left(i \frac{2\pi n}{l} y'\right) = \gamma_0, \quad |y'| < l/2 - d \quad (\text{на щели}), \quad (3)$$

где y' – локальная координата, связанная с центром щели, $y' = y - l/2$.

Следуя идеям работы [10], сведем парные сумматорные уравнения к сингулярному интегральному уравнению с дополнительными условиями. Введем безразмерные величины $\kappa = kl/(2\pi)$, $\delta = 2\pi(l/2 - d)/l$, $\xi = 2\pi y'/l$ и функции

$$U(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \exp(in\xi),$$

$$F(\xi) = U'(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} in b_n \exp(in\xi). \quad (4)$$

Из уравнения (2) следует, что $U(\xi) = 0$, $|\xi| \geq \delta$ и

$$F(\xi) = 0, \quad |\xi| \geq \delta. \quad (5)$$

Амплитуды a_n выражаются через функцию $F(\xi)$ при помощи преобразования Фурье с учетом (5) следующим образом:

$$b_n = \frac{1}{2\pi in} \int_{-\delta}^{\delta} F(\xi) \exp(-in\xi) d\xi, \quad n \neq 0, \quad (6)$$

$$b_0 = -\frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\xi}{2} F(\xi) d\xi. \quad (7)$$

Введем оператор Гильберта, действующий на произвольную функцию $G(\xi)$ по формуле

$$(P_{2\pi} G)(\psi) = \frac{1}{2\pi} \text{v.p.} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ctg} \frac{\xi - \psi}{2} G(\xi) d\xi, \quad (8)$$

причем $(P_{2\pi} \exp(in\xi))(\psi) = i \operatorname{sgn}(n) \exp(in\psi)$. Обозначение *v.p.* означает, что интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Представим уравнение (3) в следующем виде:

$$b_0 \gamma_0 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} i \frac{|n|}{\kappa} b_n \exp(in\xi) - \\ - \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \left(i \frac{|n|}{\kappa} - \gamma_n \right) b_n \exp(in\xi) = \gamma_0, \quad |\xi| < \delta. \quad (9)$$

Применяя ко второму слагаемому в (9) оператор Гильберта (8) и выражение (4), а к первому и третьему слагаемому – выражения (6), (7), с учетом (5) получаем сингулярное интегральное уравнение

$$\frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{F(\xi)}{\xi - \psi} d\xi + \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} K(\psi, \xi) F(\xi) d\xi = i\kappa\gamma_0, \quad |\psi| < \delta. \quad (10)$$

Ядро $K(\psi, \xi)$ имеет вид

$$K(\psi, \xi) = -\frac{\kappa}{2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{i|n|}{\kappa} - \gamma_n \right) \frac{\exp(in(\psi - \xi))}{n} + \\ + i\gamma_0 \kappa \frac{\psi - \xi}{2} + \left(\frac{1}{\psi - \xi} - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \left(\frac{\psi - \xi}{2} \right) \right).$$

Из уравнения (2) следует дополнительное условие

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} F(\xi) d\xi = 0.$$

Скорость сходимости ряда в выражении для ядра $K(\psi, \xi)$ можно увеличить по методу Крылова, используя асимптотику γ_n при $n \rightarrow \infty$.

Заметим, что уравнение (3) получено с учетом того, что плотность токов вне лент равна нулю, а уравнение (10) есть прямое следствие уравнения (3). Тогда принимая во внимание, что

$$H_y = \frac{1}{i\omega\mu_0} \frac{\partial E_x}{\partial z},$$

получим

$$H_y^{r,\infty}(y, 0) = \frac{\exp(iky \sin \alpha)}{i\kappa Z} \times \\ \times \left(\frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{F(\xi)}{\xi - \psi} d\xi + \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} K(\psi, \xi) F(\xi) d\xi - i\kappa\gamma_0 \right),$$

где μ_0 – магнитная проницаемость вакуума, Z – волновое сопротивление вакуума, $\psi = 2\pi y'/l$.

3. Бесконечная периодическая решетка с отсутствующей одной лентой

Рассмотрим бесконечную периодическую решетку с отсутствующей лентой с номером 0 (см. рис. 1, а).

Представим отраженное решеткой поле в области $z > 0$ в виде суммы полей токов, текущих по каждой ленте, а поле каждой ленты в отдельности представим в виде суммы полей $E_x^{r,\infty,0}(y, z)$ и $E_x^{r,c}(y, z)$, индуцированных соответственно током бесконечной периодической решетки, за исключением тока ленты с номером 0, и током, возникающим за счет отсутствия одной ленты:

$$E_x^r(y, z) = E_x^{r,\infty,0}(y, z) + E_x^{r,c}(y, z). \quad (11)$$

Поля $E_x^{r,\infty,0}(y, z)$ и $E_x^{r,c}(y, z)$ представим в виде потенциалов простого слоя с некоторой плотностью:

$$E_x^{r,\infty,0}(y, z) = \frac{i\omega\mu_0}{4} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \int_{-d}^d J_m(y' + lm) H_0^{(1)} \times \\ \times \left(k\sqrt{(y - y' - lm)^2 + z^2} \right) dy', \\ E_x^{r,c}(y, z) = \frac{i\omega\mu_0}{4} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \int_{-d}^d J_m(y' + lm) H_0^{(1)} \times \\ \times \left(k\sqrt{(y - y' - lm)^2 + z^2} \right) dy'. \quad (12)$$

Здесь $J_m^\infty(y' + lm)$, $J_m(y' + lm)$ представляют собой с точностью до константы плотности поверхностного тока для бесконечной периодической решетки и тока, возникшего за счет отсутствия одной ленты, текущих по ленте с номером m ; $H_0^{(1)}(x)$ – функция Ханкеля первого рода. Суммирование производится по всем лентам, $m = -\infty, \dots, \infty$, за исключением отсутствующей

ленты с номером 0, $m \neq 0$. Функция $J_m^\infty(y)$ выражается через поле $H_y^{r,\infty}(y, 0)$ по формуле

$$J_m^\infty(y) = \begin{cases} \frac{2}{i} H_y^{r,\infty}(y, 0), & |\hat{y}_m| \leq d, \\ 0, & |\hat{y}_m| > d, \end{cases}$$

где $\hat{y}_m = y - ml$, $m = \pm 1, \pm 2, \dots$ – локальная координата, связанная с центром m -й ленты.

Представим плотность поверхностного тока на лентах $J_m(y)$ при помощи интеграла Фурье:

$$\frac{2k}{i\omega\mu_0} \int_{-\infty}^{\infty} c_m(\xi)\gamma(\xi)\exp(ik\xi y)d\xi = \begin{cases} J_m(y), & |\hat{y}_m| \leq d, \\ 0, & |\hat{y}_m| > d. \end{cases}$$

Функции $c_m(\xi)$, $m \neq 0$, подлежат определению. Введем спектральную функцию рассеянного поля по формуле

$$c(\xi) = \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} c_m(\xi).$$

Тогда, используя интегральное представление функции Ханкеля, поле (12) можно записать в виде

$$E_x^{r,c}(y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\xi)\exp(ik(\xi y + \gamma(\xi)z))d\xi, \quad z > 0,$$

где $\gamma(\xi) = \sqrt{1 - \xi^2}$, $\text{Re } \gamma \geq 0$, $\text{Im } \gamma \geq 0$.

Обозначим следы лент на плоскости yOz как $L = \bigcup_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} (-d + lm; d + lm)$. Для определения функции $c(\xi)$ могут быть получены следующие парные интегральные уравнения:

$$\int_{-\infty}^{\infty} c(\xi)\gamma(\xi)\exp(ik\xi y)d\xi = 0, \quad y \notin L, \quad (13)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} c(\xi)\exp(ik\xi y)d\xi = -\left(E_x^i(y, 0) + E_x^{r,\infty,0}(y, 0)\right) = g(y), \quad y \in L. \quad (14)$$

Уравнение (13) следует из условия, что вне лент плотность поверхностных токов равна нулю. Уравнение (14) представляет собой условие того, что

касательная компонента электрического поля на металле обращается в ноль.

Преобразуем правую часть уравнения (14). Представим поле $E_x^{r,\infty,0}(y, 0)$ в виде разности полей токов, текущих по лентам бесконечной периодической решетки и по ленте с номером 0:

$$E_x^{r,\infty,0}(y, z) = E_x^{r,\infty}(y, z) - E_x^{r,0}(y, z), \quad (15)$$

$$E_x^{r,0}(y, z) = \frac{i\omega\mu_0}{4} \times \int_{-d}^d \frac{2}{i} H_y^{r,\infty}(y', 0) H_0^{(1)}\left(k\sqrt{(y-y'-lm)^2 + z^2}\right) dy'.$$

Умножим равенство (3) слева и справа на $\exp(-iky\sin\alpha)$. Тогда справа будет стоять $-E_x^i(y, 0)$, а слева $-E_x^{r,\infty}(y, 0)$. Так как равенство (3) выполняется для всех $y \in L$, то $E_x^{r,\infty}(y, 0) = -E_x^i(y, 0)$, $y \in L$. Учитывая (15), окончательно получаем

$$g(y) = \frac{\omega\mu_0}{2} \times \int_{-d}^d H_y^{r,\infty}(y', 0) H_0^{(1)}\left(k\sqrt{(y-y')^2}\right) dy'.$$

Заметим, что так как в (14) $|y| > d$, подынтегральная функция не содержит особенностей на отрезке интегрирования.

При удалении от места, где отсутствует лента, токи на проводниках стремятся к токам для бесконечной периодической решетки. При достаточно больших значениях y функция $g(y)$ асимптотически представляет цилиндрическую волну, амплитуда которой убывает при $y \rightarrow \infty$. Поле токов, наведенных на лентах решетки полем $g(y)$, также будет асимптотически представлять цилиндрические волны, амплитуда которых убывает при $y \rightarrow \infty$. Таким образом, $E_x^{r,c}(y, 0) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \infty$. Тогда при решении парных интегральных уравнений (13), (14) возможно будет заменить множество L ограниченным множеством $L_N = \bigcup_{\substack{m=-N \\ m \neq 0}}^N (-d + lm; d + lm)$, $2N$ – число лент.

Для сведения парных интегральных уравнений (13), (14) к сингулярному интегральному уравне-

нию с дополнительными условиями сделаем замену $u(\xi) = \gamma(\xi)c(\xi)$ и введем функцию [9]

$$F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi) \exp(iky\xi) d\xi. \quad (16)$$

Из уравнения (13) следует, что $F(y) = 0$ при $y \notin L$. Тогда

$$u(\xi) = \frac{k}{2\pi} \int_L F(y) \exp(-iky\xi) dy. \quad (17)$$

Введем оператор Гильберта на всей оси, действующий на произвольную функцию $G(\xi)$ по формуле

$$(P_{\infty} G)(y) = \frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(\xi)}{\xi - y} d\xi, \quad (18)$$

причем $(P_{\infty} \exp(ik\xi\zeta))(y) = i \operatorname{sgn}(nk) \exp(ik\zeta y)$.

Продифференцируем уравнение (14) по y и представим его в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\xi k|}{\xi k} u(\xi) \exp(iky\xi) d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi) \exp(iky\xi) i \frac{|\xi|}{\xi} \left(\frac{|\xi|}{\gamma(\xi)} + i \right) d\xi = \frac{1}{k} g'(y), \quad y \in L.$$

Применим к первому слагаемому оператор Гильберта (18) и выражение (16), а ко второму – выражение (17), получим сингулярное интегральное уравнение вида (10):

$$\frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_L \frac{F(\xi)}{\xi - y} d\xi + \frac{1}{\pi} \int_L K(y, \xi) F(\xi) d\xi = \frac{i}{k} g'(y), \quad y \in L. \quad (19)$$

Подставим в уравнение (14) выражение (17). Учитывая то, что $F(y) = 0$ при $y \notin L$, получим дополнительные условия:

$$\frac{1}{\pi} \int_L F(\xi) Q(y_m, \xi) d\xi = g(y_m), \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (20)$$

где y_m – произвольная точка интервала $(-d + lm; d + lm)$.

Ядра уравнения имеют вид:

$$K(y, \xi) = k \int_0^{\infty} \frac{\sin(k\zeta(y - \xi))}{\zeta} (\zeta + i\gamma(\zeta)) d\zeta,$$

$$Q(y, \xi) = k \int_0^{\infty} \frac{\cos(k\zeta(y - \xi))}{\gamma(\zeta)} d\zeta.$$

Скорость сходимости ядер $K(y, \xi)$ и $Q(y, \xi)$ можно увеличить по методу Крылова, используя известное представление интегралов $\int_0^{\infty} \frac{\sin \zeta}{\zeta^n} d\zeta$ и $\int_0^{\infty} \frac{\cos \zeta}{\zeta^n} d\zeta$ в виде рядов [12].

Для численного решения уравнений (19), (20) применялся метод дискретных особенностей [8], [9]. При применении метода для дискретизации уравнений используются квадратурные формулы. В качестве узлов выбираются нули полинома Чебышева первого рода в количестве M на каждой ленте. Значения переменной y выбирается из множества нулей полиномов Чебышева второго рода в количестве $M - 1$ на каждой ленте. В результате сингулярное интегральное уравнение с дополнительными условиями (19), (20) заменяется системой линейных алгебраических уравнений относительно значений функции $F(\xi)$ в узлах.

4. Поле в дальней зоне

Представим выражение (11) с учетом (15) в виде

$$E_x^r(y, z) = E_x^{r,\infty}(y, z) + E_x^{r,c}(y, z) - E_x^{r,0}(y, z).$$

Первое слагаемое представляет собой множество плоских волн и не убывает при $k\rho \rightarrow \infty$, $\rho = \sqrt{y^2 + z^2}$. Слагаемые $E_x^{r,c}(y, z)$ и $E_x^{r,0}(y, z)$, используя представление для типичного дифракционного интеграла [13] при $k\rho \rightarrow \infty$, можно записать в виде:

$$E_x^{r,c}(y, z) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{k\rho}} d(\varphi) \exp(i(k\rho - \pi/4)),$$

$$E_x^{r,0}(y, z) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{k\rho}} d_0(\varphi) \exp(i(k\rho - \pi/4)),$$

$$d(\varphi) = u(\cos(\varphi)),$$

$$d_0(\varphi) = \frac{Z}{2\pi} \int_{-d}^d H_y^{r,\infty}(y', 0) \exp(ik \cos(\varphi) y') dy',$$

$$\varphi \in (0; \pi),$$

ρ и φ – координаты полярной системы координат. Функция $d(\varphi)$ представляет собой диаграмму направленности поля, возникшего за счет отсутствия одной ленты.

5. Численные результаты

Заменим в уравнениях (19), (20) множество L ограниченным множеством $L_N = \bigcup_{\substack{m=-N \\ m \neq 0}}^N (-d + lm; d + lm)$,

$2N$ – число лент. Исследуем сходимость процесса при увеличении числа N . На рис. 2 представлены диаграммы направленности $d(\varphi)$ при различном числе лент N , $kl = \pi$, $kd = \pi/4$. Графики нормируются на максимум, который достигается при

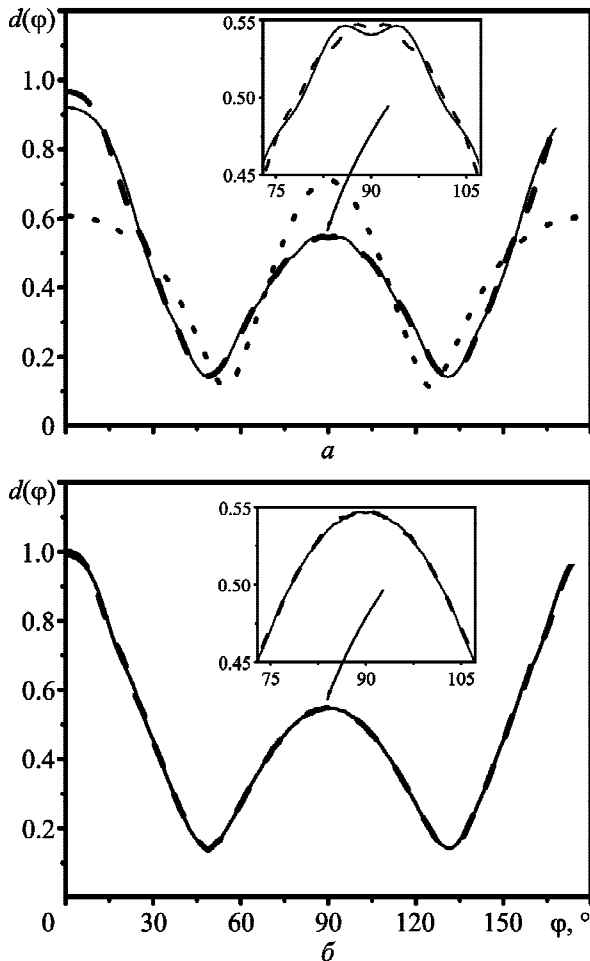


Рис. 2. Зависимости нормированной функции $d(\varphi)$ при различном числе лент N , $kd = \pi/4$, $kl = \pi$, $\varphi_0 = 90^\circ$: а – $N = 1$ (пунктирная кривая), $N = 10$ (сплошная кривая), $N = 20$ (штриховая кривая); б – $N = 30$ (сплошная кривая), $N = 40$ (штриховая кривая)

$N = 40$ в плоскости решетки, $\varphi = 0^\circ$. Для каждой ленты выбиралось $M = 3$ узла в квадратурной формуле, при вычислении функции $g(y)$ использовалось 150 узлов. Кривые имеют ломаный характер, с увеличением N стремятся к гладкой линии. Отличия между кривыми наблюдаются в максимумах лепестков. Кривые для $N = 30$ и $N = 40$ совпадают с графической точностью.

Заметим, что выражение (14) описывает возбуждение токов на всех лентах решетки полем тока, текущим по одиночной отброшенной ленте с номером 0, а также взаимодействие лент решетки между собой, возникающее за счет отсутствия одиночной ленты. Таким образом, функция $H_x^{r,c}(y, z)$ описывает взаимодействие между собой двух решеток, расположенных в областях $y < 0$ и $y > 0$, возникающее под действием поля отброшенной нулевой ленты.

На рис. 3 приведены нормированные диаграммы направленности $d(\varphi)$ для двух различных значений ширины ленты и периода решетки при ортогональном падении волны, $\varphi_0 = 0^\circ$. Нормировка осуществляется на максимум при $kl = \pi$, $kd = \pi/4$. При одинаковом значении периода увеличение ширины ленты приводит к увеличению максимумов лепестков диаграммы направленности. Для всех кривых на рис. 3 абсолютные значения функции $E_x^{r,0}(y, z)$ превосходят значения функции $E_x^{r,c}(y, z)$. Для случая $kl = \pi$, $kd = \pi/4$ выполняется соотношение $\max |E_x^{r,0}| / \max |E_x^{r,c}| \approx 1.5$. Рис. 3, б построен для соотношения периода и длины волны, близкого к резонансному, $l = \lambda$. Взаимодействие решеток, расположенных в областях $y < 0$ и $y > 0$, значительно более сильное, чем для случая, представленного на рис. 3, а, $\max |E_x^{r,0}| / \max |E_x^{r,c}| \approx 10$. Коэффициент отражения бесконечной периодической решетки при таком значении периода также мал [1]. Как и у конечных периодических решеток, увеличение периода приводит к появлению дополнительных лепестков. Это связано с возбуждением высших гармоник в периодической части структуры.

При приближении к краям лент плотность тока имеет корневую особенность. Введем функции $u_c(y)$, $u_p(y)$ и $u(y)$ на каждой ленте:

$$u_c(y) = Z \sqrt{(y - (-d + lm))(d + lm - y)} H_y^{r,c}(y, 0),$$

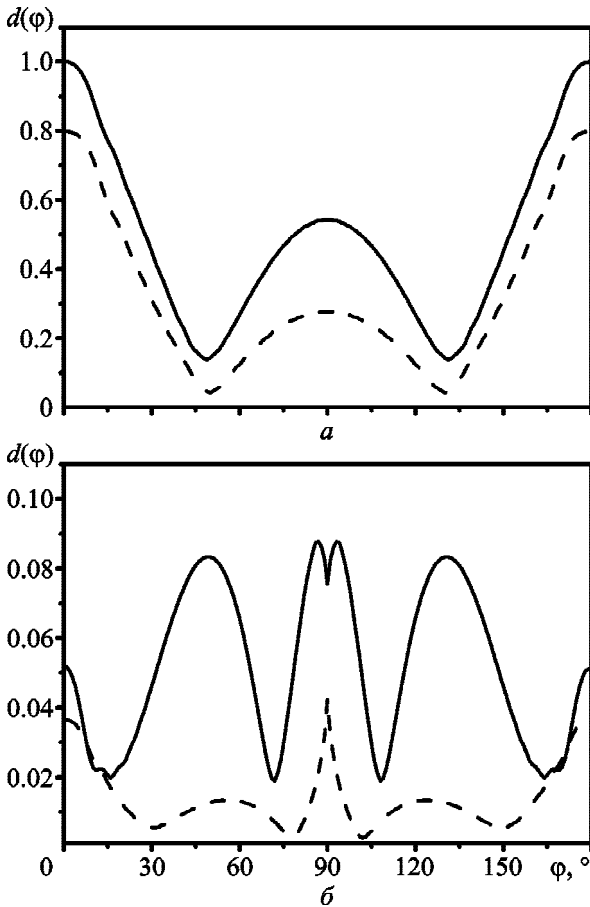


Рис. 3. Зависимости нормированной функции $d(\varphi)$ при $\varphi_0 = 90^\circ$: а – $kl = \pi$, $kd = \pi/4$ (сплошная кривая), $kl = \pi$, $kd = \pi/8$ (штриховая кривая); б – $kl = 2\pi$, $kd = \pi/2$ (сплошная кривая), $kl = 2\pi$, $kd = \pi/4$ (штриховая кривая)

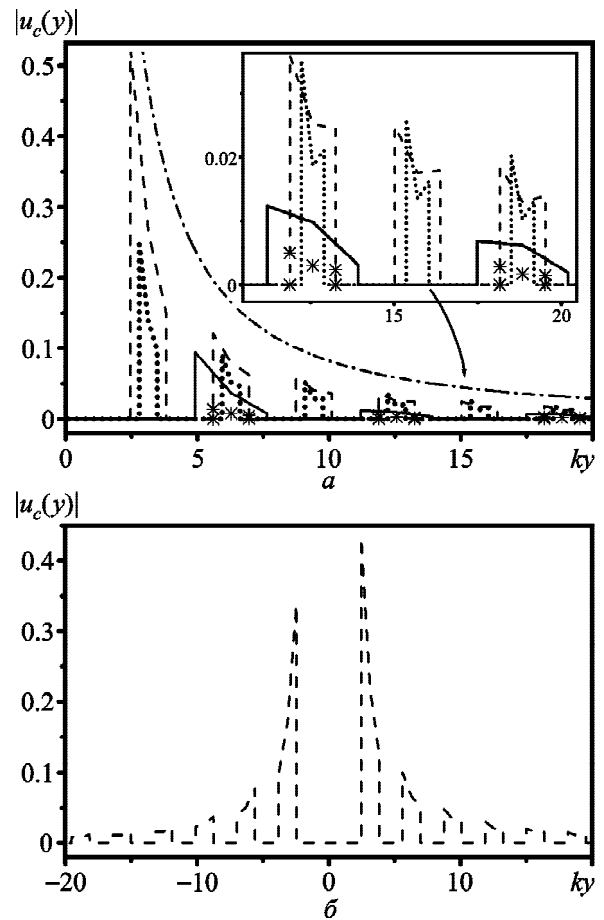


Рис. 4. Зависимости функции $|u_c(y)|$ при $kl = 2\pi$, $kd = \pi/2$ (сплошная кривая), $kl = 2\pi$, $kd = \pi/4$ (маркеры – звездочки), $kl = \pi$, $kd = \pi/4$ (штриховая кривая), $kl = \pi$, $kd = \pi/8$ (пунктирная кривая), а также функция $C \cdot (ky)^{-3/2}$ (штрихпунктирная кривая): а – $\varphi_0 = 90^\circ$; б – $\varphi_0 = 45^\circ$

$$u_p(y) = Z \sqrt{(y - (-d + lm))((d + lm) - y)} H_y^{r,\infty}(y, 0),$$

$$u(y) = Z \sqrt{(y - (-d + lm))((d + lm) - y)} H_y^r(y, 0),$$

где $y \in (-d + lm; d + lm)$, $m = \pm 1, \pm 2, \dots$

На рис. 4 представлена зависимость функции $|u_c(y)|$ для различных значений периода, ширины лент и углов падения. На рис. 5 приведено распределение плотности тока на лентах $|u_p(y)|$ и $|u(y)|$ для $kl = \pi$, $kd = \pi/4$ в середине лент при $y = ml$. Функция $H_y^{r,c}(y, 0)$ равна плотности тока, возникшего за счет отсутствия одной ленты, функция $H_y^{r,\infty}(y, 0)$ равна плотности тока на лентах бесконечной периодической решетки, а функция $H_y^r(y, 0)$ равна полной плотности тока на лентах решетки. Отметим, что в отличие от функции $d(\varphi)$ разность между значения-

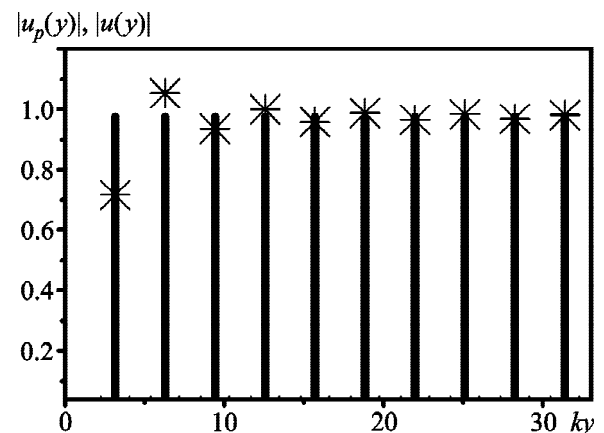


Рис. 5. Значения функций $|u_p(y)|$ (сплошная кривая) и $|u(y)|$ (маркеры – звездочки) в центрах лент при $y = ml$, $kl = \pi$, $kd = \pi/4$, $\varphi_0 = 90^\circ$

ми $|u_c(y)|$, вычисленными при разных $N \geq 10$, не превосходит 0.1 %. Как и предполагалось, функция $H_y^{r,c}(y, 0)$ стремится к нулю при удалении от места, где отсутствует лента, причем $H_y^{r,c}(y, 0) \sim O((ky)^{-3/2})$ при $ky \rightarrow \infty$. Для сравнения на рис. 4 представлена кривая $C \cdot (ky)^{-3/2}$, где C – константа. При нормальном падении, $\varphi_0 = 90^\circ$, графики функций $|u_c(y)|$, $|u_p(y)|$ и $|u(y)|$, очевидно, симметричны относительно вертикальной оси. При падении под углом $\varphi_0 = 45^\circ$ амплитуда токов $|u_c(y)|$ на лентах в области $y > 0$ несколько превосходит амплитуду токов на соответствующих лентах в области $y < 0$.

Распределение поля в области над решеткой, компонента $\text{Re}(E_x^{r,c}(y, z))$, для случая $kl = \pi$, $kd = \pi/4$ и нормального падения $\varphi_0 = 90^\circ$ представлено на рис. 6.

6. Выводы

В работе построено строгое решение задачи дифракции E -поляризованной волны на бесконечной периодической решетке без одной ленты. Токи на лентах представляются в виде суммы токов бесконечной периодической решетки и тока, вызванного отсутствием одной ленты. Определено рассеянное поле, которое индуцируется данными токами. Проведено численное исследование поля, возникающего из-за отсутствия одной ленты. Предложенный подход может быть использован при исследовании эффектов, обусловленных нарушением периодичности в периодических структурах.

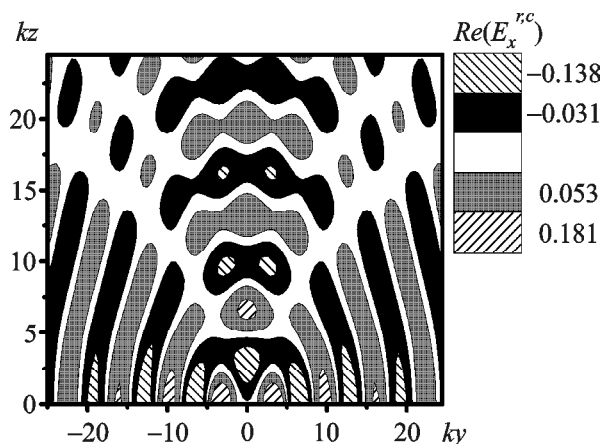


Рис. 6. Распределение отраженного поля $\text{Re}(E_x^{r,c}(y, z))$ при $kl = \pi$, $kd = \pi/4$, $\varphi_0 = 90^\circ$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шестопалов В. П. Метод задачи Римана-Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн. – Харьков: издательство Харьковского университета, 1971. – 400 с.
2. Шестопалов В. П., Литвиненко Л. Н., Масалов С. А., Сологуб В. Г. Дифракция волн на решетках. – Харьков: издательство Харьковского университета, 1973. – 287 с.
3. Сологуб В. Г. Об одном методе исследования задачи дифракции на конечном числе лент, расположенных в одной плоскости // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1975. – № 6. – С. 549–552.
4. Lytvynenko L. M. and Prosvirnin S. L. Wave Diffraction by Periodic Multilayer Structures. – Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2012. – 158 p.
5. Lytvynenko L. M., Kaliberda M. E., and Pogarsky S. A. Wave Diffraction by Semi-Infinite Venetian Blind Type Grating // IEEE Trans. Antennas Propag. – 2013. – Vol. 61, No. 12. – P. 6120–6127. DOI: 10.1109/TAP.2013.2281510
6. Калиберда М. Е., Литвиненко Л. Н., Погарский С. А. Дифракция H -поляризованной электромагнитной волны на многоэлементной плоской полубесконечной решетке // Радиопизика и радиоастрономия. – 2014. – Т. 19, № 4. – С. 348–357.
7. Nepa P., Manara G., and Armogida A. EM scattering from the edge of a semi-infinite planar strip grating using approximate boundary conditions // IEEE Trans. Antennas Propag. – 2005. – Vol. 53, No. 1. – P. 82–90. DOI: 10.1109/TAP.2004.840523
8. Гандель Ю. В. Метод дискретных особенностей в задачах электродинамики // Вопросы кибернетики. – 1986. – Вып. 124. – С. 166–183.
9. Gandel Yu. V. Boundary-value problems for the Helmholtz equation and their discrete mathematical models // J. Math. Sci. – 2010. – Vol. 171, No. 1. – P. 74–88. DOI: 10.1007/s10958-010-0127-3
10. Zaginaylov G. I., Gandel Y. V., Kamyshan O. P., Kamyshan V. V., Hirata A., Thumvongskul T., and Shiozawa T. Full-wave analysis of the field distribution of natural modes in the rectangular waveguide grating based on singular integral equation method // IEEE Trans. Plasma Sci. – 2002. – Vol. 30, No. 3. – P. 1151–1159. DOI: 10.1109/TPS.2002.801613
11. Замятин Е. В., Провирнин С. Л. Дифракция электромагнитных волн на решетке с малыми случайными флуктуациями размеров // Радиотехника и электроника. – 1985. – Т. 30, № 11. – С. 2124–2131.
12. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган; перевод с англ. под ред. В. А. Диткина, Л. Н. Кармазиной. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
13. Felsen L. B. and Marcuvits N. Radiation and Scattering of Waves. – Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1973.

REFERENCES

1. SHESTOPALOV, V. P., 1971. *The method of the Riemann-Hilbert problem in the theory of electromagnetic wave diffraction and propagation*. Kharkiv: Kharkiv State University Press (in Russian).

2. SHESTOPALOV, V. P., LYTVYNNENKO, L. M., MASALOV, S. A. and SOLOGUB, V. G., 1973. *Wave diffraction by gratings*. Kharkiv: Kharkiv State University Press, (in Russian).
 3. SOLOGUB, V. G., 1975. On some method for studying the problem of diffraction by a finite number of strips in the same plane. *Dokl. AN USSR. Ser. A*. no. 6, pp. 549–552 (in Russian)
 4. LYTVYNNENKO, L. M. and PROSVIRNIN, S. L., 2012. *Wave diffraction by periodic multilayer structures*. Cambridge: Cambridge Scientific Publishers.
 5. LYTVYNNENKO, L. M., KALIBERDA, M. E. and POGARSKY, S. A., 2013. Wave diffraction by semi-infinite venetian blind type grating. *IEEE Trans. Antennas Propag.* vol. 61, no. 12, pp. 6120–6127. DOI: 10.1109/TAP.2013.2281510
 6. KALIBERDA, M. E., LYTVYNNENKO, L. M. and POGARSKY, S. A., 2015. Diffraction of *H*-polarized electromagnetic waves by a multi-element planar semi-infinite grating. *Telecommunications and Radio Engineering*. vol. 74, no. 9, pp. 753–767. DOI: 10.1615/TelecomRadEng.v74.i9.10
 7. NEPA, P., MANARA, G. and ARMOGIDA, A., 2005. EM scattering from the edge of a semi-infinite planar strip grating using approximate boundary conditions. *IEEE Trans. Antennas Propag.* vol. 53, no. 1, pp. 82–90. DOI: 10.1109/TAP.2004.840523
 8. GANDEL, YU. V., 1986. The method of discrete singularities in problems of electrodynamics. *Voprosy Kibernetiki*. no. 124, pp. 166–183 (in Russian)
 9. GANDEL, YU. V., 2010. Boundary-value problems for the Helmholtz equation and their discrete mathematical models. *J. Math. Sci.* vol. 171, no. 1, pp. 74–88. DOI: 10.1007/s10958-010-0127-3
 10. ZAGINAYLOV, G. I., GANDEL, Y. V., KAMYSHAN, O. P., KAMYSHAN, V. V., HIRATA, A., THUMVONGSKUL, T. and SHIOZAWA, T., 2002. Full-wave analysis of the field distribution of natural modes in the rectangular waveguide grating based on singular integral equation method. *IEEE Trans. Plasma Sci.* vol. 30, no. 3. pp. 1151–1159. DOI: 10.1109/TPS.2002.801613
 11. ZAMYATIN, YE. V. and PROSVIRNIN, S. L., 1986. Diffraction of electromagnetic waves by an array with small random fluctuations of the dimensions. *Sov. J. Commun. Technol. Electron.* vol. 31, no. 3, pp. 43–50.
 12. ABRAMOWITZ, M. and STEGUN, I. A., eds., 1964. *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Number 55 in National Bureau of Standards Applied Mathematics Series. U. S. Government Printing Office, Washington, D. C.
 13. FELSEN, L. B. and MARCUVITS, N., 1973. *Radiation and Scattering of Waves*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall.
- M. E. Kaliberda*¹, *L. M. Lytvynenko*², and *S. A. Pogarsky*¹
- ¹ V. N. Kazarin Kharkiv National University, 4, Svoboda Sq., Kharkiv, 61022, Ukraine
- ² Institute of Radio Astronomy, National Academy of Sciences of Ukraine, 4, Mystetstv St., Kharkiv, 61002, Ukraine
- THE *E*-POLARIZED WAVE DIFFRACTION BY INFINITE PERIODICAL STRIP GRATING WITHOUT SINGLE STRIP
- Purpose:* The *E*-polarized wave diffraction by an infinite periodic strip grating without a single strip is considered.
- Design/methodology/approach:* The total field is found as a sum of field of infinite periodical grating and field induced by the removal of a single strip. The problem is reduced to the singular integral equations with additional conditions.
- Findings:* The directional patterns and field distribution in the domain above the grating are represented.
- Conclusions:* The effective algorithm for study of the field which appeared as a result of absence of a single strip is suggested.
- Key words:* infinite periodic grating, integral equation, diffraction
- М. Є. Каліберда*¹, *Л. М. Литвиненко*², *С. О. Погарський*¹
- ¹ Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, м. Свободи, 4, м. Харків, 61022, Україна
- ² Радіоастрономічний інститут НАН України, вул. Мистецтв, 4, м. Харків, 61002, Україна
- ДИФРАКЦІЯ *E*-ПОЛЯРИЗОВАНОЇ ХВИЛІ НА НЕСКІНЧЕННІЙ ПЕРІОДИЧНІЙ СТРИЧКОВІЙ РЕШІТЦІ ЗА ВІДСУТНІСТЮ ОДНІЄЇ СТРИЧКИ
- Предмет і мета роботи:* Розглянуто задачу про дифракцію *E*-поляризованої електромагнітної хвилі на нескінченній стрічковій решітці з відсутністю однієї стрічки.
- Методи та методологія:* Повне поле шукається у вигляді суми полів нескінченної періодичної решітки і поля, що виникає за рахунок відсутності однієї стрічки. Задача зведена до сингулярних інтегральних рівнянь з додатковими умовами.
- Результати:* Надаються діаграми спрямованості розсіяного поля та розподіл поля в області над решіткою.
- Висновок:* Запропоновано ефективний алгоритм дослідження поля, що виникло за рахунок відсутності однієї стрічки.
- Ключові слова:* нескінченна періодична решітка, інтегральне рівняння, дифракція
- Статья поступила в редакцию 30.05.2016