

А. В. Бровенко, П. Н. Мележик, А. Е. Поединчук
 Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины
 12, ул. Ак. Проскуры, Харьков, 61085, Украина
 E-mail: melezhik@ire.rharkov.ua

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА НЕОДНОРОДНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ СЛОЯХ

Предложен численно-аналитический метод определения амплитуд отражения и прохождения плоской линейно поляризованной электромагнитной волны, падающей наклонно на неоднородный анизотропный диэлектрический слой, элементы тензора которого зависят от одной пространственной координаты. Метод основан на построении специальных решений задачи Коши для уравнения Рикатти и дает возможность в рамках единого подхода исследовать процесс дифракции волн на электродинамических структурах такого типа. Эффективность предложенного метода продемонстрирована на ряде примеров численного решения задач дифракции на неоднородных гиротропных (плазменноподобных) слоях. Получена длинноволновая асимптотика для коэффициента отражения плоской однородной волны от неоднородного гиротропного слоя в предположении, что элементы тензора последнего не зависят от частотного параметра. Ил. 5. Библиогр.: 10 назв.

Ключевые слова: неоднородный анизотропный слой, тензор диэлектрической проницаемости, дифракция волн, задача Коши для уравнения Рикатти, численно-аналитический метод.

В последнее время значительно возрос интерес к задачам анализа и синтеза электродинамики неоднородных сред [1]. Особо следует выделить класс задач, связанных с дифракцией электромагнитных волн на плоскостойких неоднородных магнитоэлектрических слоях [2, 3].

Методы, которые используются для исследования процессов дифракции (распространения) электромагнитных волн в неоднородных средах, можно условно разделить на три типа:

- сугубо аналитические;
- прямые численные;
- численно-аналитические.

Ряд аналитических методов основан на ВКБ-приближении [4]. Они используются в основном для исследования сред с плавными неоднородностями. Аналитические же решения волновых уравнений неоднородных сред с быстрыми пространственными изменениями удается получить лишь для ограниченного количества модельных задач дифракции. В связи с этим в этих ситуациях используются прямые численные методы. Так, предложена схема численного моделирования взаимодействия электромагнитного излучения с неоднородной изотропной плазмой [5]. В работе [6] рассмотрена модель неоднородной анизотропной плазмы. В результате «сшивки» решений на границах слоя было получено дисперсионное уравнение для поверхностного плазмона в неоднородной анизотропной среде во втором приближении. В работе [7] предложена численная модель взаимодействия электромагнитной волны с неоднородным анизотропным слоем феррита. В итоге методом дифференциальной прогонки были рассчитаны частотные характеристики модулей коэффициентов отражения.

Тем не менее применение численных методов ставит перед исследователями ряд проблем,

в частности, внутренней сходимости, устойчивости вычислительной схемы и т. д.

Более эффективны при изучении процессов дифракции волн численно-аналитические методы, при применении которых предварительно проводится ряд аналитических преобразований над исходными уравнениями, в результате уравнения имеют обычно лучшую сходимость, более физически наглядны и адекватны. Кроме того, численно-аналитические методы всегда позволяют провести оценку погрешности результатов вычислительного эксперимента.

В работе [8] был предложен численно-аналитический метод определения амплитуд отражения и прохождения плоских электромагнитных волн, падающих наклонно на неоднородный магнитоэлектрический слой, материальные параметры которого зависят от одной пространственной координаты. Метод основан на построении специальных решений задачи Коши для уравнения Рикатти и дает возможность исследовать дифракцию волн как в дискретно-слоистых, так и в непрерывно неоднородных магнитоэлектрических средах.

Цель настоящей работы – обобщение этого метода для решения задач дифракции электромагнитных волн на неоднородных анизотропных слоях.

1. Постановка задачи. Построение алгоритма решения. Рассматривается задача дифракции плоской однородной монохроматической электромагнитной волны единичной амплитуды на плоском неоднородном анизотропном слое с тензором диэлектрической проницаемости

$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon(z) & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_1(z) & i\epsilon_2(z) \\ 0 & -i\epsilon_2(z) & \epsilon_1(z) \end{pmatrix}.$$

Магнитная проницаемость слоя полагается равной 1.

Пусть слой занимает область пространства $D = \{(x; y; z): -h < z < 0, -\infty < x; y < +\infty\}$, где $(x; y; z)$ – декартовы координаты (рис. 1). Полагаем, что все отличные от 0 элементы тензора $\hat{\varepsilon}$ зависят только от одной координаты z , и кроме того, функцию $\varepsilon(z)$ считаем кусочно-непрерывной на $[-h; 0]$, а функции $\varepsilon_j(z)$, $j=1,2$ – непрерывно-дифференцируемыми на интервале $(-h; 0)$.

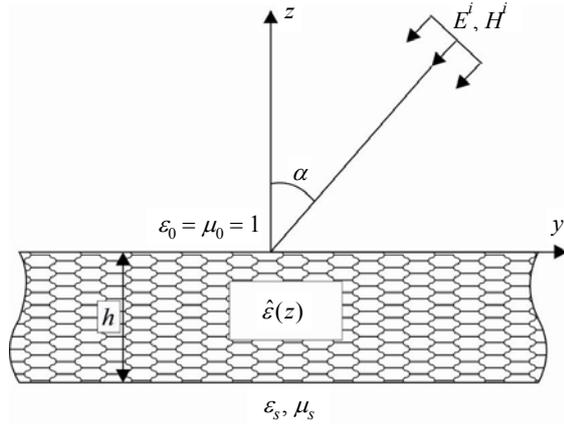


Рис. 1. Поперечное сечение структуры

Полупространства $z > 0$ и $z < -h$ заполнены однородными изотропными магнитоэлектрическими средами с относительными диэлектрическими и магнитными проницаемостями $\varepsilon_0 = 1, \mu_0 = 1$ при $z > 0$ и $\varepsilon_s; \mu_s (\varepsilon_s \geq 1, \mu_s \geq 1)$ при $z < -h$.

В полупространстве $z > 0$ распространяется плоская однородная монохроматическая волна единичной амплитуды, вектор напряженности магнитного поля которой параллелен оси OX , а волновой вектор \vec{k} находится в плоскости YOZ и составляет с осью OZ угол α . Отличные от нуля компоненты электромагнитного поля этой волны имеют вид

$$\begin{aligned} H_x^0 &= e^{-ik(z\cos(\alpha)-y\sin(\alpha))}e^{-i\omega t}, E_y^0 = \cos(\alpha)H_x^0, \\ E_z^0 &= \sin(\alpha)H_x^0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $k = \frac{\omega}{c}$, где ω – частота, а c – скорость света в среде, заполняющей полупространство $z > 0$. В дальнейшем временной множитель $e^{-i\omega t}$ опускаем.

Задача состоит в определении электромагнитного поля, возникшего в результате дифракции волны (1) на неоднородном анизотропном слое D . Как следует из уравнений Максвелла,

она сводится к определению дважды непрерывно дифференцируемой в $R^2 \setminus \partial D$ функции $U(y; z)$, удовлетворяющей следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \Delta U(y; z) + k^2 U(y; z) &= 0, \quad z > 0; \\ \varepsilon_{\perp} \Delta U(y; z) - \frac{d\varepsilon_{\perp}}{dz} \frac{\partial U(y; z)}{\partial z} + \\ + i\varepsilon_{\perp}^2 \frac{d}{dz} \left(\frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}} \right) \frac{\partial U(y; z)}{\partial y} + \\ + k^2 \varepsilon_{\perp}^2 U(y; z) &= 0, \quad -h < z < 0; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\Delta U(y; z) + k^2 \varepsilon_s \mu_s U(y; z) = 0, \quad z < -h,$$

а при $z \in \partial D$ – условиям сопряжения:

$$\begin{aligned} (U^0 + U) \Big|_{z=0+0} &= U \Big|_{z=0-0}, \\ \left(\frac{\partial U^0}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) \Big|_{z=0+0} &= \frac{1}{\varepsilon_{\perp}} \left(\frac{\partial U}{\partial z} + i\varepsilon_{\parallel} \frac{\partial U}{\partial y} \right) \Big|_{z=0-0}, \\ U \Big|_{z=-h+0} &= U \Big|_{z=-h-0}, \\ \frac{1}{\varepsilon_{\perp}} \left(\frac{\partial U}{\partial z} + i\varepsilon_{\parallel} \frac{\partial U}{\partial y} \right) \Big|_{z=-h+0} &= \frac{1}{\varepsilon_s} \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z=-h-0}, \end{aligned} \quad (3)$$

где функция $U^0 \equiv H_x^0$; ∂D – множество точек границ D ; Δ – оператор Лапласа в декартовых координатах; $\varepsilon_{\perp} = \varepsilon_{\perp}(z) = \frac{\varepsilon_1^2(z) - \varepsilon_2^2(z)}{\varepsilon_1(z)}$ – попе-

речная эффективная и $\varepsilon_{\parallel} = \varepsilon_{\parallel}(z) = \frac{\varepsilon_2(z)}{\varepsilon_1(z)}$ – продольная эффективная проницаемости среды в D .

Кроме условий (2), (3), функция $U(y; z)$ в полупространствах $z > 0$ и $z < -h$ должна удовлетворять условиям излучения [9].

Нетрудно показать, что с помощью функции $U(y; z)$ компоненты поля дифракции определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} H_x &= U(y; z), \\ E_y &= \frac{i}{k} \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial z}, & z > 0, \\ \frac{1}{\varepsilon_{\perp}(z)} \left(\frac{\partial U}{\partial z} + i\varepsilon_{\parallel}(z) \frac{\partial U}{\partial y} \right), & -h < z < 0, \\ \frac{1}{\varepsilon_s} \frac{\partial U}{\partial z}, & z < -h, \end{cases} \\ E_z &= -\frac{i}{k} \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial y}, & z > 0, \\ \frac{1}{\varepsilon_{\perp}(z)} \left(\frac{\partial U}{\partial y} - i\varepsilon_{\parallel}(z) \frac{\partial U}{\partial z} \right), & -h < z < 0, \\ \frac{1}{\varepsilon_s} \frac{\partial U}{\partial y}, & z < -h. \end{cases} \end{aligned}$$

Введем безразмерные переменные $\bar{y} = \frac{y}{h}$ и $\bar{z} = \frac{z}{h}$. Тогда вид краевой задачи (2), (3) не изменится, если параметр k заменить на безразмерный параметр $\kappa = kh$.

Применяя к уравнениям (2) метод разделения переменных и учитывая условия излучения в полупространствах $\bar{z} > 0$ и $\bar{z} < -1$, после ряда несложных преобразований, получим представление для функции $U(\bar{y}; \bar{z})$

$$U(\bar{y}; \bar{z}) = \begin{cases} R e^{i\kappa(\bar{y}\sin\alpha + \bar{z}\cos\alpha)}, & \bar{z} > 0, \\ (a_1 U^+(\bar{z}) + a_2 U^-(\bar{z})) e^{i\kappa\bar{y}\sin\alpha}, & -1 < \bar{z} < 0, \\ T e^{i\kappa(\bar{y}\sin\alpha - (\bar{z}+1)\sqrt{\varepsilon_s\mu_s - \sin^2\alpha})}, & \bar{z} < -1. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь $R, a_j (j=1;2)$ и T – неизвестные величины, а функции $U^\pm(\bar{z})$ являются линейно независимыми решениями обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка вида
$$\frac{d^2 U^\pm(\bar{z})}{d\bar{z}^2} - \frac{1}{\varepsilon_\perp} \frac{d\varepsilon_\perp}{d\bar{z}} \frac{dU^\pm(\bar{z})}{d\bar{z}} + U^\pm(\bar{z})\kappa^2\varepsilon_\perp - U^\pm(\bar{z})\left(\kappa\varepsilon_\perp \sin\alpha \frac{d}{d\bar{z}}\left(\frac{\varepsilon_\parallel}{\varepsilon_\perp}\right) + (\kappa \sin\alpha)^2\right) = 0. \quad (5)$$

Предположим, что получены решения дифференциального уравнения (5), удовлетворяющие следующим условиям при $\bar{z} = -1$:

$$U^\pm(-1) = 1, \quad \left. \frac{dU^\pm(\bar{z})}{d\bar{z}} \right|_{\bar{z}=-1} = \pm ip, \quad (6)$$

где $p = \kappa\varepsilon_\perp(-1)\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_s\mu_s - \sin^2\alpha}}{\varepsilon_s} + i\sin\alpha \frac{\varepsilon_\parallel(-1)}{\varepsilon_\perp(-1)}\right)$.

Легко убедиться, что функции $U^\pm(\bar{z})$ – линейно независимы, если только $p \neq 0$. Далее будем предполагать, что это условие выполняется.

Подставляя (4) в условия сопряжения (3) при $z = -h$ ($\bar{z} = -1$), получаем

$$a_1 = 0; \quad a_2 = T. \quad (7)$$

Следовательно, внутри слоя функция $U(\bar{y}; \bar{z})$ имеет следующий вид:

$$U(\bar{y}; \bar{z}) = T U^-(\bar{z}) e^{i\kappa\bar{y}\sin\alpha}. \quad (8)$$

Используя условия сопряжения (3) при $z = 0$ ($\bar{z} = 0$), т. е. на верхней границе D , получаем представления для величин R и T :

$$R = \frac{\kappa U^-(0)(\varepsilon_\perp(0)\cos\alpha + \varepsilon_\parallel(0)\sin\alpha) - i \frac{dU^-}{d\bar{z}} \Big|_{\bar{z}=0}}{\kappa U^-(0)(\varepsilon_\perp(0)\cos\alpha - \varepsilon_\parallel(0)\sin\alpha) + i \frac{dU^-}{d\bar{z}} \Big|_{\bar{z}=0}}; \quad (9)$$

$$T = \frac{2\kappa\varepsilon_\perp(0)\cos\alpha}{\kappa U^-(0)(\varepsilon_\perp(0)\cos\alpha - \varepsilon_\parallel(0)\sin\alpha) + i \frac{dU^-}{d\bar{z}} \Big|_{\bar{z}=0}}. \quad (10)$$

Таким образом, представление (4), а также формулы (7)–(10) и дают решение исходной задачи дифракции (2), (3).

Из изложенного выше следует, что ключевым моментом при решении рассматриваемой краевой задачи является нахождение решений задачи Коши (5), (6).

Следует отметить, что решения обыкновенного дифференциального уравнения (5) с переменными коэффициентами в общем случае не выражаются ни через элементарные, ни через специальные функции. Только в ряде случаев решения дифференциального уравнения (5) может быть получено аналитически. Из [8] и приведенных там ссылок следует, что при ряде ограничений и предположений относительно $\varepsilon_\perp(\bar{z})$ и $\varepsilon_\parallel(\bar{z})$ для получения решения (5) можно воспользоваться различными численными либо численно-аналитическими методами. Например, методом степенных (обобщенно-степенных) рядов, методом последовательных приближений, методом полиномиальных операторов, методом приближения многочленами, проекционными методами, методом сеток и др.

Для решения задачи дифракции плоских электромагнитных волн на неоднородных изотропных магнитодиэлектрических слоях предложен численно-аналитический метод, основанный на получении специальных решений задачи Коши для уравнения Рикатти [8].

Ниже дано обобщение этого метода для решения задачи дифракции волн на анизотропных неоднородных диэлектрических слоях.

С этой целью рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\frac{d^2 U(\bar{z})}{d\bar{z}^2} - \frac{1}{\varepsilon_\perp(\bar{z})} \frac{d\varepsilon_\perp(\bar{z})}{d\bar{z}} \frac{dU(\bar{z})}{d\bar{z}} + U(\bar{z})\kappa^2\varepsilon_\perp(\bar{z}) - U(\bar{z})\left(\kappa\varepsilon_\perp(\bar{z})\sin\alpha \frac{d}{d\bar{z}}\left(\frac{\varepsilon_\parallel(\bar{z})}{\varepsilon_\perp(\bar{z})}\right) + (\kappa \sin\alpha)^2\right) = 0; \quad (11)$$

$$U(-1) = 1, \quad \left. \frac{dU(\bar{z})}{d\bar{z}} \right|_{\bar{z}=-1} = -ip, \quad p \neq 0. \quad (12)$$

Введем новую неизвестную функцию $V(\bar{z})$

$$U(\bar{z}) = \exp\left(\int_{-1}^{\bar{z}} \varepsilon_\perp(\xi)V(\xi)d\xi\right). \quad (13)$$

Легко убедиться, что дифференциальное уравнение (11) может быть представлено в виде

$$\frac{d}{d\bar{z}} \left(\frac{1}{\varepsilon_{\perp}(\bar{z})} \frac{dU}{dz} \right) + \left(\kappa^2 - \kappa \sin \alpha \frac{d}{d\bar{z}} \left(\frac{\varepsilon_{\parallel}(\bar{z})}{\varepsilon_{\perp}(\bar{z})} \right) - \frac{(\kappa \sin \alpha)^2}{\varepsilon_{\perp}(\bar{z})} \right) U = 0. \quad (14)$$

Подставим (13) в (12), (14). Используя $\frac{dU(\bar{z})}{d\bar{z}} = U(\bar{z})\varepsilon_{\perp}(\bar{z})V(\bar{z})$, в результате ряда преобразований получаем уравнение Рикатти $\frac{dV(\bar{z})}{d\bar{z}} + \varepsilon_{\perp}(\bar{z})V^2(\bar{z}) +$

$$+ \kappa^2 - \kappa \sin \alpha \frac{d}{dz} \left(\frac{\varepsilon_{\parallel}(\bar{z})}{\varepsilon_{\perp}(\bar{z})} \right) - \frac{(\kappa \sin \alpha)^2}{\varepsilon_{\perp}(\bar{z})} = 0 \quad (15)$$

с начальным условием

$$V(-1) = -i\tilde{p}, \text{ где } \tilde{p} = \frac{p}{\varepsilon_{\perp}(-1)}. \quad (16)$$

Таким образом, задача Коши (11), (12) для линейного уравнения второго порядка сведена к задаче Коши для нелинейного уравнения Рикатти.

Приближенное решение задачи (15), (16) можно получить с помощью численно-аналитического алгоритма, изложенного в работе [8]. Аппроксимируем для этого интервал $-1 < \bar{z} < 0$ конечным набором точек $\{\bar{z}_n\}_{n=1}^N : \bar{z}_n = -1 + \delta(n-1)$, а $\delta = \frac{1}{N-1}$, где N – натуральное число. Обозначим через $V_n = V(\bar{z}_n)$, $\varepsilon_{\perp n} = \varepsilon_{\perp}(\bar{z}_n)$ и $\varepsilon_{\parallel n} = \varepsilon_{\parallel}(\bar{z}_n)$.

Следуя [8], формально интегрируя уравнение (15) в пределах от \bar{z}_n к \bar{z}_{n+1} , получим

$$V_{n+1} - V_n + \int_{\bar{z}_n}^{\bar{z}_{n+1}} \varepsilon_{\perp}(\xi) V^2(\xi) d\xi + \kappa^2 \delta - \kappa \sin \alpha \left(\frac{\varepsilon_{\parallel n+1}}{\varepsilon_{\perp n+1}} - \frac{\varepsilon_{\parallel n}}{\varepsilon_{\perp n}} \right) - (\kappa \sin \alpha)^2 \int_{\bar{z}_n}^{\bar{z}_{n+1}} \frac{d\xi}{\varepsilon_{\perp}(\xi)} = 0, \quad (17)$$

$n = 1, 2, 3, \dots, N-1$.

Предполагая, что N – достаточно большое число и аппроксимируя интегралы (17) квадратурной суммой двухточечной формулы трапеции [10], получаем

$$V_{n+1} - V_n + \frac{\delta}{2} [\varepsilon_{\perp n} V_n^2 + \varepsilon_{\perp n+1} V_{n+1}^2] + \kappa^2 \delta - \kappa \sin \alpha \left(\frac{\varepsilon_{\parallel n+1}}{\varepsilon_{\perp n+1}} - \frac{\varepsilon_{\parallel n}}{\varepsilon_{\perp n}} \right) - \frac{\delta}{2} (\kappa \sin \alpha)^2 \left(\frac{1}{\varepsilon_{\perp n+1}} + \frac{1}{\varepsilon_{\perp n}} \right) = 0, n = 1, 2, \dots, N. \quad (18)$$

Представим (18) в виде

$$\frac{\delta}{2} \varepsilon_{\perp n+1} V_{n+1}^2 + V_{n+1} + F_n = 0. \quad (19)$$

Здесь

$$F_n = \kappa^2 \delta + 0,5\delta \varepsilon_{\perp n} V_n^2 - V_n - \kappa \sin \alpha \left(\frac{\varepsilon_{\parallel n+1}}{\varepsilon_{\perp n+1}} - \frac{\varepsilon_{\parallel n}}{\varepsilon_{\perp n}} \right) - 0,5\delta (\kappa \sin \alpha)^2 \left(\frac{1}{\varepsilon_{\perp n}} + \frac{1}{\varepsilon_{\perp n+1}} \right).$$

Из (19) получаем

$$V_{n+1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 2\delta \varepsilon_{\perp n+1} F_n}}{\delta \varepsilon_{\perp n+1}}. \quad (20)$$

Выбирая в (20) то значение V_{n+1} , которое при $N \rightarrow \infty$ ($\delta \rightarrow 0$) стремится к V_n , получаем

$$V_{n+1} = -\frac{2F_n}{1 + \sqrt{1 - 2\delta \varepsilon_{\perp n+1} F_n}}, \quad (21)$$

$n = 1, 2, 3, \dots, N-1$.

Формула (21) дает возможность рекуррентно вычислять значения V_n , поскольку известно значение

$$V_1 = -i\kappa \left[\frac{\sqrt{\varepsilon_s \mu_s - \sin^2 \alpha}}{\varepsilon_s} + i \frac{\varepsilon_{\parallel 1}}{\varepsilon_{\perp 1}} \sin \alpha \right]. \text{ Здесь}$$

$$\varepsilon_{\parallel} = \varepsilon_{\parallel}(-1) \text{ и } \varepsilon_{\perp} = \varepsilon_{\perp}(-1).$$

Можно показать, что погрешность формулы (18), а следовательно, и (21) будет величиной порядка δ^2 . Формула (21) дает явную вычислительную схему расчета приближенных значений $(V_n)_{n=1}^N$ решения задачи Коши (15), (16) на заданной сетке $(\bar{z}_n)_{n=1}^N$, аппроксимирующей интервал $-1 < \bar{z} < 0$.

Представим теперь формулы (9) и (10) с помощью функции $V(\bar{z})$, являющейся решением задачи Коши (15), (16). Используя представление (13), в результате ряда преобразований получаем

$$R = \frac{(\kappa i \cos(\alpha) + V(0))r(0) - \kappa \sin(\alpha)\varepsilon_2(0)}{(\kappa i \cos(\alpha) - V(0))r(0) + \kappa \sin(\alpha)\varepsilon_2(0)}, \quad (22)$$

$$T = \frac{2\kappa i r(0) \cos \alpha}{(\kappa i \cos \alpha - V(0))r(0) + \kappa \sin \alpha \varepsilon_2(0)} \times \exp \left(- \int_{-1}^0 \varepsilon_{\perp}(\xi) V(\xi) d\xi \right). \quad (23)$$

Здесь $r(\bar{z}) = \varepsilon_1^2(\bar{z}) - \varepsilon_2^2(\bar{z})$.

Из (21) следует, что $V(0) \approx V_N$, а экспоненциальный множитель в (23) может быть вычислен по следующей рекуррентной формуле:

$$\exp \left(- \int_{-1}^0 \varepsilon_{\perp}(\xi) V(\xi) d\xi \right) \approx B_N,$$

$$\text{а } B_1 \equiv 1, B_{n+1} = B_n \exp \left(- \frac{\delta}{2} (\varepsilon_{\perp n} V_n + \varepsilon_{\perp n+1} V_{n+1}) \right),$$

где $n = 1, 2, 3, \dots, N-1$.

Зная R и T , получаем представление для компонент электромагнитного поля $H_x(\bar{y}; \bar{z})$, $E_y(\bar{y}; \bar{z})$ и $E_z(\bar{y}; \bar{z})$.

$$H_x(\bar{y}; \bar{z}) = \begin{cases} \left(e^{-ik\bar{z} \cos \alpha} + \operatorname{Re} e^{ik\bar{z} \cos \alpha} \right) e^{ik\bar{y} \sin \alpha}, & \bar{z} > 0, \\ T \exp \left(\int_{-1}^{\bar{z}} \bar{\varepsilon}_{\perp}(\xi) V(\xi) d\xi \right) e^{ik\bar{y} \sin \alpha}, & -1 < \bar{z} < 0, \\ T e^{-ik(\bar{z}+1) \sqrt{\varepsilon_s \mu_s - \sin^2 \alpha}} e^{ik\bar{y} \sin \alpha}, & \bar{z} < -1, \end{cases}$$

$$E_y(\bar{y}; \bar{z}) = \begin{cases} \left(e^{-ik\bar{z} \cos \alpha} - \operatorname{Re} e^{ik\bar{z} \cos \alpha} \right) \cos \alpha e^{ik\bar{y} \sin \alpha}, & \bar{z} > 0, \\ \frac{i}{\kappa \varepsilon_{\perp}} T \exp \left(\int_{-1}^{\bar{z}} \varepsilon_{\perp}(\xi) V(\xi) d\xi \right) \times \\ \times \left(\varepsilon_{\perp} V(\bar{z}) - \kappa \varepsilon_{\parallel} \sin \alpha \right), & -1 < \bar{z} < 0, \\ \frac{T}{\varepsilon_s} \sqrt{\varepsilon_s \mu_s - \sin^2 \alpha} e^{-ik(\bar{z}+1) \sqrt{\varepsilon_s \mu_s - \sin^2 \alpha}} \times \\ \times e^{ik\bar{y} \sin \alpha}, & \bar{z} < -1, \end{cases}$$

$$E_z(\bar{y}; \bar{z}) = \begin{cases} \left(e^{-ik\bar{z} \cos \alpha} + \operatorname{Re} e^{ik\bar{z} \cos \alpha} \right) \sin \alpha e^{ik\bar{y} \sin \alpha}, & \bar{z} > 0, \\ T \exp \left(\int_{-1}^{\bar{z}} \bar{\varepsilon}_{\perp}(\xi) V(\xi) d\xi \right) \times \\ \times \left[\frac{\sin \alpha}{\varepsilon_{\perp}(\bar{z})} - \frac{\varepsilon_{\parallel}(\bar{z}) V(\bar{z})}{\kappa} \right] e^{ik\bar{y} \sin \alpha}, & -1 < \bar{z} < 0, \\ \frac{\sin \alpha}{\varepsilon_s} T e^{-ik(\bar{z}+1) \sqrt{\varepsilon_s \mu_s - \sin^2 \alpha}} e^{ik\bar{y} \sin \alpha}, & \bar{z} < -1. \end{cases}$$

Отметим, что у рассмотренной выше задачи дифракции вектор напряженности магнитного поля плоской электромагнитной волны параллелен оси OX . Другими словами, имеет место случай H -поляризованных электромагнитных волн. В данном случае решение задачи зависит только от двух элементов тензора диэлектрической проницаемости: $\varepsilon_1(\bar{z})$ и $\varepsilon_2(\bar{z})$. Можно показать, что в случае E -поляризации, когда вектор напряженности электрического поля параллелен оси OX , поле дифракции будет зависеть только от одного элемента тензора диэлектрической проницаемости – $\varepsilon(\bar{z})$. Метод решения задачи такого типа был предложен в работе [8].

2. Длинноволновое приближение. Изложенный выше алгоритм решения задачи дифракции (2), (3) дает возможность получить аналитическое представление коэффициента отражения (23) в предельном случае $\kappa = \frac{\omega h}{c} \rightarrow 0$, что соответствует длинноволновому приближению.

Действительно, рассмотрим задачу Коши (15), (16).

Введем новую неизвестную функцию $W(\bar{z}) = \frac{V(\bar{z})}{ikq}$,

$$\text{где } q = \frac{\sqrt{\varepsilon_s \mu_s - \sin^2(\alpha)}}{\varepsilon_s} + i \sin(\alpha) \frac{\varepsilon_{\parallel}(-1)}{\varepsilon_{\perp}(-1)}.$$

В терминах функции $W(\bar{z})$ задача (15), (16) принимает вид

$$\begin{cases} W'(\bar{z}) + \kappa i q \varepsilon_{\perp}(\bar{z}) W^2(\bar{z}) - \\ - \frac{\kappa i}{q} + \frac{i \sin \alpha}{q} \frac{d}{d\bar{z}} \left(\frac{\varepsilon_{\parallel}(\bar{z})}{\varepsilon_{\perp}(\bar{z})} \right) + \frac{\kappa i \sin^2 \alpha}{q \varepsilon_{\perp}(\bar{z})} = 0; \end{cases} \quad (24)$$

$$W(-1) = -1. \quad (25)$$

Предполагая, что $\varepsilon_1(\bar{z})$ и $\varepsilon_2(\bar{z})$, а следовательно, и $\varepsilon_{\perp}(\bar{z})$, $\varepsilon_{\parallel}(\bar{z})$ не зависят от частотного параметра κ , разложим $W(\bar{z})$ в ряд по степеням κ

$$W = \sum_{n=0}^{+\infty} W_n(\bar{z}) \kappa^n, \quad (26)$$

где $\kappa \ll 1$.

Подставляя (26) в дифференциальное уравнение (24), получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{+\infty} W_n'(\bar{z}) \kappa^n + i q \varepsilon_{\perp} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^n W_p(\bar{z}) W_{n-p}(\bar{z}) \right) \kappa^{n+1} - \\ & - \frac{i}{q} \kappa + \frac{i \sin \alpha}{q} \frac{d}{d\bar{z}} \left(\frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}} \right) + \frac{i}{q} \kappa \frac{\sin^2 \alpha}{\varepsilon_{\perp}} = 0, \end{aligned} \quad (27)$$

где $W_0 \equiv W(-1) = -1$.

Левая часть в (27) является рядом по степеням κ . Приравнявая 0 коэффициенты при степенях κ^n , $n = 0, 1, 2, \dots$, имеем:

$$W_0'(\bar{z}) + \frac{i}{q} \sin \alpha \frac{d}{d\bar{z}} \left(\frac{\varepsilon_{\parallel}(\bar{z})}{\varepsilon_{\perp}(\bar{z})} \right) = 0, \quad n = 0,$$

$$W_1'(\bar{z}) + i q \varepsilon_{\perp}(\bar{z}) W_0^2(\bar{z}) + \frac{i}{q} \left(\frac{\sin^2 \alpha}{\varepsilon_{\perp}(\bar{z})} - 1 \right) = 0, \quad n = 1, \quad (28)$$

$$W_n'(\bar{z}) + i q \varepsilon_{\perp}(\bar{z}) \sum_{p=0}^{n-1} W_p(\bar{z}) W_{n-p-1}(\bar{z}) = 0, \quad n \geq 2.$$

Интегрируя выражения (28) в пределах от -1 к \bar{z} и учитывая, что $W_0(-1) = -1$, а $W_n(-1) = 0$ при $n \geq 1$, получаем:

$$W_0(\bar{z}) = \frac{1}{q} S(\bar{z}) \sin \alpha - 1,$$

$$\text{где } S(\bar{z}) = \frac{\varepsilon_{\parallel}(-1)}{\varepsilon_{\perp}(-1)} - \frac{\varepsilon_{\parallel}(\bar{z})}{\varepsilon_{\perp}(\bar{z})};$$

$$W_1(\bar{z}) = \frac{i}{q}(1 + \bar{z}) - \frac{i \sin^2 \alpha}{q} \int_{-1}^{\bar{z}} \frac{d\xi}{\varepsilon_{\perp}(\xi)} - iq \int_{-1}^{\bar{z}} \varepsilon_{\perp}(\xi) \left(1 - \frac{i}{q} S(\xi) \sin \alpha\right)^2 d\xi;$$

$$W_n(\bar{z}) = -iq \sum_{p=0}^{n-1} \int_{-1}^{\bar{z}} \varepsilon_{\perp}(\xi) W_p(\xi) W_{n-p-1}(\xi) d\xi, \quad n \geq 2.$$

Рассмотрим теперь выражение для коэффициента отражения (22)

$$R = \frac{(\kappa i \cos(\alpha) + V(0))r(0) - \kappa \sin(\alpha)\varepsilon_2(0)}{(\kappa i \cos(\alpha) - V(0))r(0) + \kappa \sin(\alpha)\varepsilon_2(0)}. \quad (29)$$

С учетом того, что $V(0) = \kappa i q W(0)$, выражение (29) может быть представлено в виде

$$R = \frac{r(0)\cos(\alpha) + qr(0)W(0) + i\sin(\alpha)\varepsilon_2(0)}{r(0)\cos(\alpha) - qr(0)W(0) - i\sin(\alpha)\varepsilon_2(0)}. \quad (30)$$

$$\text{Поскольку } W(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} W_n(0)\kappa^n,$$

где

$$W_0(0) = \frac{i}{q} S(0) \sin \alpha - 1;$$

$$W_1(0) = \frac{i}{q} - \frac{i \sin^2 \alpha}{q} \int_{-1}^0 \frac{d\xi}{\varepsilon_{\perp}(\xi)} - iq \times \int_{-1}^0 \varepsilon_{\perp}(\xi) \left(1 - \frac{i}{q} S(\xi) \sin \alpha\right)^2 d\xi;$$

$$W_n(0) = -iq \sum_{p=0}^{n-1} \int_{-1}^0 \varepsilon_{\perp}(\xi) W_p(\xi) W_{n-p-1}(\xi) d\xi, \quad \text{при } n \geq 2,$$

то (30) принимает вид

$$R = \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \kappa^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \kappa^n}, \quad (31)$$

где

$$a_0 = \cos \alpha - \frac{\sqrt{\varepsilon_s \mu_s - \sin^2 \alpha}}{\varepsilon_s};$$

$$b_0 = \cos \alpha + \frac{\sqrt{\varepsilon_s \mu_s - \sin^2 \alpha}}{\varepsilon_s};$$

$$a_n = -b_n = q W_n(0).$$

Из (32) имеем

$$R = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \kappa^n, \quad (32)$$

где коэффициенты c_n определяются следующим образом:

$$c_0 = \frac{\varepsilon_s \cos \alpha - \sqrt{\varepsilon_s \mu_s - \sin^2 \alpha}}{\varepsilon_s \cos \alpha + \sqrt{\varepsilon_s \mu_s - \sin^2 \alpha}},$$

$$c_1 = \frac{2q \cos \alpha W_1(0)}{\left(\cos \alpha + \frac{\sqrt{\varepsilon_s \mu_s - \sin^2 \alpha}}{\varepsilon_s}\right)^2},$$

$$c_n = q \frac{2W_n(0) \cos \alpha}{\left(\cos \alpha + \frac{\sqrt{\varepsilon_s \mu_s - \sin^2 \alpha}}{\varepsilon_s}\right)^2} + q \frac{\left(\cos \alpha + \frac{\sqrt{\varepsilon_s \mu_s - \sin^2 \alpha}}{\varepsilon_s}\right)^{n-1} \sum_{p=1}^{n-1} W_{n-p}(0) c_p}{\left(\cos \alpha + \frac{\sqrt{\varepsilon_s \mu_s - \sin^2 \alpha}}{\varepsilon_s}\right)^2}, \quad n \geq 2.$$

Легко видеть, что при $\kappa = 0$

$$R = c_0,$$

где c_0 совпадает с коэффициентом отражения для полупространства $\bar{z} < 0$, заполненного средой с материальными параметрами ε_s и μ_s , при падении на него плоской однородной волны под углом α . В частности, когда $\varepsilon_s = \mu_s = 1$, $c_0 = 0$. Таким образом, при $\kappa \rightarrow 0$ коэффициент отражения практически не зависит от анизотропных свойств среды.

3. Примеры численного расчета. Представленный выше численно-аналитический метод апробировался на ряде задач дифракции. Компоненты тензора диэлектрической проницаемости слоя для этих задач задавались в следующем виде:

$$\varepsilon_1(\bar{z}) = \varepsilon(1 - \sin(2\pi p(\bar{z} + 1))) + i\nu, \quad (33)$$

$$\varepsilon_2(\bar{z}) = \varepsilon \cos(2\pi p(\bar{z} + 1))$$

и

$$\varepsilon_1(\bar{z}) = \varepsilon \left(1 - \frac{\kappa_p^2 f(\bar{z})(\kappa + i\nu)}{\kappa((\kappa + i\nu)^2 - \kappa_H^2)}\right), \quad (34)$$

$$\varepsilon_2(\bar{z}) = -\varepsilon \frac{\kappa_p^2 f(\bar{z})\kappa_H}{\kappa((\kappa + i\nu)^2 - \kappa_H^2)}.$$

В соответствии с формулой (33) имеем диэлектрическую анизотропную среду, компоненты тензора диэлектрической проницаемости которой являются периодическими функциями переменной \bar{z} . Формула (34) моделирует полупроводниковый слой в постоянном магнитном поле, напряженность которого параллельна оси OX .

Функция $f(\bar{z})$ – нормированная на максимальное значение распределение концентрации электронов полупроводника, $\kappa_p = \frac{\omega_p h}{c}$, $\kappa_H = \frac{\omega_H h}{c}$, $\nu = \bar{\nu} h$, ω_p, ω_H – плазменная и циклотронная частоты, $\bar{\nu}$ – частота соударения электронов, ε – диэлектрическая проницаемость решетки полупроводника. Прежде чем излагать результаты численных расчетов, приведем данные о сходимости алгоритма при увеличении числа точек дискретизации интервала изменения функций $\varepsilon_1(\bar{z})$, $\varepsilon_2(\bar{z})$. Как указывалось выше, основная погрешность алгоритма обусловлена аппроксимацией интегралов в (17) квадратурной суммой двухточечной формулы трапеций. Аналитическая оценка такой аппроксимации имеет порядок $O((\kappa\delta)^2)$.

На рис. 2 представлена характеристика скорости сходимости алгоритма $\delta_N = \lg \left| \frac{R_N - R_{2N}}{R_{2N}} \right|$, где R_N и R_{2N} – коэффициенты отражения, вычисленные при значениях параметра $\delta = (N-1)^{-1}$ и $\delta = (2N-1)^{-1}$.

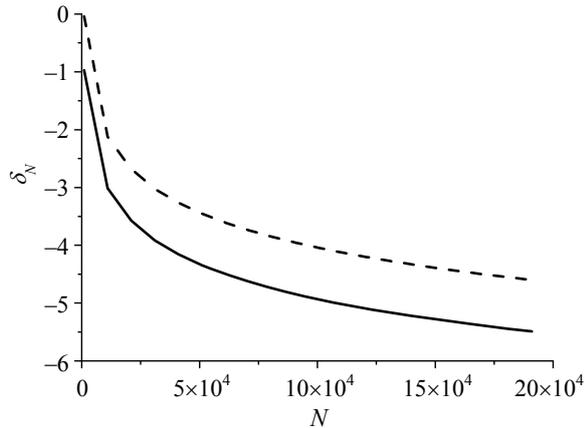


Рис. 2. Зависимость параметра δ_N от числа точек дискретизации N для различных значений частотного параметра

Расчеты проводились для неоднородного полупроводникового слоя с компонентами тензора диэлектрической проницаемости, задаваемых по формуле (34) для значений частотного параметра $\kappa = 25$ – сплошная линия, $\kappa = 50$ – пунктир, при следующих значениях параметров полупроводникового слоя: $\kappa_p = 10$, $\kappa_h = \sqrt{0,5}\kappa_p$, $\nu = 0,05$, $\varepsilon = 12,53$. В качестве функции, моделирующей неоднородность слоя, была выбрана $f(\bar{z}) = -4\bar{z}(\bar{z}+1)$. Как видно из рис. 2, уже при $N = 25\,000$ относительная погрешность расчета коэффициента отражения для значения частотного параметра $\kappa = 25$ (по толщине слоя, укладыва-

ется 4 длины волны возбуждающего поля) составляет менее 0,01 % и менее 0,1 % при $\kappa = 50$. При этом время вычисления коэффициента отражения R_N при фиксированном значении частотного параметра κ составляет несколько миллисекунд (процессор *Intel (R) Core (TM) i5 CPU 760* 2,8 ГГц, ОЗУ 4,0 Гб). Эти результаты свидетельствуют о высокой эффективности разработанного алгоритма.

Возможности предложенного алгоритма ниже продемонстрированы на численных результатах, полученных для двух достаточно разных задач дифракции.

На рис. 3, а показаны результаты расчетов зависимостей модулей коэффициентов отражения и прохождения от частотного параметра в диапазоне $0 \leq \kappa \leq 50$. Зависимость модуля коэффициента отражения в этом частотном диапазоне имеет осциллирующий характер, а коэффициент прохождения близок к 0. Как видно из рис. 3, б, это обусловлено периодической зависимостью реальной и мнимой частей эффективной диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{эфф} = \frac{\varepsilon_1^2(\bar{z}) - \varepsilon_2^2(\bar{z})}{\varepsilon_1(\bar{z})}$ от переменной \bar{z} .

При этом существуют интервалы изменения переменной (\bar{z}) , где реальная часть $\varepsilon_{эфф}$ принимает отрицательные значения. Такое поведение $\varepsilon_{эфф}$ и обуславливает резонансное поведение зависимости модуля коэффициента отражения R от частотного параметра. На рис. 3, в, г приведено распределение модуля напряженности магнитного поля от z/h для значений частотного параметра κ , при которых модуль коэффициента отражения имеет минимумы. Легко видеть, что поле внутри анизотропного слоя локализовано в малой окрестности той границы слоя, на которую падает возбуждающая волна (рис. 3, в, г). Вне этой окрестности поле дифракции практически равно 0. В этом случае при указанных выше значениях частотного параметра коэффициент прохождения также близок к 0 (рис. 3, а, пунктирная линия). Следовательно, при этих значениях частотного параметра имеет место резонансное поглощение энергии возбуждающей волны внутри слоя. Этот эффект непосредственно связан с существованием интервалов переменной \bar{z} , в которых реальная часть $\varepsilon_{эфф}$ является отрицательной величиной.

Вторая задача – дифракции плоской однородной волны на полупроводниковом слое в постоянном магнитном поле. Компоненты тензора диэлектрической проницаемости такого слоя моделируются по формуле (35) и зависят как от частотного параметра κ , так и переменной \bar{z} .

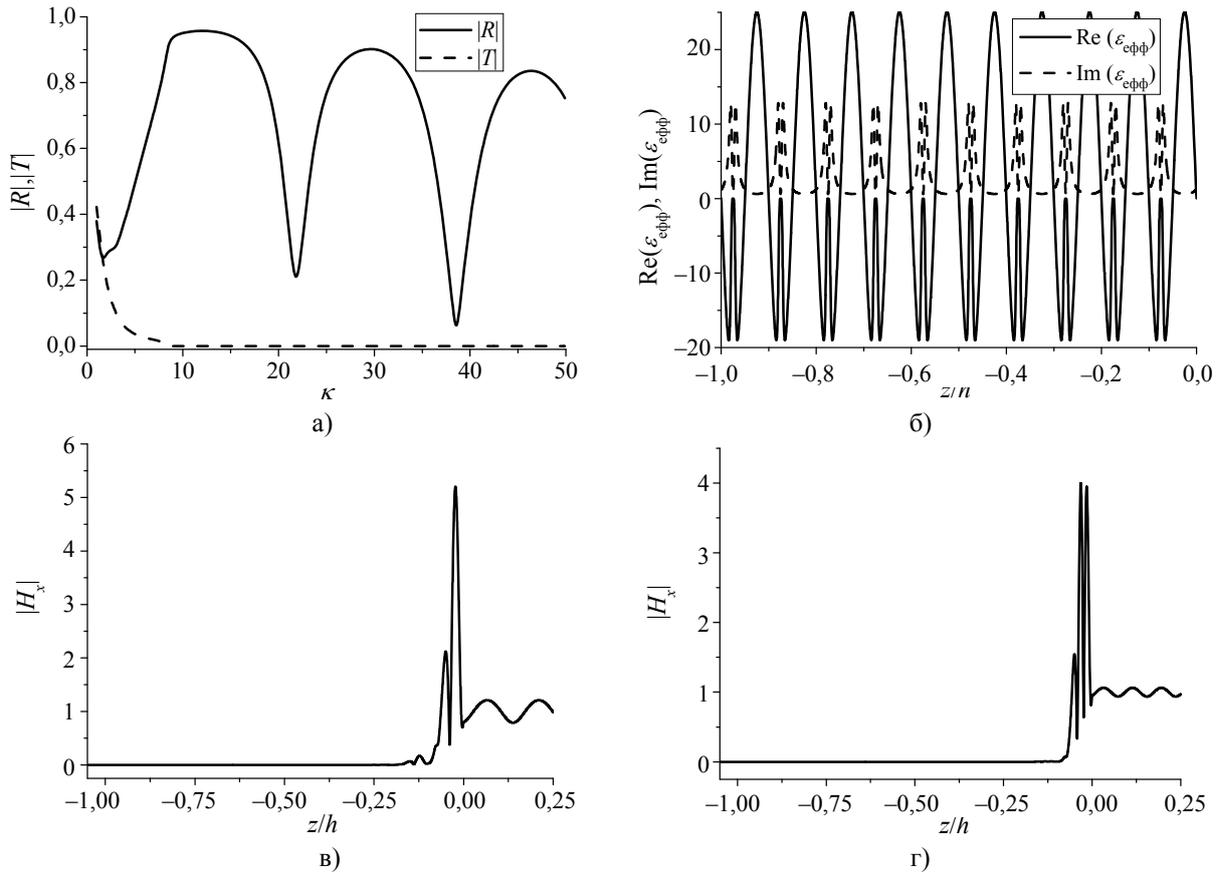


Рис. 3. Частотные зависимости модулей коэффициентов отражения и прохождения (а); зависимости реальной и мнимой частей эффективной диэлектрической проницаемости $\epsilon_{\text{эфф}}$ от пространственной переменной $\bar{z} = z/h$ (б); зависимость модуля напряженности магнитного поля $|H_x|$ от пространственной переменной $\bar{z} = z/h$ при $\kappa = 21,8$ (в); $\kappa = 38,8$ (г)

На рис. 4 представлены результаты расчетов частотной зависимости модуля коэффициента отражения для случая нормального падения возбуждающей волны (сплошная линия) и наклонного падения ($\alpha = 45^\circ$, пунктирная линия).

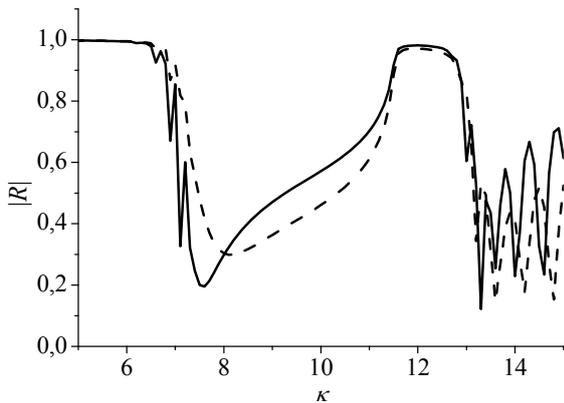


Рис. 4. Частотная зависимость модуля коэффициента отражения для различных углов падения: сплошная линия – $\alpha = 0^\circ$, пунктирная – $\alpha = 45^\circ$

Как видно, при малых значениях частотного параметра κ имеет место практически полное

отражение. Для этих κ реальная часть эффективной диэлектрической проницаемости принимает отрицательные значения.

В окрестности гибридной частоты $\kappa_r = \sqrt{\kappa_p^2 + \kappa_H^2}$ наблюдается минимум модуля коэффициента отражения. При этом значении частотного параметра реальная часть эффективной диэлектрической проницаемости обращается в нуль при некотором значении переменной \bar{z} , а мнимая часть принимает максимальное значение (рис. 5). Как показали численные расчеты, в этом случае коэффициент поглощения, определяемый по формуле $W = 1 - |R|^2 - |T|^2$ (T – коэффициент прохождения), принимает максимальное значение.

При более высоких значениях частотного параметра $\kappa \gg \kappa_p$ (κ_p – плазменная частота, соответствующая максимальному значению концентрации электронов полупроводникового слоя) реальная часть эффективной диэлектрической проницаемости становится положительной и частотная зависимость коэффициента отражения имеет осциллирующий характер.

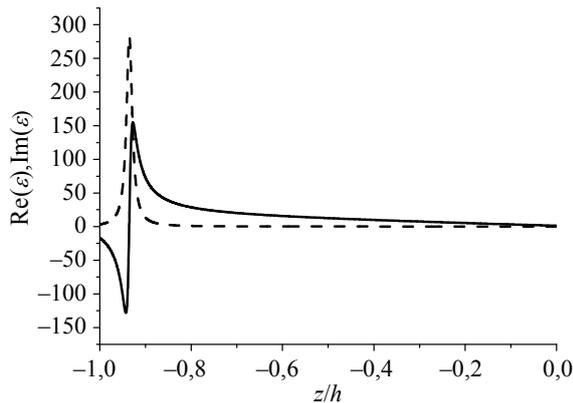


Рис. 5. Зависимости реальной и мнимой частей эффективной диэлектрической проницаемости от пространственной переменной $\bar{z} = z/h$ при резонансном значении частотного параметра $\kappa_{\text{рез}} = 7,6$

Выводы. Разработан алгоритм решения задач дифракции волн на неоднородных анизотропных слоях, элементы тензора которых зависят только от одной пространственной переменной. Он основан на построении специальных решений задачи Коши для уравнения Рикатти. Для применения разработанного алгоритма достаточно потребовать, чтобы эффективные диэлектрические проницаемости были непрерывно-дифференцируемыми функциями пространственной координаты.

Апробация алгоритма на ряде задач дифракции показала его высокую вычислительную эффективность.

Получена длинноволновая асимптотика для коэффициента отражения плоских однородных волн от неоднородного анизотропного диэлектрического слоя в предположении, что элементы тензора среды не зависят от частотного параметра.

Библиографический список

1. Неганов В. А. Теория и применение устройств СВЧ / В. А. Неганов, Г. П. Яровой. – М.: Радио и связь, 2006. – 718 с.
2. Шварцбург А. Б. Нанооптика градиентных диэлектрических пленок / А. Б. Шварцбург, М. Б. Агранат, О. В. Чефонов // Квантовая электроника. – 2009. – 39, № 10. – С. 948–952.
3. Ерохин Н. С. Поляризационные эффекты в градиентной нанооптике / Н. С. Ерохин, Ю. М. Зуева, А. Б. Шварцбург // Квантовая электроника. – 2013. – 43, № 9. – С. 785–790.
4. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах / Л. М. Бреховских. – М.: Наука, 1973. – 343 с.
5. Зайцев В. В. Численный анализ отражений от слоя неоднородной плазмы / В. В. Зайцев, Д. Н. Панин, Г. П. Яровой // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. – 2000. – 3, № 1. – С. 9–12.
6. Моисеева Н. М. Отражение и прохождение электромагнитных волн на границе неоднородной среды с дисперсией: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук / Н. М. Моисеева. – Волгоград, 2005. – 25 с.
7. Панин Д. Н. Анализ отражений от анизотропного слоя феррита с неоднородной процессией намагниченности / Д. Н. Панин, А. В. Никушин // Материалы IV Всерос. конф. Радиолокация и радиосвязь. – ИРЭ РАН, 2010. – С. 674–680.

8. Численно-аналитический метод решения задач дифракции волн на слоисто-неоднородных средах / А. В. Бровенко, П. Н. Мележик, С. Б. Панин, А. Е. Поединчук // Физические основы приборостроения. – 2013. – 2, № 1. – С. 34–47.
9. Шестопалов В. П. Динамическая теория решеток / В. П. Шестопалов, Ю. К. Сиренко. – К.: Наук. думка, 1989. – 216 с.
10. Монастырный П. И. Вычислительные методы: в 2 т. Т. 2 / П. И. Монастырный, В. И. Крылов, В. В. Бобков. – М.: Наука, 1977. – 625 с.

Рукопись поступила 07.08.2014.

A. V. Brovenko, P. N. Melezhhik,
A. Y. Poyedinchuk

A NUMERICAL ANALYTICAL METHOD FOR SOLVING PROBLEMS OF ELECTROMAGNETIC WAVE DIFFRACTION BY NON-UNIFORM ANISOTROPIC LAYERS

A numerical analytical method is proposed for finding reflection and transmission amplitudes of a plane linearly polarized electromagnetic wave obliquely incident on a non-uniform anisotropic dielectric layer, the tensor elements of which depend on a single spatial coordinate. The method is based on constructing a special case solution to the Riccati equation for the Cauchy problem and enables a qualitative description of the wave diffraction by the electrodynamic structure of the type within a unitary framework. The method efficiency is demonstrated by the numerical solution results obtained for a set of diffraction problems on non-uniform gyrotropic plasma-like layers. Long-wave asymptotics of the reflection coefficient of a plane homogeneous wave have been obtained in the case of its incidence on a non-uniform gyrotropic layer whose tensor elements do not depend on the frequency parameter.

Key words: non-uniform anisotropic layer, dielectric permittivity tensor, wave diffraction, Cauchy problem for Riccati equation, numerical analytical method.

A. V. Brovenko, P. M. Melezhhik, A. Y. Poyedinchuk

ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ДИФРАКЦІЇ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ НА НЕОДНОРІДНИХ АНІЗОТРОПНИХ ШАРАХ

Запропоновано чисельно-аналітичний метод для визначення амплітуд відбиття та проходження плоскої лінійно поляризованої електромагнітної хвилі, що падає під нахилом на неоднорідний анизотропний діелектричний шар, елементи тензора якого залежать тільки від однієї просторової координати. Основою методу є побудова спеціальних розв'язків задачі Коші для рівняння Рікатті, що дає можливість у рамках єдиного підходу якісно дослідити процес дифракції хвиль на електродинамічних структурах такого типу. Ефективність запропонованого методу показано на низці приладів чисельного розв'язання задач дифракції на неоднорідних гіротропних плазмopodobних шарах. Одержано довгохвильову асимптотику для коефіцієнта відбиття плоскої однорідної хвилі від неоднорідного гіротропного шару враховуючи те, що елементи тензора останнього не залежать від частотного параметра.

Ключові слова: неоднорідний анизотропний шар, тензор діелектричної проникності, дифракція хвиль, задача Коші для рівняння Рікатті, чисельно-аналітичний метод.