

С. А. Стешенко, С. А. Приколотин, А. А. Кириленко, Д. Ю. Кулик, Л. А. Рудь, С. Л. Сенкевич
 Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины
 12, ул. Ак. Проскуры, Харьков, 61085, Украина
 E-mail: kirilenko@ire.kharkov.ua

**МЕТОД ЧАСТИЧНЫХ ОБЛАСТЕЙ С УЧЕТОМ ОСОБЕННОСТЕЙ ВО ВНУТРЕННИХ ЗАДАЧАХ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ КУСОЧНО-КООРДИНАТНЫМИ ГРАНИЦАМИ
 ЧАСТЬ 2. ПЛОСКО-ПОПЕРЕЧНЫЕ СОЕДИНЕНИЯ И «IN-LINE» ОБЪЕКТЫ**

Рассматривается применение обобщенного метода частичных областей для вычисления характеристик плоско-поперечных соединений волноводных линий произвольного кусочно-координатного (ортогонного) сечения в декартовых координатах и «in-line» устройств на их основе. Анализируются особенности геометрии конкретных задач, позволяющих повысить эффективность вычислений. Исследуется достоверность полученных алгоритмов. Ил. 5. Библиогр.: 9 назв.

Ключевые слова: СВЧ-элементы, метод частичных областей, ортогон, декартовы координаты.

Составными частями волноводно-резонаторных, антенных и других объектов СВЧ-электродинамики очень часто являются волноводы сложных поперечных сечений кусочно-координатного (ортогонного) типа. Интерес к ним особенно вырос сейчас, когда выяснилось, что они могут обеспечить радикальное решение многих проблем, недоступное при использовании классических сечений. Наличие универсальных, точных и эффективных математических моделей, которые позволяют находить спектры собственных волн волноводов ортогонного типа любой степени сложности, открывает широкие перспективы по применению для дальнейшего анализа и синтеза трехмерных СВЧ-объектов комбинации векторного метода частичных областей (МЧО) и метода обобщенных матриц рассеяния. МЧО применяется для нахождения матрицы рассеяния плоскостного стыка волноводов, а метод обобщенных матриц рассеяния позволяет получить общую матрицу рассеяния всего устройства с учетом затухающих волн.

1. Матрица рассеяния элементарной неоднородности. Рассмотрим случай сочленения одного объемлющего («широкого») с несколькими объемлемыми («узкими») волноводами. Заметим, что сечение волновода 0 объемлет сечения группы волноводов 1, 2, ..., J (волновод 0 является широким по отношению к волноводам 1, 2, ..., J), если поперечное сечение каждого j-го волновода (j = 1, 2, ..., J) полностью лежит внутри поперечного сечения волновода 0. Волноводы 1, 2, ..., J в этом случае назовем объемлемыми, или узкими.

Пусть со стороны объемлемого волновода j падает волна единичной амплитуды с номером p; декартову систему координат введем таким образом, чтобы плоскость z = 0 совпадала с плоскостью стыка волноводов, а ось z была направлена в сторону широкого волновода. Тогда поля в каждом волноводе можно представить в виде разложений по полям собственных мод

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \mathbf{E}^{(0)} \\ \mathbf{H}^{(0)} \end{pmatrix} = \sum_{n=1} S_{np}^{(0,j)} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_n^{(0,+)} \\ \mathbf{H}_n^{(0,+)} \end{pmatrix}, & z \geq 0, \\ \begin{pmatrix} \mathbf{E}^{(i)} \\ \mathbf{H}^{(i)} \end{pmatrix} = \delta_{ij} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_p^{(0,+)} \\ \mathbf{H}_p^{(0,+)} \end{pmatrix} + \sum_{n=1} S_{np}^{(i,j)} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_n^{(i,-)} \\ \mathbf{H}_n^{(i,-)} \end{pmatrix}, & z \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, J, \end{cases} \quad (1)$$

где $(\mathbf{E}^{(i)}, \mathbf{H}^{(i)})$ – поле в i-м волноводе; $S_{np}^{(i,j)}$ – элемент матрицы рассеяния; $(\mathbf{E}_n^{(i,\pm)}, \mathbf{H}_n^{(i,\pm)})$ – поле n-й моды i-го волновода, распространяющейся в положительном (отрицательном) направлении оси z; δ_{ij} – дельта-символ Кронекера.

Из условия непрерывности тангенциальных полей в плоскости стыка волноводов

$$\begin{cases} \mathbf{E}_t^{(0)}(x, y) - \sum_{i=1}^J \chi(U^{(i)}) \mathbf{E}_t^{(i)}(x, y) = 0, \\ z = 0, \quad (x, y) \in U^{(0)}, \\ \mathbf{H}_t^{(0)}(x, y) - \mathbf{H}_t^{(i)}(x, y) = 0, \\ z = 0, \quad (x, y) \in U^{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, J, \end{cases} \quad (2)$$

где $U^{(i)}$ – поперечное сечение i-го волновода; χ – индикатор подмножества:

$$\chi(U^{(i)}) = \begin{cases} 0, & (x, y) \notin U^{(i)}, \\ 1, & (x, y) \in U^{(i)}. \end{cases} \quad (3)$$

Проецируя первое уравнение в (2) на систему функций $\mathbf{e}_k^{(0)}$, k = 1, 2, ..., а второе – на систему функций $\mathbf{h}_k^{(i)}$, k = 1, 2, ... получим

$$\begin{cases} \int_{U^{(0)}} \mathbf{E}_t^{(0)} \cdot \mathbf{e}_k^{(0)} ds - \sum_{i=1}^J \int_{U^{(i)}} \mathbf{E}_t^{(i)} \cdot \mathbf{e}_k^{(0)} ds = 0, \\ k = 1, 2, \dots, \\ \int_{U^{(i)}} (\mathbf{H}_t^{(0)} - \mathbf{H}_t^{(i)}) \cdot \mathbf{h}_k^{(i)} ds = 0, \\ k = 1, 2, \dots, \quad i = 1, 2, \dots, J, \end{cases} \quad (4)$$

где $\mathbf{e}_k^{(i)}$ ($\mathbf{h}_k^{(i)}$) – нормированная тангенциальная компонента электрического (магнитного) поля k -й моды i -го волновода.

Пользуясь соотношениями $\mathbf{H}_t^\pm = \pm \frac{1}{W} \mathbf{z}_0 \times \mathbf{E}_t^\pm$,

$\mathbf{h} = \mathbf{z}_0 \times \mathbf{e}$, $\mathbf{E}_t^\pm = \sqrt{W} \mathbf{e}$, (1) и ортогональностью собственных мод волноводов, приходим к выражениям

$$\begin{cases} S_{kp}^{(0,j)} \sqrt{W_k^{(0)}} - \sum_{i=1}^J \sum_{n=1}^J S_{np}^{(i,j)} \sqrt{W_n^{(i)}} (\mathbf{e}_k^{(0)}, \mathbf{e}_n^{(i)})_i = \\ = \sqrt{W_p^{(j)}} (\mathbf{e}_k^{(0)}, \mathbf{e}_p^{(j)})_j, \quad k = 1, 2, \dots, \\ \sum_{n=1}^J S_{np}^{(0,j)} \frac{1}{\sqrt{W_n^{(0)}}} (\mathbf{e}_n^{(0)}, \mathbf{e}_k^{(i)})_i + S_{kp}^{(i,j)} \frac{1}{\sqrt{W_k^{(i)}}} = \\ = \delta_{ij} \delta_{kp} \frac{1}{\sqrt{W_p^{(j)}}}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad i = 1, 2, \dots, J, \end{cases} \quad (5)$$

где $W_k^{(i)}$ – волновое сопротивление k -й волны i -го волновода; скалярные произведения вида $(\mathbf{f}, \mathbf{g})_i = \int_U \mathbf{f} \cdot \mathbf{g} ds$ назовем «интегралами связи».

Равенства (5) при всех возможных значениях p порождают систему линейных уравнений (СЛАУ) относительно неизвестных коэффициентов матрицы рассеяния. Запишем ее в матричном виде, обозначив $\mathbf{W}^{(i)} = \text{diag}(W_1^{(i)}, W_2^{(i)}, \dots)$; $\mathbf{M}^{(i)}$ – матрица с элементами $M_{kn}^{(i)} = (\mathbf{e}_k^{(0)}, \mathbf{e}_n^{(i)})_i$; \mathbf{I} – единичная матрица:

$$\begin{cases} \mathbf{S}^{(0,j)} - \sum_{i=1}^J [\mathbf{W}^{(0)}]^{-1/2} \mathbf{M}^{(i)} [\mathbf{W}^{(i)}]^{1/2} \mathbf{S}^{(i,j)} = \\ = [\mathbf{W}^{(0)}]^{-1/2} \mathbf{M}^{(j)} [\mathbf{W}^{(j)}]^{1/2}, \\ [\mathbf{W}^{(i)}]^{1/2} [\mathbf{M}^{(j)}]^T [\mathbf{W}^{(0)}]^{-1/2} \mathbf{S}^{(0,j)} + \mathbf{S}^{(i,j)} = \delta_{ij} \mathbf{I}, \\ i = 1, 2, \dots, J. \end{cases} \quad (6)$$

Выделим $\mathbf{S}^{(0,j)}$ из первого уравнения и подставим его во второе:

$$\begin{aligned} & \left([\mathbf{W}^{(in)}]^{1/2} \mathbf{M}^T [\mathbf{W}^{(0)}]^{-1} \mathbf{M} [\mathbf{W}^{(in)}]^{1/2} + \mathbf{I} \right) \mathbf{S}^{(in,in)} + \\ & + [\mathbf{W}^{(in)}]^{1/2} \mathbf{M}^T [\mathbf{W}^{(0)}]^{-1} \mathbf{M} [\mathbf{W}^{(in)}]^{1/2} = \mathbf{I}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\mathbf{S}^{(in,in)} = \{S^{(i,j)}\}_{j,i=1,\dots,J}$ – блочная матрица рассеяния, описывающая связь волн объемлемых волноводов друг с другом, то есть собственные матрицы отражения в те же объемлемые ($\mathbf{S}^{(i,i)}, i \neq 0$) и матрицы прохождения в другие объемлемые ($\mathbf{S}^{(i,j)}, i \neq j$); $\mathbf{W}^{(in)} = \text{diag}\{\mathbf{W}^{(1)}, \mathbf{W}^{(2)}, \dots, \mathbf{W}^{(J)}\}$ – диагональная матрица, содержащая волновые сопротивления объемлемых волноводов; $\mathbf{M} = (\mathbf{M}^{(1)}, \mathbf{M}^{(2)}, \dots, \mathbf{M}^{(J)})$ – матрица интегралов

связи, содержащая матричные блоки-столбцы $\mathbf{M}^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, J$.

Найдем матрицу $\mathbf{S}^{(0,in)} = \{\mathbf{S}^{(0,1)}, \mathbf{S}^{(0,2)}, \dots, \mathbf{S}^{(0,J)}\}$, описывающую прохождение волн объемлемых волноводов в объемлющий из первого уравнения (6), а в (7) найдем выражение для матрицы $\mathbf{S}^{(in,in)}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^{(in,in)} &= \left(\mathbf{I} + [\mathbf{W}^{(in)}]^{1/2} \mathbf{M}^T [\mathbf{W}^{(0)}]^{-1} \mathbf{M} [\mathbf{W}^{(in)}]^{1/2} \right)^{-1} \times \\ & \times \left(\mathbf{I} - [\mathbf{W}^{(in)}]^{1/2} \mathbf{M}^T [\mathbf{W}^{(0)}]^{-1} \mathbf{M} [\mathbf{W}^{(in)}]^{1/2} \right); \end{aligned} \quad (8)$$

$$\mathbf{S}^{(0,in)} = [\mathbf{W}^{(0)}]^{-1/2} \mathbf{M} [\mathbf{W}^{(in)}]^{1/2} (\mathbf{I} + \mathbf{S}^{(in,in)}). \quad (9)$$

Разумеется, что для получения полной матрицы рассеяния нужно рассмотреть и случай падения волны p со стороны широкого волновода. Поля в волноводах теперь представляются в виде

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \mathbf{E}^{(0)} \\ \mathbf{H}^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_p^{(0,+)} \\ \mathbf{H}_p^{(0,+)} \end{pmatrix} + \sum_{n=1}^J S_{np}^{(0,0)} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_n^{(0,-)} \\ \mathbf{H}_n^{(0,-)} \end{pmatrix}, \quad z \leq 0, \\ \begin{pmatrix} \mathbf{E}^{(i)} \\ \mathbf{H}^{(i)} \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^J S_{np}^{(i,0)} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_n^{(i,+)} \\ \mathbf{H}_n^{(i,+)} \end{pmatrix}, \quad z \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, J. \end{cases} \quad (10)$$

Из условий непрерывности в плоскости стыка приходим к набору матричных равенств с разными $k = 1, 2, \dots$, и $i = 1, 2, \dots, J$:

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^J S_{np}^{(0,0)} (\mathbf{E}_{n,t}^{(0,-)}, \mathbf{e}_k^{(0)})_0 - \sum_{i=1}^J \sum_{n=1}^J S_{np}^{(i,0)} (\mathbf{E}_{n,t}^{(i,+)}, \mathbf{e}_k^{(0)})_i = \\ = -(\mathbf{E}_{p,t}^{(0,+)}, \mathbf{e}_k^{(0)})_0, \\ \sum_{n=1}^J S_{np}^{(0,0)} \frac{1}{W_n^{(0)}} (\mathbf{E}_{n,t}^{(0,-)}, \mathbf{e}_k^{(i)})_i + \\ + \sum_{n=1}^J S_{np}^{(i,0)} \frac{1}{W_n^{(i)}} (\mathbf{E}_{n,t}^{(i,+)}, \mathbf{e}_k^{(i)})_i = \frac{1}{W_p^{(0)}} (\mathbf{E}_{p,t}^{(0,+)}, \mathbf{e}_k^{(i)})_i. \end{cases} \quad (11)$$

Путем несложных преобразований эта система приводится к виду

$$\begin{cases} S_{kp}^{(0,0)} - \sum_{i=1}^J \sum_{n=1}^J S_{np}^{(i,0)} \frac{\sqrt{W_n^{(i)}}}{\sqrt{W_k^{(0)}}} (\mathbf{e}_k^{(0)}, \mathbf{e}_n^{(i)})_i = \\ = -\delta_{kp}, \\ \sum_{n=1}^J S_{np}^{(0,0)} \frac{\sqrt{W_k^{(i)}}}{\sqrt{W_n^{(0)}}} (\mathbf{e}_n^{(0)}, \mathbf{e}_k^{(i)})_i + S_{kp}^{(i,0)} = \\ = \frac{\sqrt{W_k^{(i)}}}{\sqrt{W_p^{(0)}}} (\mathbf{e}_p^{(0)}, \mathbf{e}_k^{(i)})_i. \end{cases} \quad (12)$$

где $k = 1, 2, \dots$, $i = 1, 2, \dots, J$.

Рассмотрев все требуемые $p = 1, 2, \dots$, запишем систему (12) в матричном виде ($i = 1, 2, \dots, J$):

$$\begin{cases} \mathbf{S}^{(0,0)} - \sum_{i=1}^J [\mathbf{W}^{(0)}]^{-1/2} \mathbf{M}^{(i)} [\mathbf{W}^{(i)}]^{1/2} \mathbf{S}^{(i,0)} = -\mathbf{I}, \\ [\mathbf{W}^{(i)}]^{1/2} [\mathbf{M}^{(i)}]^T [\mathbf{W}^{(0)}]^{-1/2} \mathbf{S}^{(0,0)} + \mathbf{S}^{(i,0)} = [\mathbf{W}^{(i)}]^{1/2} [\mathbf{M}^{(i)}]^T [\mathbf{W}^{(0)}]^{-1/2}. \end{cases} \quad (13)$$

Откуда получим

$$\mathbf{S}^{(0,0)} = \sum_{i=1}^J [\mathbf{W}^{(0)}]^{-1/2} \mathbf{M}^{(i)} [\mathbf{W}^{(i)}]^{1/2} \mathbf{S}^{(i,0)} - \mathbf{I} = [\mathbf{W}^{(0)}]^{-1/2} \mathbf{M} [\mathbf{W}^{(in)}]^{1/2} \mathbf{S}^{(in,0)} - \mathbf{I}; \quad (14)$$

$$\mathbf{S}^{(in,0)} = 2 \left(\mathbf{I} + [\mathbf{W}^{(in)}]^{1/2} \mathbf{M}^T [\mathbf{W}^{(0)}]^{-1} \mathbf{M} [\mathbf{W}^{(in)}]^{1/2} \right)^{-1} [\mathbf{W}^{(in)}]^{1/2} \mathbf{M}^T [\mathbf{W}^{(0)}]^{-1/2}. \quad (15)$$

Полную матрицу рассеяния находим как совокупность решений (8), (9), (14), (15).

Хотя спектр собственных мод волновода бесконечен и обобщенная матрица рассеяния в принципе также бесконечномерна, однако численные алгоритмы имеют дело с конечномерными матрицами, и приходится каким-то образом «урезать» спектр собственных мод каждого волновода. Первый шаг к разумному и единообразному способу такого усечения был сделан Р. Миттрой и описан в [1]. Обобщение «правила Миттры» на случай МЧО, оперирующего с системами второго рода, найденное в основном путем численных экспериментов, сделано в работах ряда советских и зарубежных авторов, в том числе авторов данной работы: наилучшая скорость сходимости численных решений с «редуцированным» базисом достигается в случаях, когда число собственных волн, учтенных в расчетах, меняется пропорционально соотношению площадей волноводов [3–5] или в близкой, но более удобной «электродинамической» формулировке, когда максимальные частоты отсеки волн, учтенных в каждом из соединяемых волноводов, совпадают.

Для нас важно то, что такая модификация правила Миттры носит обобщающий характер и не зависит от конкретной геометрии и топологии поперечных сечений. Впервые она была использована в работах Ф. Арндта и учеников.

2. Расчет интегралов связи. Предметом раздела является описание самого алгоритма решения задач рассеяния на волноводных неоднородностях с координатными границами, потому

уместно описать, как рассчитываются интегралы связи, являющиеся элементами матрицы \mathbf{M} из (8), (9), (14), (15). Компоненты поля каждой моды представлены в виде кусочно-непрерывных функций [2] и каждый интеграл связи сводится к сумме частичных интегралов по прямоугольным подобластям наложений каждой подобласти узкого волновода на соответствующие подобласти широкого. Таким образом, интеграл связи между модой k широкого и модой n узкого волноводов (с индексами 0 и i соответственно) можно представить в следующем виде:

$$\left(\mathbf{e}_k^{(0)}, \mathbf{e}_n^{(i)} \right)_i = \sum_{j=0}^{N_0} \sum_{t=0}^{N_i} \int_{U_j^{(0)} \cap U_t^{(i)}} \mathbf{e}_k^{(0)} \cdot \mathbf{e}_n^{(i)} ds. \quad (16)$$

Здесь N_j – количество прямоугольных подобластей в поперечном сечении j -го волновода; $U_k^{(j)}$ – k -я подобласть j -го волновода.

Так как каждая компонента вектора $\mathbf{e}_s^{(j)}$ представляется в виде разложения в ряд по произведениям тригонометрических функций, все интегралы вида (16) могут быть представлены в виде конечных сумм простых аналитических выражений. Приведем пример расчета интегралов связи между TE -волной объемлющего волновода 0 с номером k с TE -волной объемлемого волновода i с номером n (оба волновода имеют ортогонные поперечные сечения). Нормированная тангенциальная компонента поля TE -волны ортогонного волновода при разбиении ортогона на подобласти горизонтальными линиями представляется в виде

$$\mathbf{e}_{TE}^{(i)} = \sum_{m=0}^{M^{(r,i)}} \left(\begin{array}{l} -k_{y,m}^{(r,i)} \cos(k_{x,m}^{(r,i)}(x - x_0^{(r,i)})) \times \\ \times [A_m^{(r,i)} \sin(k_{y,m}^{(r,i)}(y - y_0^{(r,i)})) - B_m^{(r,i)} \sin(k_{y,m}^{(r,i)}(y_0^{(r,i)} + h^{(r,i)} - y))] \mathbf{z}_0 + \\ + k_{x,m}^{(r,i)} \sin(k_{x,m}^{(r,i)}(x - x_0^{(r,i)})) \times \\ \times [A_m^{(r,i)} \cos(k_{y,m}^{(r,i)}(y - y_0^{(r,i)})) + B_m^{(r,i)} \cos(k_{y,m}^{(r,i)}(y_0^{(r,i)} + h^{(r,i)} - y))] \mathbf{z}_0 \end{array} \right), \quad (x, y) \in U_r^{(i)}. \quad (17)$$

При такой записи поля имеем

$$\left(\mathbf{e}_{TE}^{(0)}, \mathbf{e}_{TE}^{(0)} \right)_i = \sum_{j=0}^{N_0} \sum_{t=0}^{N_i} \int_{U_j^{(0)} \cap U_t^{(i)}} \mathbf{e}_{TE}^{(0)} \cdot \mathbf{e}_{TE}^{(i)} ds; \quad (18)$$

$$\int_{U_j^{(0)} \cap U_t^{(i)}} \mathbf{e}_{TE}^{(0)} \cdot \mathbf{e}_{TE}^{(i)} ds = \sum_{m=0}^{M^{(t,i)}} \sum_{v=0}^{M^{(j,0)}} \int I_{TE,v,m}^{(j,t)}(x, y) dx dy; \quad (19)$$

Принтегрировав отдельно по x и y , можем записать

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_{TE}^{(0)}, \mathbf{e}_{TE}^{(i)}) = & \sum_{j=0}^{N_0} \sum_{t=0}^{N_t} \sum_{m=0}^{M^{(t,i)}} \sum_{v=0}^{M^{(j,0)}} \left\{ k_{y,v}^{(j,0)} k_{y,m}^{(t,i)} I^{(c)}(k_{x,v}^{(j,0)}, -x_0^{(j,0)}, k_{x,m}^{(t,i)}, -x_0^{(t,i)}, G_x^{(j,t,0,i)}) \times \right. \\ & \left. \begin{aligned} & \left[\begin{aligned} & A_v^{(j,0)} A_m^{(t,i)} I^{(s)}(k_{y,v}^{(j,0)}, -y_0^{(j,0)}, k_{y,m}^{(t,i)}, -y_0^{(t,i)}, G_y^{(j,t,0,i)}) + \\ & + B_v^{(j,0)} B_m^{(t,i)} I^{(s)}(-k_{y,v}^{(j,0)}, -y_0^{(j,0)} - h^{(j,0)}, -k_{y,m}^{(t,i)}, -y_0^{(t,i)} - h^{(t,i)}, G_y^{(j,t,0,i)}) - \\ & - A_v^{(j,0)} B_m^{(t,i)} I^{(s)}(k_{y,v}^{(j,0)}, -y_0^{(j,0)}, -k_{y,m}^{(t,i)}, -y_0^{(t,i)} - h^{(t,i)}, G_y^{(j,t,0,i)}) - \\ & - B_v^{(j,0)} A_m^{(t,i)} I^{(s)}(-k_{y,v}^{(j,0)}, -y_0^{(j,0)} - h^{(j,0)}, k_{y,m}^{(t,i)}, -y_0^{(t,i)}, G_y^{(j,t,0,i)}) \end{aligned} \right] + \\ & + k_{x,v}^{(j,0)} k_{x,m}^{(t,i)} I^{(s)}(k_{x,v}^{(j,0)}, -x_0^{(j,0)}, k_{x,m}^{(t,i)}, -x_0^{(t,i)}, G_x^{(j,t,0,i)}) \times \\ & \left. \left[\begin{aligned} & A_v^{(j,0)} A_m^{(t,i)} I^{(c)}(k_{y,v}^{(j,0)}, -y_0^{(j,0)}, k_{y,m}^{(t,i)}, -y_0^{(t,i)}, G_y^{(j,t,0,i)}) + \\ & + B_v^{(j,0)} B_m^{(t,i)} I^{(c)}(k_{y,v}^{(j,0)}, -y_0^{(j,0)} - h^{(j,0)}, k_{y,m}^{(t,i)}, -y_0^{(t,i)} - h^{(t,i)}, G_y^{(j,t,0,i)}) - \\ & + A_v^{(j,0)} B_m^{(t,i)} I^{(c)}(k_{y,v}^{(j,0)}, -y_0^{(j,0)}, k_{y,m}^{(t,i)}, -y_0^{(t,i)} - h^{(t,i)}, G_y^{(j,t,0,i)}) - \\ & + B_v^{(j,0)} A_m^{(t,i)} I^{(c)}(k_{y,v}^{(j,0)}, -y_0^{(j,0)} - h^{(j,0)}, k_{y,m}^{(t,i)}, -y_0^{(t,i)}, G_y^{(j,t,0,i)}) \end{aligned} \right] \right\} \end{aligned}$$

где $G_x^{(j,t,0,i)} = \text{Pr}_x U_j^{(0)} \cap U_t^{(i)}$ – проекция пересечения областей $U_j^{(0)}$ и $U_t^{(i)}$ на ось x ;
 $G_y^{(j,t,0,i)} = \text{Pr}_y U_j^{(0)} \cap U_t^{(i)}$ – проекция пересечения областей $U_j^{(0)}$ и $U_t^{(i)}$ на ось y ;

$$\begin{aligned} I^{(c)}(a_1, b_1, a_2, b_2, \Omega) &= \\ &= \int_{\Omega} \cos(a_1(x + b_1)) \cos(a_2(x + b_2)) dx, \\ I^{(s)}(a_1, b_1, a_2, b_2, \Omega) &= \\ &= \int_{\Omega} \sin(a_1(x + b_1)) \sin(a_2(x + b_2)) dx. \end{aligned} \quad (20)$$

Аналогично можно получить выражения для расчета остальных интегралов связи. Стоит отметить, что полученные интегралы $I^{(c)}$ и $I^{(s)}$ имеют простое аналитическое представление.

Следует подчеркнуть существенное отличие данной реализации МЧО от стандартных ситуаций, где базисы разложения электромагнитных полей по двум сторонам «апертуры сшивания», как и соответствующие проекционные функции, заданы аналитически или, по крайней мере, находятся из простых дисперсионных уравнений численно с легко оцениваемой точностью. В нашем случае и постоянные распространения волн ортогона, и сами базисные функции, задаваемые рядами Фурье конечных размеров, есть продукт обращения матричных операторов, в принципе бесконечномерных. Базисы рассчитываются с определенной ошибкой, что, естественно, сказывается и на расчете элементов матрицы рассеяния.

Общая оценка точности расчета базисов ортогонных волноводов дана в части I [2]. Здесь мы укажем только, что параметры алгоритма расчета базисов ортогонных волноводов обычно выбирались такими, чтобы ошибка расчета базисов была на $1,5 \div 2$ порядка меньше, чем предполагаемая ошибка элементов \mathbf{S} -матрицы, возникающая при усечении матричных операторов в (8), (9), (14), (15). В результате ортогональность векторных собственных функций, предполагавшаяся идеальной при получении (8), (9), (14), (15), оказывается нарушенной и к некоторым диагональным матричным операторам, фигурирующим в алгоритме, мог бы добавиться «недиагональный фон» из элементов порядка $10^{-5} \dots 10^{-6}$. Поэтому требуемая ошибка расчета элементов \mathbf{S} -матрицы порядка $10^{-3} \dots 10^{-4}$, обеспечивается выбором размеров усеченных матричных операторов в (8), (9), (14), (15).

В качестве косвенного примера оценки точности расчетов приведем тот факт, что классическое соотношение

$$(\mathbf{e}_{TE}^{(0)}, \mathbf{e}_{TM}^{(i)}) \equiv 0,$$

следующее из формулы Грина, реально выполняется с точностью не хуже 10^{-4} .

3. Метод обобщенных матриц рассеяния. Описанный выше обобщенный МЧО позволяет находить матрицу рассеяния только стыка волноводов. Поскольку на практике приходится иметь дело с волноводными объектами, состоящими из нескольких плоскостных сочленений различных линий, то для расчета всей задачи используется метод декомпозиции, названный ме-

тодом обобщенных матриц рассеяния [1]. Отличие обобщенной матрицы рассеяния от обычной заключается в том, что учитываются не только распространяющиеся, но и затухающие волны, зачастую радикально влияющие на характеристики сложного волноводного объекта. Для решения задачи дифракции на сложном составном волноводном объекте сначала применяют декомпозицию [6], разбивая всю задачу на несколько более простых подзадач, а затем – рекомпозицию. Рекомпозицию (или «сборку») можно проводить различными путями, и в зависимости от топологии объекта, каждый из возможных путей рекомпозиции будет более или менее выгодным с точки зрения затрат вычислительных мощностей. Для каждой задачи существует некий оптимум порядка рекомпозиции. Общий подход к оптимизации рекомпозиционной схемы описан в нашей работе [7].

4. Виртуальные волноводы. Выше при описании МЧО рассматривалось сочленение «объемлющего» волновода с пакетом «объемлемых». Часто при решении реальных задач возникают объекты, содержащие плоскостные сочленения двух волноводных трактов, ни один из которых нельзя назвать объемлющим по отношению к другому. В таких случаях возникает необходимость введения так называемых «виртуальных» волноводов [8]. Расчет S -матрицы сочленения тогда сводится к тому, что между волноводами, ни один из которых нельзя назвать широким относительно другого, вводится так называемый «виртуальный» волновод нулевой длины. Поперечное сечение последнего может выбираться различными способами:

– оно может представлять собой пересечение поперечных сечений первого и второго волноводов (рис. 1, а);

– может являться объединением поперечных сечений стыкуемых волноводов (рис. 1, б);

– может быть произвольной геометрической формы, которая описана около объединения сечений двух данных волноводов (рис. 1, в).

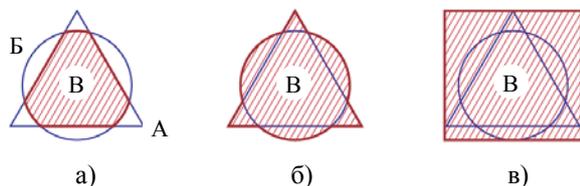


Рис. 1. Способы задания сечения виртуального волновода (В) на стыке треугольного (А) и круглого (Б) волноводов

Таким образом, в первом случае виртуальный волновод будет узким по отношению к двум другим, во втором и третьем – широким. Расчет сочленений таких волноводов теперь не выходит за рамки подхода, описанного выше.

В варианте рис. 1, в задача упрощается тем, что в качестве «виртуального» можно выбрать классические волноводы с простым базисом, и усложняется тем, что размер этого базиса будет намного больше, чем у сочленяемых.

5. Способ сшивания, который позволяет обойтись без введения виртуального волновода. Другой метод обхода ситуации, вызванной отсутствием в сочленении «узкого» и «широкого» волноводов, заключается в том, что без введения виртуального волновода можно шить поля через неизвестное поле на общей апертуре сочленяемых волноводов, применяя метод «апертурного» сшивания, как это делалось в части I [2] при поиске базисов ортогонных волноводов. С одной стороны этот подход позволяет избавиться от необходимости введения виртуального волновода, но с другой – предполагает расчет базиса новой сложной линии, которая в сечении представляет собой пересечение поперечных сечений сочленяемых волноводов, т. е. в нашем случае – новый ортогон. Здесь мы имеем дело с относительно редким, третьим случаем возникновения задачи, решению которой посвящена работа [2], когда необходимость в расчете базиса ортогонного волновода порождена самой вычислительной процедурой. Этот прием оказывается наиболее эффективным численно, что есть предмет отдельной публикации, но как легко доказывается, аналитически окончательный результат полностью совпадает с результатом «сборки» через S -матрицы, если поле на «апертуре» представлено как прямое разложение по волнам виртуального волновода.

6. Учет симметрии поперечных сечений. Производительность современных компьютеров позволяет, в принципе, не особо задумываться над оптимизацией программного кода, реализующего алгоритм. Тем не менее учет наибольшего количества свойств топологии СВЧ-объекта в математической модели позволяет увеличить ресурсоэффективность программы и достичь существенного сокращения времени решения прямой задачи. При решении задач многопараметрической оптимизации этот прирост производительности становится решающим, определяя принципиальную возможность решить ту или иную проблему за реальное время. Одним из свойств волноводных объектов, которое легко учитывается, но дает рост производительности в разы, является плоскостная симметрия.

Симметрия поперечных сечений. Известно, что если неоднородность в симметричном тракте не нарушает симметрию объекта, то при падении на эту неоднородность волна может возбудить только моды того же класса симметрии, что и падающая волна. Поскольку описанный в части I [2] метод нахождения модового базиса позволяет сразу учитывать симметрию попереч-

ного сечения, то, выделяя моды разных классов симметрии, можно ускорить решение задачи рассеяния, путем снижения порядка рассматриваемых матриц. Для этого нужно разбить эту задачу на несколько подзадач, каждая из которых соответствует своему типу симметрии, а затем объединить все эти матрицы в общую, хоть и разреженную, S -матрицу, включающую волны всех типов симметрии. Такой подход будет тем более эффективен, чем большее количество неоднород-

ностей, не нарушающих симметрию, расположены подряд, поскольку в таком случае объединять матрицы нужно только после подсоединения последней неоднородности.

Соответствующие процедуры реализованы в описываемом алгоритме. Реальный выигрыш в скорости расчетов при учете симметрии иллюстрирует рис. 2. Как видно из рисунка, учет одной плоскости симметрии ускоряет расчет в 2 раза, а двух плоскостей в 3 раза.

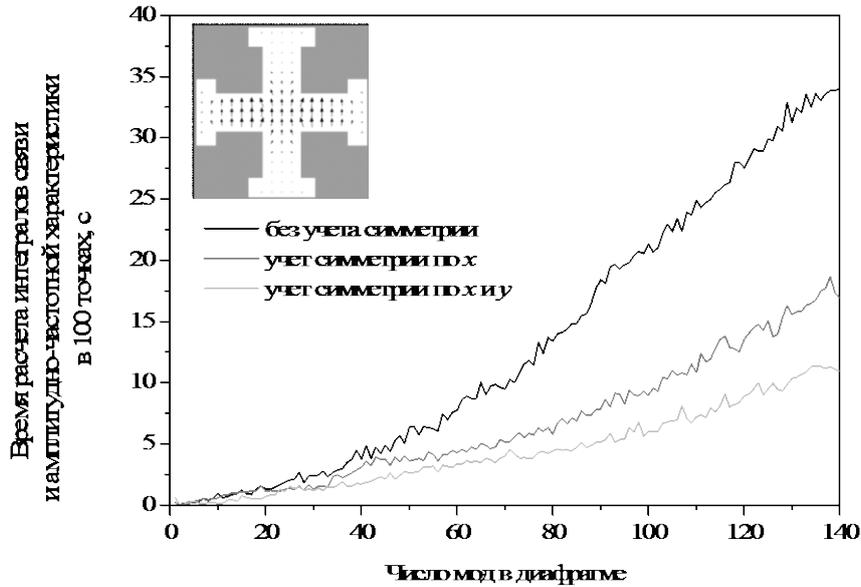


Рис. 2. Повышение эффективности вычислений путем учета поперечной симметрии объекта при расчете сложной диафрагмы

7. Верификация алгоритма решения векторных задач волноводной электродинамики с кусочно-координатными границами. Для того чтобы продемонстрировать устойчивость алгоритма, вернемся к примеру, который рассматривался в части I [2], а соответствующий чертеж представлен на рис. 3. В работе [2] был проведен

сравнительный анализ модового состава волновода «double split-ring», сечение которого при поиске базиса разбивалось на прямоугольные подобласти двумя разными способами: в первом случае – вертикальными, а во втором – горизонтальными линиями. При этом оказалось, что частоты отсечки мод совпали в среднем с точностью до 10^{-6} .

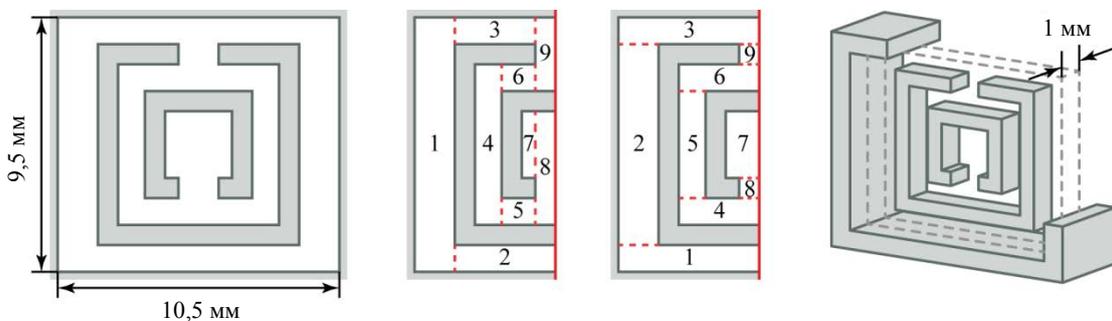


Рис. 3. Поперечное сечение «double split-ring» диафрагмы, «горизонтальное» и «вертикальное» разбиения поперечного сечения при нахождении базисов и эскиз диафрагмы в прямоугольном волноводе

Дальнейшее решение задачи дифракции показало, что эти незначительные различия модовых базисов практически не сказались на амплитудно-частотных характеристиках (АЧХ) устройства, которая представлена на рис. 4. Максимальное расхождение кривых по амплитуде не превышало величины 10^{-4} . В остальных точках кривые практически совпадали с точностью $10^{-5} \dots 10^{-6}$. Различий в частотах резонансов не наблюдалось. Напомним, что в реализованных алгоритмах параметром, который регулирует точность, является f_{cut} – частота, которую не превышают частоты

отсечки мод, учитываемых в проекционных алгоритмах.

Для сравнения на рис. 4 также приведены результаты расчета АЧХ, проведенные на программе *CST Microwave Studio* при максимальной точности. Здесь мы видим хорошее совпадение результатов. Необходимо отметить, что при повышении точности расчетов, кривые, полученные при помощи *Microwave Studio*, все больше приближались к нашим кривым. К сожалению, увеличить точность расчетов в *Microwave Studio* не удалось из-за ее ограничений.

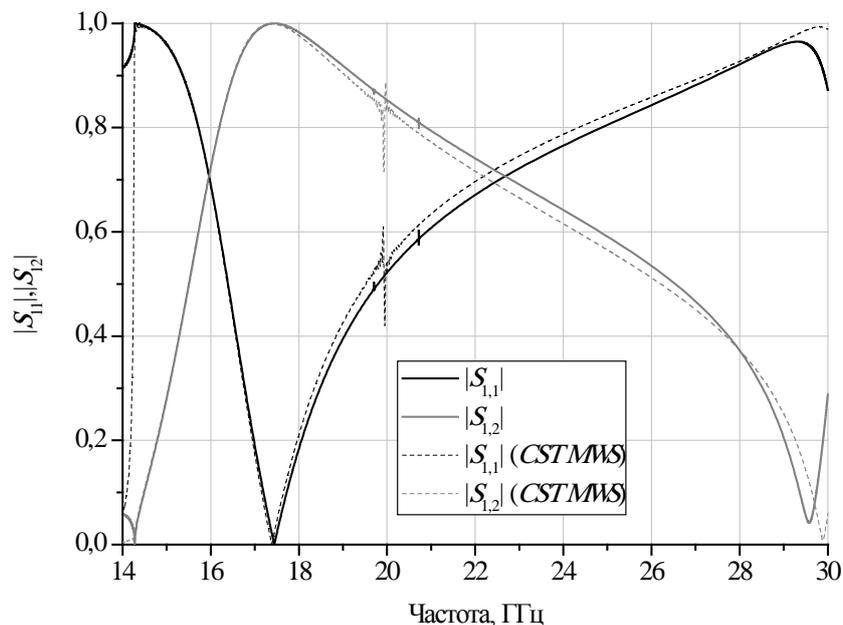


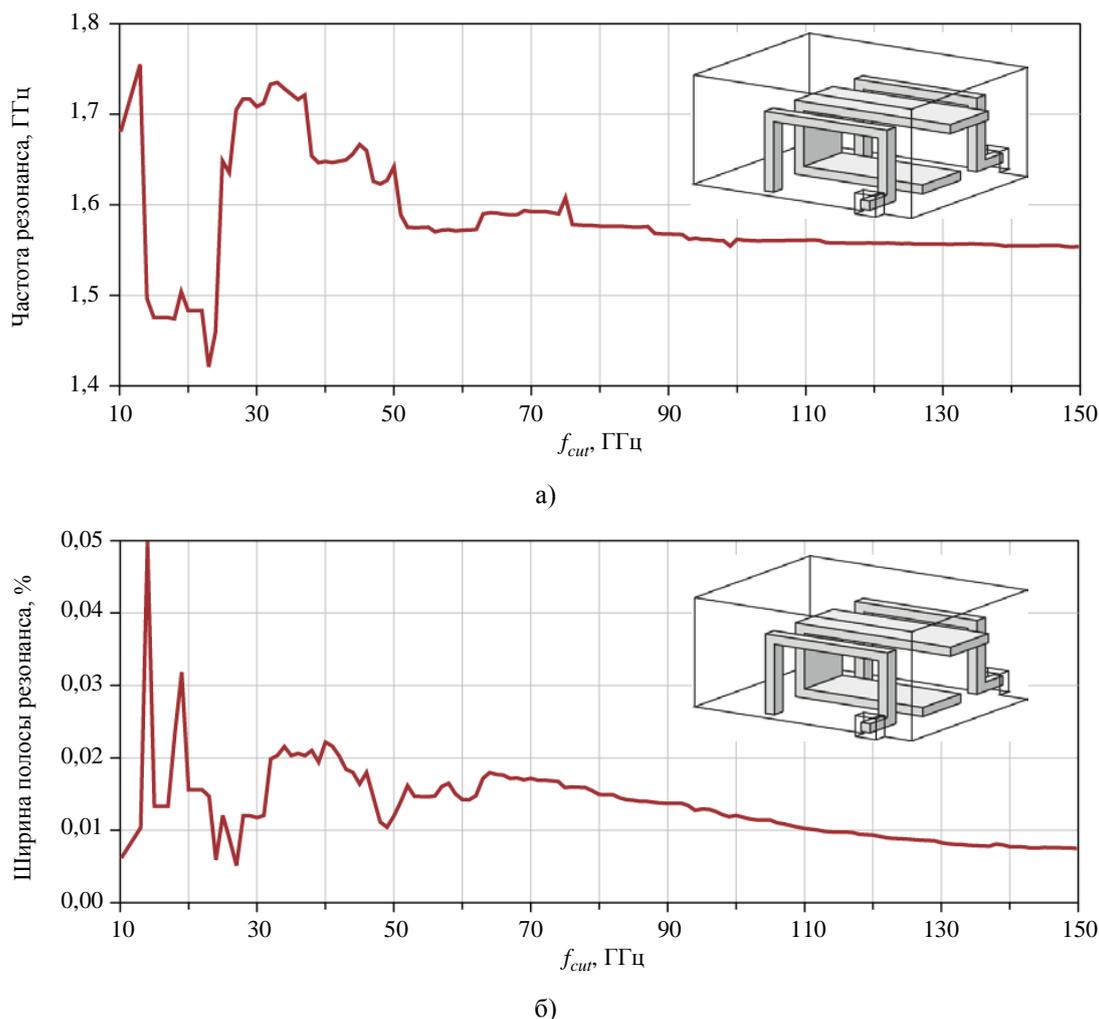
Рис. 4. АЧХ диафрагмы рис. 3, рассчитанные нашей программой (сплошная линия) при $f_{cut} = 100$ ГГц и программой *CST Microwave Studio* (пунктирная линия) при максимальной точности, которую в ней удалось достичь

Для того чтобы оценить сходимость метода по глобальному параметру f_{cut} , контролирующему точность расчета, рассмотрим резонансную структуру, являющуюся моделью отдельного звена фильтра с заперделными связями (рис. 5) [9]. Резонаторная секция представляет собой модифицированный *SRR* (*split-ring resonator*) прямоугольной формы, разделенный пополам электрической стенкой. В одноволновом приближении его можно представить как параллельный колебательный контур, где индуктивность определяется площадью витка, а емкость – параметрами разрыва кольца (его площадью и расстоянием между проводниками). Такой волноводный объект нагружен на квадратные коаксиальные волноводы посредством петель связи, также рассчитываемых как «ортогонные» фрагменты.

Анализируя интегральные характеристики такой структуры в волноводе 23×10 мм², отметим, что уже начиная с $f_{cut} = 100$ ГГц

(179 (*TE+TM*)-волн в резонаторной секции), резонансная частота меняется слабо ((рис. 5, а), тогда как ширина полосы резонанса стабилизируется после $f_{cut} = 130$ ГГц (283 волны в резонаторной секции) (рис. 5, б). Это свидетельствует о том, что характеристики рассматриваемого объекта сильно зависят от взаимодействия между петлями запитки и *SRR* по ближнему полю. А значит, качественное моделирование такого устройства можно провести только с использованием полноволновых математических моделей. Этот пример подчеркивает, насколько важно при использовании предлагаемого подхода обеспечить возможность нахождения именно нескольких сотен собственных мод волноводов сложного сечения.

Оба примера демонстрируют устойчивость и быструю сходимость алгоритма при моделировании электродинамических свойств сложных СВЧ-узлов.

Рис. 5. Зависимость частоты и ширины полосы резонанса фрагмента фильтра с запредельными связями от величины f_{cut}

Выводы. Численно-аналитический МЧО с учетом особенностей поля на ребрах и метод декомпозиции использованы как основа для построения и программной реализации математической модели для решения векторных задач анализа сложных трехмерных волноводных узлов с произвольными декартово-координатными кусочно-линейными границами. Обобщенная модель верифицирована на примере многих известных трехмерных СВЧ-объектов, продемонстрирована ее высокая точность и устойчивость к разным вариантам расчета волноводных базисов. Описаны способы применения МЧО в специальных случаях и пути повышения эффективности модели в применении к симметричным структурам. Высокая производительность разработанного вычислительного модуля дает возможность построения на его основе новой версии системы электродинамического моделирования.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке «ГЦНТП Внедрения и использования Грид-технологий на 2009-2013 гг.»

Библиографический список

1. *Mitra R.* Analytical techniques in the theory of guided waves / R. Mitra, S. W. Lee. – N. Y.: Macmillan New York, 1971. – 302 p.
2. *Приколотин С. А.* Метод частичных областей с учетом особенностей во внутренних задачах с произвольными кусочно-координатными границами. Часть 1. Спектры собственных волн ортогонных волноводов / С. А. Приколотин, А. А. Кириленко // Радиофизика и электрон. – 2010. – 15, № 1. – С. 17–29.
3. *Dai F.* Scattering and transmission matrix representations of multiguide junctions / F. Dai // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – 1992. – 40, N 7. – P. 1538–1544.
4. *Ruiz-Cruz J. A.* Computer Aided Design of Waveguide Devices by Mode-Matching Methods / J. A. Ruiz-Cruz, J. R. Montejo-Garai, J. M. Rebollar // Passive Microwave Components and Antennas / Ed. by V. Zhurbenko. – Vukovar, Croatia : InTech, 2010. – P. 117–140.
5. *Ильинский А. С.* Исследование бесконечномерных систем линейных алгебраических уравнений II рода в волноводных задачах дифракции / А. С. Ильинский, Е. Ю. Фоменко // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1991. – 31, № 3. – С. 339–352.
6. *Никольский В. В.* Декомпозиционный подход к задачам электродинамики / В. В. Никольский, Т. И. Никольская. – М.: Наука, 1983. – 304 с.

7. Организация электродинамической сборки при расчете сложных волноводных объектов / А. А. Кириленко, В. И. Каченко, С. Л. Сенкевич, С. Ф. Кулишенко // Радиотехника и электрон. – 2007. – 52, № 6. – С. 679–686.
8. Uher J. Waveguide components for antenna feed systems: Theory and CAD / J. Uher, J. Bornemann, U. Rosenberg. – Boston : Artech House, 1993. – 457 p.
9. Salehi H. Lumped-element conductor-loaded cavity resonators / H. Salehi, R. R. Mansour, V. Dokas // IEEE MTT-S Intern. Microwave Symp. Digest. – Seattle, 2002. – V. 3. – P. 1601–1604.

Рукопись поступила 20.02.2013 г.

S. A. Steshenko, S. A. Prikolotin, A. A. Kirilenko,
D. Yu. Kulik, L. A. Rud' and S. L. Senkevich

MODE-MATCHING TECHNIQUE
TAKING INTO ACCOUNT FIELD
SINGULARITIES
IN THE INTERNAL PROBLEMS
WITH PIECE-WISE COORDINATE BOUNDARIES.
PART 2. PLANE JUNCTIONS
AND "IN-LINE" OBJECTS

The generalization of the mode-matching technique in respect to the plane-junctions of lines with arbitrary piece-wise Cartesian coordinate of cross-sections and "in-line" objects of such

lines is under consideration. The accuracy and efficiency of the new algorithms are demonstrated on the examples of various well-known 3D waveguide objects. Special cases of MMT application and upgrading the computational efficiency are discussed.

Key words: mode-matching technique, piece-wise coordinate boundaries, 3D waveguide objects.

С. О. Стешенко, С. А. Приколотін, А. О. Кириленко,
Д. Ю. Кулик, Л. А. Рудь, С. Л. Сенкевич

МЕТОД ЧАСТКОВИХ ОБЛАСТЕЙ
З УРАХУВАННЯМ ОСОБЛИВОСТЕЙ
У ВНУТРІШНІХ ЗАДАЧАХ З ДОВІЛЬНИМИ
КУСКОВО-КООРДИНАТНИМИ МЕЖАМИ
ЧАСТИНА 2. ПЛОСКО-ПОПЕРЕЧНІ
З'ЄДНАННЯ ТА «IN-LINE» ОБ'ЄКТИ

Розглядається застосування узагальненого методу часткових областей для обчислення характеристик плоско-поперечних з'єднань хвильоводних ліній довільного кусково-координатного (ортогоного) перерізу у декартових координатах та «in-line» пристроїв на їх основі. Аналізуються особливості геометрії конкретних задач, що дозволяють підвищити ефективність обчислень. Досліджується достовірність отриманих алгоритмів.

Ключові слова: НВЧ-елементи, метод часткових областей, ортогон, декартові координати.