

Н. И. Айзацкий, Е. Ю. Крамаренко

Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»

1, ул. Академическая, Харьков, 61108, Украина

E-mail: kramer@kipt.kharkov.ua

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СВЯЗИ ЧЕРЕЗ МАЛОЕ ОТВЕРСТИЕ
ДИПОЛЬНЫХ МОД РЕЗОНАТОРОВ**

Задача о связи дипольных мод резонаторов имеет большое прикладное значение, так как она является базовой для описания аксиально-несимметричных колебаний в диафрагмированных волноводах. Эти колебания ответственны за поперечное смещение ускоряемого пучка и, как следствие, за развитие поперечной неустойчивости в линейных резонансных ускорителях. До последнего времени отсутствовал метод, позволяющий на основании строгого электродинамического подхода рассчитывать коэффициенты связи дипольных мод резонаторов при различных предположениях о геометрии отверстия связи и резонаторов. Поэтому эти коэффициенты вычислялись приближенными методами, основанными на использовании решений электростатических и магнито-статических задач. Электромагнитные поля в различных областях нами были представлены в виде разложений по полным наборам собственных функций, состоящих из соленоидальных и потенциальных подсистем. Бесконечные системы алгебраических уравнений для коэффициентов разложения поля на апертуре, полученные при использовании граничных условий, были трансформированы в системы парных интегральных уравнений. Получены аналитические решения этих интегральных уравнений. Их анализ показал, что в разложении тангенциальной составляющей электрического поля на апертуре по малому ($\sim a$) параметру отсутствует нулевое приближение. Тангенциальная составляющая электрического поля пропорциональна как тангенциальным составляющим магнитного поля мод TM_{110} и TE_{111} ($\sim a/\lambda$, λ – длина волны), так и нормальной (к плоскости апертуры) составляющей электрического поля моды TM_{110} ($\sim a/b$, b – радиус резонатора). Получены также выражения для коэффициентов связи мод TM_{110} и TE_{111} . Показано, что коэффициенты связи, определенные с точностью до a^3 , зависят только от соленоидальной составляющей электрического поля на апертуре. В отличие от широко используемого эвристического подхода, основанного на подборе параметров цепочки связанных контуров, предложенный подход дает возможность более корректно описывать характеристики аксиально-несимметричных колебаний в замедляющих структурах и процесс их возбуждения сильноточным электронным пучком. Ил. 1. Библиогр.: 13 назв.

Ключевые слова: цилиндрический резонатор, дипольные моды, коэффициенты связи.

Задачи о дифракции волн на малом отверстии в бесконечно тонком плоском экране и связи электродинамических объемов через малое отверстие решались неоднократно, с использованием различных подходов ([1–7] и цитируемая там литература). Интерес к подобным задачам вызван тем, что наличие малого параметра дает возможность решить задачу аналитически.

Как при решении задач дифракции, так и при решении задач о связи колебаний резонаторов основная проблема состоит в нахождении распределения тангенциальной составляющей электрического поля $\vec{E}_\tau(\vec{r}_\perp)$ на отверстии в идеально проводящей плоскости, разделяющей либо два полупространства (задача дифракции), либо два резонансных объема (задача о связи резонаторов).

Если радиус отверстия связи стремится к нулю ($a \rightarrow 0$), то при решении задачи дифракции можно выделить малый параметр ka , где $k = \omega/c$ – волновое число. Тогда электрическое поле на апертуре можно представить в виде разложения в степенной ряд по малому параметру $\vec{E}_\tau(\vec{r}_\perp) = \sum_{m=0}^{\infty} \vec{E}^{(m)}(\vec{r}_\perp)(ka)^m$. В работах [4, 5] приведена общая методика нахождения $\vec{E}^{(m)}(\vec{r}_\perp)$ для задачи дифракции плоской волны на произвольном отверстии в идеально проводящем экране. Для кругового отверстия в нулевом и первом приближениях получены аналитические выраже-

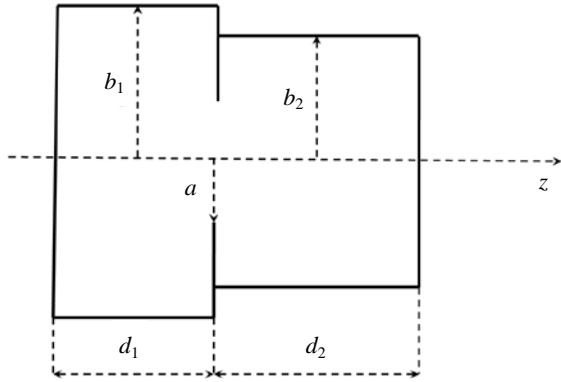
ния для тангенциальной составляющей электрического поля на апертуре. Кроме того, показано, что при нормальном падении $\vec{E}^{(0)}(\vec{r}_\perp) = \vec{E}^{(2)}(\vec{r}_\perp) = 0$.

В случае задачи о связи электродинамических объемов через малое отверстие в тонком экране процедура нахождения $\vec{E}_\tau(\vec{r}_\perp)$ путем разложения по малому параметру является более сложной. В первую очередь это связано с тем, что структура полей в резонансных объемах значительно сложнее, чем в свободном пространстве. Кроме того, в этой задаче существуют, наряду с ka , другие малые параметры $k_i a$, где волновые числа $k_i \sim 1/L_i$ определяются характерными геометрическими размерами резонаторов. В работе [6] для задачи о связи двух соосных цилиндрических резонаторов через круговое отверстие для случая аксиально-симметричных TM -колебаний [7] показано, что в разложении $\vec{E}_\tau(\vec{r}_\perp)$ отсутствует первое приближение по a . Из выражения для $\vec{E}_\tau(\vec{r}_\perp)$, полученного с точностью до a^2 , видно, что разложение действительно содержит малые параметры $k_i a$. В нулевом приближении выражение для поля на отверстии совпадает с аналогичным для задачи дифракции [1–6].

Представляет интерес нахождение поля $\vec{E}_\tau(\vec{r}_\perp)$ на отверстии связи двух резонаторов для колебаний, имеющих одну вариацию по азимутальному углу $E, H \sim \exp(i\varphi)$. Зная это поле, мож-

но записать связанные уравнения для амплитуд поля дипольных мод в резонаторах. Данная задача имеет большое прикладное значение, поскольку она является базовой для описания аксиально-несимметричных колебаний в диафрагмированных волноводах [8]. Эти колебания ответственны за поперечное смещение ускоряемого пучка и, как следствие, за развитие поперечной неустойчивости в линейных резонансных ускорителях [9, 10].

1. Постановка задачи. Рассмотрим два цилиндрических резонатора, связанных через малое отверстие в бесконечно тонкой диафрагме (рисунок).



Продольный разрез структуры, которая состоит из двух резонаторов, связанных через отверстие на оси

Электромагнитное поле в каждом резонаторе представим в виде разложения по полному набору собственных функций замкнутого электродинамического объема. Полный набор собственных функций состоит из соленоидальных (TM_{1mp} и TE_{1mp}) и потенциальных (только для магнитного поля) подсистем:

$$\vec{E}^{(n)} = \sum_q A_q^{v(n)} \vec{E}_q^{v(n)} + \sum_q A_q^{\mu(n)} \vec{E}_q^{\mu(n)}; \quad (1.1)$$

$$\vec{H}^{(n)} = \sum_q B_q^{v(n)} \vec{H}_q^{v(n)} + \sum_q B_q^{\mu(n)} \vec{H}_q^{\mu(n)} + \sum_q B_q^{p(n)} \vec{H}_q^{p(n)}, \quad (1.2)$$

где \vec{E}_q^v и \vec{H}_q^v соответствуют распределению электрического и магнитного поля TM_q -моды; \vec{E}_q^μ и \vec{H}_q^μ соответствуют распределению электрического и магнитного поля TE_q -моды; \vec{H}_q^p являются магнитными потенциальными функциями; $q = (1, m, p)$; m – число вариаций поля по радиусу; p – число вариаций поля по продольной координате; $n = 1, 2$ – порядковый номер резонатора.

Будем рассматривать диапазон частот, близкий к частотам мод TM_{110} и TE_{111} как в первом, так и во втором резонаторах. В дальнейшем эти моды будем называть базисными. В данной

задаче вследствие возможной близости частот мод TM_{110} и TE_{111} необходимо выделять два базисных колебания (для аксиально-симметричных колебаний можно было ограничиться одним базисным колебанием [7]). Тангенциальную составляющую электрического поля на отверстии связи \vec{E}_τ представим в виде разложения по полной системе ортогональных функций, состоящей из потенциальной и соленоидальной подсистем $\{\vec{f}^{(1)}, \vec{f}^{(2)}\}$:

$$\vec{E}_\tau = \sum_l (C_{1,l} \vec{f}_l^{(1)} + C_{2,l} \vec{f}_l^{(2)}). \quad (2)$$

При выборе зависимости от угловой координаты в виде $e^{i\varphi}$, функции $\vec{f}^{(1)}$ и $\vec{f}^{(2)}$ имеют следующий вид:

$$\vec{f}_l^{(1)} e^{-i\varphi} = \vec{e}_r J_1'(v_l r_n) + i \vec{e}_\varphi \frac{J_1(v_l r_n)}{v_l r_n}; \quad (3.1)$$

$$\vec{f}_l^{(2)} e^{-i\varphi} = \vec{e}_r \frac{J_1(\mu_l r_n)}{\mu_l r_n} + i \vec{e}_\varphi J_1'(\mu_l r_n), \quad (3.2)$$

где $r_n = r/a$; $J_1(v_l) = 0$; $J_1'(\mu_l) = 0$.

Из выражений (3.1) и (3.2) видно, что $f_\varphi^{(1)} = f_\varphi^{(2)} = 0$ при $r = a$. Это соответствует выполнению граничного условия для φ -компоненты поля \vec{E}_τ .

Коэффициенты $C_{1,l}$ и $C_{2,l}$ из разложения (2) являются искомыми величинами.

2. Система линейных неоднородных уравнений для $C_{1,l}$ и $C_{2,l}$. Так как на апертуре тангенциальная составляющая магнитного поля должна оставаться непрерывной, то следовательно, должно выполняться условие

$$\begin{aligned} & \sum_q B_q^{v(1)} \vec{H}_{q,\tau}^{v(1)}(r, \varphi) + \sum_q B_q^{\mu(1)} \vec{H}_{q,\tau}^{\mu(1)}(r, \varphi) + \\ & + \sum_q B_q^{p(1)} \vec{H}_{q,\tau}^{p(1)}(r, \varphi) = \\ & = \sum_q B_q^{v(2)} \vec{H}_{q,\tau}^{v(2)}(r, \varphi) + \sum_q B_q^{\mu(2)} \vec{H}_{q,\tau}^{\mu(2)}(r, \varphi) + \\ & + \sum_q B_q^{p(2)} \vec{H}_{q,\tau}^{p(2)}(r, \varphi). \end{aligned} \quad (4)$$

Левую и правую часть уравнения (4) разложим в ряд по полной системе ортогональных функций для магнитного поля, состоящей из соленоидальной и потенциальной подсистем $\{\vec{h}^{(1)}, \vec{h}^{(2)}\}$. При выборе зависимости от угловой координаты в виде $e^{i\varphi}$ функции $\vec{h}^{(1)}$ и $\vec{h}^{(2)}$ имеют следующий вид:

$$\vec{h}_k^{(1)} e^{-i\varphi} = \vec{e}_r \frac{J_1(v_k r_n)}{v_k r_n} + i \vec{e}_\varphi J_1'(v_k r_n); \quad (5.1)$$

$$\vec{h}_k^{(2)} e^{-i\varphi} = \vec{e}_r J_1'(\mu_k r_n) + i \vec{e}_\varphi \frac{J_1(\mu_k r_n)}{\mu_k r_n}. \quad (5.2)$$

Приравняв коэффициенты разложения, получим следующую систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_q B_q^{v(1)} R_{q,k}^{v\mu(1)} + \sum_q B_q^{\mu(1)} R_{q,k}^{\mu\mu(1)} + \\ + \sum_q B_q^{p(1)} R_{q,k}^{p\mu(1)} = \sum_q B_q^{v(2)} R_{q,k}^{v\mu(2)} + \\ + \sum_q B_q^{\mu(2)} R_{q,k}^{\mu\mu(2)} + \sum_q B_q^{p(2)} R_{q,k}^{p\mu(2)}, \\ \sum_q B_q^{v(1)} R_{q,k}^{vv(1)} = \sum_q B_q^{v(2)} R_{q,k}^{vv(2)}, \end{array} \right. \quad (6)$$

$$\text{где } R_{q,k}^{vv(n)} = -2\pi a^3 \omega_q^{v(n)} \varepsilon_0 \frac{J_1(v_m a/b_n) J_1'(v_k)}{v_k^2 - (v_m a/b_n)^2};$$

$$R_{q,k}^{v\mu(n)} = 2\pi a \omega_q^{v(n)} \varepsilon_0 \left(\frac{b_n}{v_m} \right)^2 \frac{J_1(v_m a/b_n) J_1(\mu_k)}{\mu_k};$$

$$R_{q,k}^{\mu\mu(n)} = 2\pi a^2 \frac{\pi p}{d_n} \frac{b_n}{\mu_m} \frac{J_1'(\mu_m a/b_n) J_1(\mu_k) \mu_k}{\mu_k^2 - (\mu_m a/b_n)^2};$$

$$R_{q,k}^{p\mu(n)} = 2\pi a^2 \frac{J_1'(\mu_m a/b_n) J_1(\mu_k) \mu_k}{\mu_k^2 - (\mu_m a/b_n)^2}.$$

Воспользовавшись уравнениями возбуждения резонаторов, выразим амплитуды собственных функций через коэффициенты $C_{1,l}$ и $C_{2,l}$

$$B_q^{v(n)} = (-1)^n \gamma_q^{v(n)} \sum_l (C_{1,l} R_{q,l}^{v\mu(n)} + C_{2,l} R_{q,l}^{vv(n)}); \quad (7.1)$$

$$B_q^{\mu(n)} = (-1)^n \gamma_q^{\mu(n)} \sum_l C_{2,l} R_{q,l}^{\mu\mu(n)}; \quad (7.2)$$

$$B_q^{p(n)} = (-1)^n \gamma_q^{p(n)} \sum_l C_{2,l} R_{q,l}^{p\mu(n)}, \quad (7.3)$$

$$\text{где } \gamma_q^{v,\mu,p(n)} = \frac{\omega}{\left(\omega^2 - (\omega_q^{v,\mu,p(n)})^2 \right) N_q^{v,\mu,p(n)}};$$

$$\omega_q^{p(n)} \equiv 0; \quad B_q^{v,\mu(n)} = A_q^{v,\mu(n)} \frac{\omega}{\omega_q^{v,\mu(n)}}; \quad n = 1, 2.$$

Выражения (7.1)–(7.3) для амплитуд всех собственных колебаний, кроме базисных, подставим в систему уравнений (6). Амплитуды базисных мод ($q_0 = (1, 1, 0)$ и $q_1 = (1, 1, 1)$) вынесем в правую часть. Получим систему линейных неоднородных уравнений для коэффициентов $C_{1,l}$ и $C_{2,l}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_l (C_{1,l} S_{kl}^{v\mu} + C_{2,l} (T_{kl}^{v\mu} + T_{kl}^{\mu\mu} + T_{kl}^{p\mu})) = \\ = A_{q_0}^{v(1)} R_{q_0,k}^{v\mu(1)} \frac{\omega}{\omega_{q_0}^{v(1)}} + A_{q_1}^{\mu(1)} R_{q_1,k}^{\mu\mu(1)} \frac{\omega}{\omega_{q_1}^{\mu(1)}} - \\ - A_{q_0}^{v(2)} R_{q_0,k}^{v\mu(2)} \frac{\omega}{\omega_{q_0}^{v(2)}} - A_{q_1}^{\mu(2)} R_{q_1,k}^{\mu\mu(2)} \frac{\omega}{\omega_{q_1}^{\mu(2)}}, \\ \sum_l (C_{1,l} T_{kl}^{vv} + C_{2,l} S_{kl}^{vv}) = \\ = A_{q_0}^{v(1)} R_{q_0,k}^{vv(1)} \frac{\omega}{\omega_{q_0}^{v(1)}} - A_{q_0}^{v(2)} R_{q_0,k}^{vv(2)} \frac{\omega}{\omega_{q_0}^{v(2)}}, \end{array} \right. \quad (8)$$

$$\text{где } T_{kl}^{v\mu(n)} = \sum_{q \neq q_0} \gamma_q^{v(n)} R_{q,k}^{v\mu(n)} R_{q,l}^{v\mu(n)}; \quad T_{kl}^{v\mu} = T_{kl}^{v\mu(1)} + T_{kl}^{v\mu(2)};$$

$$T_{kl}^{\mu\mu(n)} = \sum_{q \neq q_1} \gamma_q^{\mu(n)} R_{q,k}^{\mu\mu(n)} R_{q,l}^{\mu\mu(n)}; \quad T_{kl}^{\mu\mu} = T_{kl}^{\mu\mu(1)} + T_{kl}^{\mu\mu(2)};$$

$$T_{kl}^{p\mu(n)} = \sum_q \gamma_q^{p(n)} R_{q,k}^{p\mu(n)} R_{q,l}^{p\mu(n)}; \quad T_{kl}^{p\mu} = T_{kl}^{p\mu(1)} + T_{kl}^{p\mu(2)};$$

$$T_{kl}^{vv(n)} = \sum_{q \neq q_0} \gamma_q^{v(n)} R_{q,k}^{vv(n)} R_{q,l}^{vv(n)}; \quad T_{kl}^{vv} = T_{kl}^{vv(1)} + T_{kl}^{vv(2)};$$

$$S_{kl}^{v\mu(n)} = \sum_{q \neq q_0} \gamma_q^{v(n)} R_{q,k}^{v\mu(n)} R_{q,l}^{v\mu(n)}; \quad S_{kl}^{v\mu} = S_{kl}^{v\mu(1)} + S_{kl}^{v\mu(2)};$$

$$S_{kl}^{vv(n)} = \sum_{q \neq q_0} \gamma_q^{v(n)} R_{q,k}^{vv(n)} R_{q,l}^{vv(n)}; \quad S_{kl}^{vv} = S_{kl}^{vv(1)} + S_{kl}^{vv(2)}.$$

Решение системы уравнений (8) будем искать в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{1,l} = A_{q_0}^{v(1)} (X_{1,l}^{v\mu(1)} + X_{1,l}^{vv(1)}) - A_{q_0}^{v(2)} (X_{1,l}^{v\mu(2)} + \\ + X_{1,l}^{vv(2)}) + A_{q_1}^{\mu(1)} X_{1,l}^{\mu\mu(1)} - A_{q_1}^{\mu(2)} X_{1,l}^{\mu\mu(2)}, \\ C_{2,l} = A_{q_0}^{v(1)} (X_{2,l}^{v\mu(1)} + X_{2,l}^{vv(1)}) - A_{q_0}^{v(2)} (X_{2,l}^{v\mu(2)} + \\ + X_{2,l}^{vv(2)}) + A_{q_1}^{\mu(1)} X_{2,l}^{\mu\mu(1)} - A_{q_1}^{\mu(2)} X_{2,l}^{\mu\mu(2)}, \end{array} \right. \quad (9)$$

где $A_{q_0}^{v(1)}$, $A_{q_0}^{v(2)}$, $A_{q_1}^{\mu(1)}$, $A_{q_1}^{\mu(2)}$ – амплитуды электрического поля базисных мод первого и второго резонаторов.

Значения X находим из трех подобных систем уравнений, которые отличаются только своей правой частью:

$$\left(\begin{array}{cc} S^{v\mu} & T^{v\mu} + T^{\mu\mu} + T^{p\mu} \\ T^{vv} & S^{vv} \end{array} \right) \begin{pmatrix} X_1^{(n)} \\ X_2^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1^{(n)} \\ P_2^{(n)} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$\text{где } X^{(n)} \equiv \left\{ \begin{pmatrix} X_1^{v\mu(n)} \\ X_2^{v\mu(n)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_1^{\mu\mu(n)} \\ X_2^{\mu\mu(n)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_1^{vv(n)} \\ X_2^{vv(n)} \end{pmatrix} \right\}, \quad n = 1, 2,$$

$$\text{соответствуют } P^{(n)} \equiv \left\{ \begin{pmatrix} \omega \\ \omega_{q_0}^{v(n)} R_{q_0}^{v\mu(n)} \\ 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} \omega \\ \omega_{q_1}^{\mu(n)} R_{q_1}^{\mu\mu(n)} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_{q_0}^{v(n)} R_{q_0}^{vv(n)} \end{pmatrix} \right\}.$$

Покажем, что при $a \rightarrow 0$ система уравнений (10) имеет аналитическое решение.

3. Предельный случай $a \rightarrow 0$. При $a \rightarrow 0$ получим:

$$\frac{\omega}{\omega_{q_0}^{v(n)}} R_{q_0}^{v\mu(n)} \rightarrow \frac{\omega}{2\omega_{q_0}^{v(n)}} = \widehat{R}_{q_0}^{v\mu(n)}; \quad (11.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{\omega_{q_1}^{\mu(n)}} R_{q_1}^{\mu\mu(n)} &\rightarrow (-1)^n \frac{\omega}{2\omega_{q_1}^{\mu(n)}} \frac{\pi}{d_n} \frac{b_n}{\mu_1} Z = \\ &= \widehat{R}_{q_1}^{\mu\mu(n)}; \end{aligned} \quad (11.2)$$

$$\frac{\omega}{\omega_{q_0}^{v(n)}} R_{q_0}^{vv(n)} \rightarrow -\frac{\Omega^2}{2V_k^2} \frac{\omega_{q_0}^{v(n)}}{\omega} = \Omega^2 \widehat{R}_{q_0}^{vv(n)}; \quad (11.3)$$

$$T_{kl}^{\mu\mu(n)} + T_{kl}^{p\mu(n)} \rightarrow \frac{\mu_k^2}{\Omega} \int_0^\infty \frac{(J_1'(\theta))^2 \theta^2 d\theta}{(\mu_k^2 - \theta^2)(\mu_l^2 - \theta^2)} = \frac{\widehat{T}_{kl}^{\mu\mu}}{\Omega}; \quad (11.4)$$

$$T_{kl}^{v\mu(n)} \rightarrow -\frac{\Omega}{\mu_l^2} \int_0^\infty \frac{J_1^2(\theta) d\theta}{\theta^2} = \Omega \widehat{T}_{kl}^{v\mu}; \quad (11.5)$$

$$T_{kl}^{vv(n)} \rightarrow -\Omega \int_0^\infty \frac{J_1^2(\theta) \theta^2 d\theta}{(v_k^2 - \theta^2)(v_l^2 - \theta^2)} = \Omega \widehat{T}_{kl}^{vv}; \quad (11.6)$$

$$S_{kl}^{vv(n)} \rightarrow \frac{\Omega}{\mu_l^2} \int_0^\infty \frac{J_1^2(\theta) d\theta}{v_k^2 - \theta^2} = \Omega \widehat{S}_{kl}^{vv}; \quad (11.7)$$

$$S_{kl}^{v\mu(n)} \rightarrow \Omega \int_0^\infty \frac{J_1^2(\theta) d\theta}{v_l^2 - \theta^2} = \Omega \widehat{S}_{kl}^{v\mu}, \quad (11.8)$$

где $\Omega = \alpha a/c$; Z – волновое сопротивление вакуума.

Из асимптотик (11) следует, что коэффициенты $X^{(n)}$ из систем уравнений (10) пропорциональны Ω . Введя новые переменные $\widehat{X}_{1,l}^{(n)} = J_1'(v_l) X_{1,l}^{(n)} / \Omega$ и $\widehat{X}_{2,l}^{(n)} = \mu_l J_1(\mu_l) X_{2,l}^{(n)} / \Omega$, получим следующую систему уравнений для \widehat{X} :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2\widehat{T}^{\mu\mu} \\ 2\widehat{T}^{vv} & 2\widehat{S}^{vv} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{X}_1^{(n)} \\ \widehat{X}_2^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{P}_1^{(n)} \\ \widehat{P}_2^{(n)} \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где $\widehat{X}^{(n)} \equiv \left\{ \begin{pmatrix} \widehat{X}_1^{v\mu(n)} \\ \widehat{X}_2^{v\mu(n)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \widehat{X}_1^{\mu\mu(n)} \\ \widehat{X}_2^{\mu\mu(n)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \widehat{X}_1^{vv(n)} \\ \widehat{X}_2^{vv(n)} \end{pmatrix} \right\}$ соответствует $\widehat{P}^{(n)} \equiv \left\{ \begin{pmatrix} \widehat{R}_{q_0}^{v\mu(n)} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \widehat{R}_{q_1}^{\mu\mu(n)} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \widehat{R}_{q_0}^{vv(n)} \end{pmatrix} \right\}$.

Решение системы уравнений (12) с учетом всех правых частей можно упростить, введя новые переменные $\xi_{v,l}^{(1)}$, $\xi_{\mu,l}^{(1)}$, $\xi_{v,l}^{(2)}$ и $\xi_{\mu,l}^{(2)}$, которые связаны с \widehat{X} следующими соотношениями:

$$\widehat{X}_{1,l}^{v\mu(n)} = \xi_{v,l}^{(1)} \frac{\omega}{2\omega_{q_0}^{v(n)}}; \quad (13.1)$$

$$\widehat{X}_{2,l}^{v\mu(n)} = \xi_{\mu,l}^{(1)} \frac{\omega}{2\omega_{q_0}^{v(n)}}; \quad (13.2)$$

$$\widehat{X}_{1,l}^{\mu\mu(n)} = \xi_{v,l}^{(1)} \frac{(-1)^n \omega}{2\omega_{q_1}^{\mu(n)}} \frac{\pi}{d_n} \frac{b_n}{\mu_l} Z; \quad (13.3)$$

$$\widehat{X}_{2,l}^{\mu\mu(n)} = \xi_{\mu,l}^{(1)} \frac{(-1)^n \omega}{2\omega_{q_1}^{\mu(n)}} \frac{\pi}{d_n} \frac{b_n}{\mu_l} Z; \quad (13.4)$$

$$\widehat{X}_{1,l}^{vv(n)} = \xi_{v,l}^{(2)} \frac{\omega_{q_0}^{v(n)}}{2\omega}; \quad (13.5)$$

$$\widehat{X}_{2,l}^{vv(n)} = \xi_{\mu,l}^{(2)} \frac{\omega_{q_0}^{v(n)}}{2\omega}. \quad (13.6)$$

Тогда для переменных $\xi_{v,l}^{(1)}$, $\xi_{\mu,l}^{(1)}$, $\xi_{v,l}^{(2)}$ и $\xi_{\mu,l}^{(2)}$ получим две системы линейных неоднородных уравнений

$$\begin{cases} \sum_{l=1}^{\infty} \xi_{\mu,l}^{(1)} \int_0^\infty \frac{(J_1'(z) \cdot z)^2 dz}{(\mu_k^2 - z^2)(\mu_l^2 - z^2)} = \frac{1}{2\mu_k^2}, \\ \sum_{l=1}^{\infty} \xi_{v,l}^{(1)} \int_0^\infty \frac{J_1^2(z) z^2 dz}{(v_k^2 - z^2)(v_l^2 - z^2)} - \\ - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\xi_{\mu,l}^{(1)}}{\mu_l^2} \int_0^\infty \frac{J_1^2(z) dz}{v_k^2 - z^2} = 0 \end{cases} \quad (14)$$

и

$$\begin{cases} \sum_{l=1}^{\infty} \xi_{\mu,l}^{(2)} \int_0^\infty \frac{(J_1'(z) \cdot z)^2 dz}{(\mu_k^2 - z^2)(\mu_l^2 - z^2)} = 0, \\ \sum_{l=1}^{\infty} \xi_{v,l}^{(2)} \int_0^\infty \frac{J_1^2(z) z^2 dz}{(v_k^2 - z^2)(v_l^2 - z^2)} - \\ - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\xi_{\mu,l}^{(2)}}{\mu_l^2} \int_0^\infty \frac{J_1^2(z) dz}{v_k^2 - z^2} = \frac{1}{2v_k^2}, \end{cases} \quad (15)$$

где $1 \leq k < \infty$.

От бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (14) и (15) можно перейти к системам парных интегральных уравнений, которые имеют аналитическое решение (впервые такая процедура была использована в работе [6]). Введем две нечетные функции комплексной переменной z :

$$\Phi_v^{(i)}(z) = \frac{f_v^{(i)}(z)}{J_1(z)}; \quad (16.1)$$

$$\Phi_\mu^{(i)}(z) = \frac{f_\mu^{(i)}(z)}{J_1'(z)}, \quad (16.2)$$

где $i = 1, 2$ обозначает принадлежность функции системе уравнений (14) или (15) соответственно.

Полагаем, что функции f_v и f_μ при $z = v_l$ и $z = \mu_l$ принимают следующие значения:

$$f_v^{(i)}(v_l) = f_v^{(i)}(-v_l) = \xi_{v,l}^{(i)} J_1'(v_l); \quad (17.1)$$

$$f_\mu^{(i)}(\mu_l) = -f_\mu^{(i)}(-\mu_l) = \xi_{\mu,l}^{(i)} J_1''(\mu_l). \quad (17.2)$$

Разложим функции Φ_v и Φ_μ в ряд на простые дроби, тогда

$$f_v^{(i)}(z) = \frac{2f_v^{(i)}(0)}{z} J_1(z) + 2z J_1(z) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\xi_{v,l}^{(i)}}{z^2 - v_l^2}; \quad (18.1)$$

$$f_\mu^{(i)}(z) = 2z J_1'(z) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\xi_{\mu,l}^{(i)}}{z^2 - \mu_l^2}. \quad (18.2)$$

Подставив разложения (18) в исходные системы уравнений (14) и (15), получим

$$\begin{cases} \int_0^{\infty} \frac{zJ_1'(z)f_{\mu}^{(1)}(z)dz}{z^2 - \mu_k^2} = \frac{1}{\mu_k^2}, \\ \int_0^{\infty} \frac{zJ_1(z)f_{\nu}^{(1)}(z)dz}{z^2 - \nu_k^2} = \\ = 2 \left[f_{\nu}^{(1)}(0) - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\xi_{\mu,l}^{(1)}}{\mu_l^2} \right] \int_0^{\infty} \frac{J_1^2(z)dz}{z^2 - \nu_k^2} \end{cases} \quad (19)$$

и

$$\begin{cases} f_{\mu}^{(2)}(z) \equiv 0, \\ \int_0^{\infty} \frac{zJ_1(z)f_{\nu}^{(2)}(z)dz}{z^2 - \nu_k^2} = \\ = 2f_{\nu}^{(2)}(0) \int_0^{\infty} \frac{J_1^2(z)dz}{z^2 - \nu_k^2} + \frac{1}{\nu_k^2}. \end{cases} \quad (20)$$

Таким образом, от систем уравнений (14) и (15) с неизвестными коэффициентами $\xi_{\nu,l}^{(1)}$, $\xi_{\mu,l}^{(1)}$, $\xi_{\nu,l}^{(2)}$ и $\xi_{\mu,l}^{(2)}$ мы перешли к системам интегральных уравнений (19) и (20) с неизвестными функциями $f_{\nu}^{(1)}$, $f_{\mu}^{(1)}$, $f_{\nu}^{(2)}$ и $f_{\mu}^{(2)}$.

Левую и правую часть первого уравнения из системы (19) умножим на $\frac{2\mu_k^2}{\mu_k^2 - 1} \frac{J_1(\mu_k x)}{J_1(\mu_k)}$ ($0 < x < 1$) и проведем суммирование по индексу k . Левую и правую часть второго уравнения умножим на $zJ_1(xz)$ ($x > 1$) и проинтегрируем по z от 0 до ∞ . Получим систему парных интегральных уравнений для функции $f_{\mu}^{(1)}$

$$\begin{cases} \int_0^{\infty} f_{\mu}^{(1)}(z)J_1(xz)dz = -x, & 0 < x < 1, \\ \int_0^{\infty} zf_{\mu}^{(1)}(z)J_1(xz)dz = \\ = 2 \sum_{l=1}^{\infty} \xi_{\mu,l}^{(1)} \left[\frac{1}{2x} + \mu_l^2 \int_0^{\infty} \frac{J_1'(z)J_1(xz)dz}{z^2 - \mu_l^2} \right], & x > 1. \end{cases} \quad (21)$$

Можно показать, что правая часть второго уравнения из системы парных интегральных уравнений (21) равняется нулю. Тогда окончательно получим

$$\begin{cases} \int_0^{\infty} f_{\mu}^{(1)}(z)J_1(xz)dz = -x, & 0 < x < 1, \\ \int_0^{\infty} zf_{\mu}^{(1)}(z)J_1(xz)dz = 0, & x > 1. \end{cases} \quad (22)$$

Система парных интегральных уравнений (22) имеет следующее решение [11]:

$$f_{\mu}^{(1)}(z) = -2\sqrt{\frac{2}{\pi z}} J_{3/2}(z). \quad (23)$$

Зная функцию $f_{\mu}^{(1)}$, а следовательно, и $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\xi_{\mu,l}^{(1)}}{\mu_l^2}$,

найдем функцию $f_{\nu}^{(1)}$. Левую и правую часть третьего уравнения из системы (19) умножим на $\frac{2\nu_k J_1(\nu_k x)}{J_0(\nu_k)}$ ($0 < x < 1$) и проведем суммирование

по индексу k . Левую и правую часть четвертого уравнения умножим на $J_1(xz)$ ($x > 1$) и проинтегрируем по z от 0 до ∞ . Получим систему парных интегральных уравнений для функции $f_{\nu}^{(1)}$

$$\begin{cases} \int_0^{\infty} zf_{\nu}^{(1)}(z)J_1(xz)dz = 2 \left[f_{\nu}^{(1)}(0) - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\xi_{\mu,l}^{(1)}}{\mu_l^2} \right] \times \\ \times \int_0^{\infty} J_1(z)J_1(xz)dz, & 0 < x < 1, \\ \int_0^{\infty} f_{\nu}^{(1)}(z)J_1(xz)dz = \frac{f_{\nu}^{(1)}(0)}{x} + \\ + 2 \sum_{l=1}^{\infty} \xi_{\nu,l}^{(1)} \int_0^{\infty} \frac{zJ_1(z)J_1(xz)dz}{z^2 - \nu_l^2}, & x > 1. \end{cases} \quad (24)$$

Можно показать, что интеграл, стоящий в правой части второго уравнения из системы парных интегральных уравнений (24), равняется нулю. Окончательно получим

$$\begin{cases} \int_0^{\infty} zf_{\nu}^{(1)}(z)J_1(xz)dz = 2 \left[f_{\nu}^{(1)}(0) - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\xi_{\mu,l}^{(1)}}{\mu_l^2} \right] \times \\ \times \int_0^{\infty} J_1(z)J_1(xz)dz, & 0 < x < 1, \\ \int_0^{\infty} f_{\nu}^{(1)}(z)J_1(xz)dz = \frac{f_{\nu}^{(1)}(0)}{x}, & x > 1. \end{cases} \quad (25)$$

Система парных интегральных уравнений (25) имеет следующее решение [11]:

$$\begin{aligned} f_{\nu}^{(1)}(z) &= 2f_{\nu}^{(1)}(0) \frac{J_1(z)}{z} + \\ &+ \frac{4}{3\pi} \left(\frac{\sin(z)}{z} - \frac{2J_1(z)}{z} \right). \end{aligned} \quad (26)$$

Рассмотрим систему уравнений (20). Левую и правую часть первого уравнения, куда входит $f_{\nu}^{(2)}$, умножим на $\frac{2\nu_k J_1(\nu_k x)}{J_0(\nu_k)}$ ($0 < x < 1$) и проведем суммирование по индексу k . Левую и правую часть следующего уравнения умножим на $J_1(xz)$ ($x > 1$) и проинтегрируем по z от 0 до ∞ . Получим систему парных интегральных уравнений для функции $f_{\nu}^{(2)}$

$$\left\{ \begin{aligned} \int_0^{\infty} z f_v^{(2)}(z) J_1(xz) dz = \\ = 2 f_v^{(2)}(0) \int_0^{\infty} J_1(z) J_1(xz) dz - x, \quad 0 < x < 1, \\ \int_0^{\infty} f_v^{(2)}(z) J_1(xz) dz = \frac{f_v^{(2)}(0)}{x}, \quad x > 1. \end{aligned} \right. \quad (27)$$

Система парных интегральных уравнений (27) имеет следующее решение [11]:

$$f_v^{(2)}(z) = 2 f_v^{(2)}(0) \frac{J_1(z)}{z} - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi z}} J_{5/2}(z). \quad (28)$$

Зная аналитический вид функций $f_v^{(1)}$, $f_\mu^{(1)}$, $f_v^{(2)}$, можно записать выражения для $\xi_{v,l}^{(1)}$, $\xi_{\mu,l}^{(1)}$ и $\xi_{v,l}^{(2)}$ ($\xi_{\mu,l}^{(2)} \equiv 0$), а следовательно, и для \hat{X} :

$$\hat{X}_{1,l}^{v\mu(n)} = \frac{\omega}{3\omega_{q_0}^{v(n)}} \frac{1}{J_1'(v_l)} \sqrt{\frac{2}{\pi v_l}} J_{1/2}(v_l); \quad (29.1)$$

$$\hat{X}_{2,l}^{v\mu(n)} = -\frac{\omega}{\omega_{q_0}^{v(n)}} \frac{1}{J_1''(\mu_l)} \sqrt{\frac{2}{\pi \mu_l}} J_{3/2}(\mu_l); \quad (29.2)$$

$$\begin{aligned} \hat{X}_{1,l}^{\mu\mu(n)} = \\ = \frac{(-1)^n \omega \pi b_n}{3\omega_{q_1}^{\mu(n)} d_n \mu_l} \frac{1}{J_1'(v_l)} \sqrt{\frac{2}{\pi v_l}} J_{1/2}(v_l) Z; \end{aligned} \quad (29.3)$$

$$\begin{aligned} \hat{X}_{2,l}^{\mu\mu(n)} = \\ = -\frac{(-1)^n \omega \pi b_n}{\omega_{q_1}^{\mu(n)} d_n \mu_l} \frac{1}{J_1''(\mu_l)} \sqrt{\frac{2}{\pi \mu_l}} J_{3/2}(\mu_l) Z; \end{aligned} \quad (29.4)$$

$$\hat{X}_{1,l}^{vv(n)} = -\frac{\omega_{q_0}^{v(n)}}{3\omega} \frac{1}{J_1'(v_l)} \sqrt{\frac{2}{\pi v_l}} J_{5/2}(v_l); \quad (29.5)$$

$$\hat{X}_{2,l}^{vv(n)} \equiv 0. \quad (29.6)$$

После несложных преобразований получим выражения для коэффициентов разложения тангенциальной составляющей электрического поля на диафрагме \vec{E}_τ

$$\left\{ \begin{aligned} C_{1,l} = C_{1,l}^{(I)} + C_{1,l}^{(II)} = \frac{A^{(I)}}{J_0^2(v_l)} \sqrt{\frac{2}{\pi v_l}} \times \\ \times J_{1/2}(v_l) + \frac{A^{(II)}}{J_0^2(v_l)} \sqrt{\frac{2}{\pi v_l}} J_{5/2}(v_l), \\ C_{2,l} = C_{2,l}^{(I)} = \\ = \frac{3A^{(I)}}{J_1^2(\mu_l)} \frac{\mu_l}{\mu_l^2 - 1} \sqrt{\frac{2}{\pi \mu_l}} J_{3/2}(\mu_l), \end{aligned} \right. \quad (30.1)$$

где

$$A^{(I)} = \frac{\Omega}{3} \left(A_{q_0}^{v(1)} \frac{\omega}{\omega_{q_0}^{v(1)}} - A_{q_0}^{v(2)} \frac{\omega}{\omega_{q_0}^{v(2)}} - A_{q_1}^{\mu(1)} \times \right. \quad (30.2)$$

$$\left. \times Z \frac{\omega}{\omega_{q_1}^{\mu(1)}} \frac{\pi b_1}{d_1 \mu_1} - A_{q_1}^{\mu(2)} Z \frac{\omega}{\omega_{q_1}^{\mu(2)}} \frac{\pi b_2}{d_2 \mu_1} \right);$$

$$A^{(II)} = -\frac{1}{3} \left(A_{q_0}^{v(1)} \frac{\omega_{q_0}^{v(1)} a}{c} - A_{q_0}^{v(2)} \frac{\omega_{q_0}^{v(2)} a}{c} \right). \quad (30.3)$$

Видно, что коэффициент $A^{(I)}$ пропорционален малому параметру a/λ ($\Omega = 2\pi a/\lambda$), в то время как $A^{(II)}$ пропорционален a/b_n ($\omega_{q_0}^{v(n)} = c v_1/b_n$). Это

означает, что разложение $\vec{E}_\tau(\vec{r}_\perp)$ для дипольных мод в задаче о связи электродинамических объемов через малое отверстие в тонком экране начинается с первой степени малых параметров. Аналогичная ситуация наблюдается при нормальном падении волны в задаче дифракции, когда нормальная составляющая падающего электрического поля на отверстии равна нулю. В нашем случае нормальная составляющая невозмущенного электрического поля на отверстии не равна нулю. Но поскольку эта составляющая пропорциональна $J_1(v_1 r/b_n)$, то ее наличие будет сказываться при учете более высоких степеней малого параметра.

4. Выражение для тангенциальной составляющей электрического поля на апертуре. Из выражения (30.1) видно, что тангенциальная составляющая электрического поля на диафрагме состоит из двух частей $\vec{E}_\tau^{(I)}$ и $\vec{E}_\tau^{(II)}$, пропорциональных $A^{(I)}$ и $A^{(II)}$ соответственно:

$$\vec{E}_\tau = \vec{E}_\tau^{(I)} + \vec{E}_\tau^{(II)}. \quad (31)$$

Поле $\vec{E}_\tau^{(I)}$ представляет собой суперпозицию соленоидальной и потенциальной составляющих. Зная характер поведения электрического поля на ребре [12], можно восстановить радиальную зависимость поля $\vec{E}_\tau^{(I)}$:

$$\begin{aligned} \vec{E}_\tau^{(I)} = \frac{2A^{(I)} e^{i\varphi}}{\pi} \left[\vec{e}_r \left(\sqrt{1-r_n^2} + \frac{r_n^2}{2\sqrt{1-r_n^2}} \right) + \right. \\ \left. + i\vec{e}_\varphi \sqrt{1-r_n^2} \right], \end{aligned} \quad (32)$$

где $r_n = r/a$.

Эта зависимость совпадает с приведенной в работе [4] для задачи дифракции на плоскости при нормальном падении волны. Однако, по сравнению с задачей дифракции на плоскости, в структуре, состоящей из связанных резонаторов, на отверстии связи существует дополнительное потенциальное поле $\vec{E}_\tau^{(II)}$, которое также можно восстановить по коэффициентам (30.1):

$$\begin{aligned} \vec{E}_\tau^{(\text{II})} = \frac{A^{(\text{II})} e^{i\varphi}}{\pi} \left[\vec{e}_r \left(\sqrt{1-r_n^2} - \frac{r_n^2}{\sqrt{1-r_n^2}} \right) + \right. \\ \left. + i\vec{e}_\varphi \sqrt{1-r_n^2} \right]. \end{aligned} \quad (33)$$

Так как поле $\vec{E}_\tau^{(\text{II})}$ пропорционально a/b_n , то следовательно, можно сделать вывод, что оно возникает за счет наличия боковых стенок резонаторов.

Окончательное выражение для тангенциальной составляющей электрического поля на апертуре имеет вид

$$\begin{aligned} \vec{E}_\tau = \frac{2A^{(I)} + A^{(\text{II})}}{\pi} \sqrt{1-r_n^2} (\vec{e}_r + i\vec{e}_\varphi) e^{i\varphi} + \\ + \frac{A^{(I)} - A^{(\text{II})}}{\pi} \frac{r_n^2}{\sqrt{1-r_n^2}} \vec{e}_r e^{i\varphi}. \end{aligned} \quad (34)$$

5. Уравнения связанных осцилляторов. Зная связь тангенциальной составляющей электрического поля на отверстии с амплитудами базисных мод первого и второго резонаторов, можно записать систему уравнений для амплитуд базисных мод. Эта система уравнений определяет резонансные свойства структуры, состоящей из связанных резонаторов, и соотношение амплитуд базисных мод. Амплитуды базисных мод определяются уравнениями возбуждения резонаторов

$$\begin{aligned} B_{q_0}^{v(n)} = (-1)^n \gamma_{q_0}^{v(n)} \times \\ \times \sum_l [C_{1,l} R_{q_0,l}^{vv(n)} + C_{2,l} R_{q_0,l}^{\mu\mu(n)}]; \end{aligned} \quad (35.1)$$

$$B_{q_1}^{\mu(n)} = (-1)^n \gamma_{q_1}^{\mu(n)} \sum_l C_{2,l} R_{q_1,l}^{\mu\mu(n)}. \quad (35.2)$$

Разложим $R_{q_0,l}^{vv}$, $R_{q_0,l}^{v\mu}$ и $R_{q_1,l}^{\mu\mu}$ в степенной ряд по a . Ограничившись первыми слагаемыми в разложении, получим $R_{q_0,l}^{vv} \sim a^4$, $R_{q_0,l}^{v\mu} \sim a^2$, $R_{q_1,l}^{\mu\mu} \sim a^2$.

Так как $C_{1,l} \sim a$ и $C_{2,l} \sim a$, то следовательно, в первом неисчезающем приближении потенциальная составляющая электрического поля на апертуре (потенциальная составляющая поля $\vec{E}_\tau^{(I)}$ и поле $\vec{E}_\tau^{(\text{II})}$) не оказывает влияния на коэффициенты связи. В этом приближении коэффициенты связи определяются только соленоидальной составляющей электрического поля на апертуре (соленоидальная составляющая поля $\vec{E}_\tau^{(I)}$). Соленоидальная составляющая электрического поля на апертуре пропорциональна тангенциальным составляющим магнитного поля базисных мод первого и второго резонаторов:

$$\begin{aligned} \vec{E}_\tau^{(I)} \sim A^{(I)} \sim \frac{a}{\lambda} Z \times \\ \times (H_{q_0,\tau}^{v(1)}(0) - H_{q_0,\tau}^{v(2)}(0) + H_{q_1,\tau}^{\mu(1)}(0) - H_{q_1,\tau}^{\mu(2)}(0)), \end{aligned} \quad (36)$$

где $H_{q_0,\tau}^{v(1,2)}(0) = H_{q_0,r}^{v(1,2)}(0) = H_{q_0,\varphi}^{v(1,2)}(0)/i$;

$H_{q_1,\tau}^{\mu(1,2)}(0) = H_{q_1,r}^{\mu(1,2)}(0) = H_{q_1,\varphi}^{\mu(1,2)}(0)/i$; $H_{q_0,r,\varphi}^{v(1,2)}(0)$ и

$H_{q_1,r,\varphi}^{\mu(1,2)}(0)$ – значения тангенциальной составляющей магнитного поля базисных мод первого и второго резонаторов в центре отверстия.

Уравнения (35.1) и (35.2) для амплитуд базисных мод перепишем в развернутом виде:

$$\begin{aligned} \hat{A}_{q_0}^{v(1)} (\omega^2 (1 + \varepsilon_v^{(1)}) - \omega_{q_0}^{v(1)2}) = \\ = \omega^2 \varepsilon_v^{(1)} (\hat{A}_{q_0}^{v(2)} + \hat{A}_{q_1}^{\mu(1)} + \hat{A}_{q_1}^{\mu(2)}); \end{aligned} \quad (37.1)$$

$$\begin{aligned} \hat{A}_{q_0}^{v(2)} (\omega^2 (1 + \varepsilon_v^{(2)}) - \omega_{q_0}^{v(2)2}) = \\ = \omega^2 \varepsilon_v^{(2)} (\hat{A}_{q_0}^{v(1)} - \hat{A}_{q_1}^{\mu(1)} - \hat{A}_{q_1}^{\mu(2)}); \end{aligned} \quad (37.2)$$

$$\begin{aligned} \hat{A}_{q_1}^{\mu(1)} (\omega^2 (1 + \varepsilon_\mu^{(1)}) - \omega_{q_1}^{\mu(1)2}) = \\ = \omega^2 \varepsilon_\mu^{(1)} (\hat{A}_{q_0}^{v(1)} - \hat{A}_{q_0}^{v(2)} - \hat{A}_{q_1}^{\mu(2)}); \end{aligned} \quad (37.3)$$

$$\begin{aligned} \hat{A}_{q_1}^{\mu(2)} (\omega^2 (1 + \varepsilon_\mu^{(2)}) - \omega_{q_1}^{\mu(2)2}) = \\ = \omega^2 \varepsilon_\mu^{(2)} (\hat{A}_{q_0}^{v(1)} - \hat{A}_{q_0}^{v(2)} - \hat{A}_{q_1}^{\mu(1)}), \end{aligned} \quad (37.4)$$

где $\hat{A}_{q_0}^{v(n)} = \frac{A_{q_0}^{v(n)}}{\omega_{q_0}^{v(n)}}$; $\hat{A}_{q_1}^{\mu(n)} = \frac{A_{q_1}^{\mu(n)}}{\omega_{q_1}^{\mu(n)}} \frac{\pi/d_n}{\mu_1/b_n} Z$.

Коэффициенты связи пропорциональны значениям

$$\varepsilon_v^{(n)} = \frac{2}{3J_0^2(\nu_1)} \frac{a^3}{V_n}; \quad (38.1)$$

$$\varepsilon_\mu^{(n)} = \frac{4}{3J_1^2(\mu_1)} \frac{\mu_1^2}{\mu_1^2 - 1} \left(\frac{c\pi/d_n}{\omega_{q_1}^{\mu(n)}} \right)^2 \frac{a^3}{V_n}, \quad (38.2)$$

где $V_n = \pi b_n^2 d_n$ – объем цилиндрического резонатора.

Система уравнений (37) отличается от аналогичной системы уравнений для аксиально-симметричных колебаний [7] не только по числу уравнений, но и по виду коэффициентов связи. Коэффициенты связи $\omega^2 \varepsilon_{v,\mu}^{(n)}$, входящие в систему уравнений (37), пропорциональны квадрату частоты, в то время как коэффициенты связи аксиально-симметричных колебаний от частоты не зависят.

Удовлетворив условию существования нетривиального решения системы уравнений (37), можно получить дисперсионное уравнение для определения собственных частот рассматриваемой структуры с соответствующими соотношениями между амплитудами базисных колебаний. Затем, используя соотношения (7), на заданной резонансной частоте можно восстановить распределение электрического и магнитного полей в объеме структуры. Необходимо отметить: несмотря на то что потенциальная составляющая

электрического поля на апертуре в первом неисчезающем приближении не оказывает влияния на коэффициенты связи, она должна учитываться при построении полной картины поля рассматриваемых аксиально-несимметричных колебаний.

Выводы. На основе строгого электродинамического подхода была решена задача о связи через малое отверстие дипольных мод цилиндрических резонаторов. Решение было получено с помощью метода, основанного на переходе от бесконечных систем линейных алгебраических уравнений к системам парных интегральных уравнений, имеющих аналитическое решение. Получены уравнения связанных осцилляторов для мод TM_{110} и TE_{111} , коэффициенты связи и выражение для тангенциальной составляющей электрического поля на апертуре. Показано, что для аксиально-несимметричных колебаний в разложении тангенциальной составляющей электрического поля на апертуре отсутствует нулевое приближение. При этом коэффициенты связи, входящие в уравнения связанных осцилляторов, пропорциональны кубу радиуса отверстия связи.

Полученную систему уравнений для амплитуд базисных колебаний можно легко обобщить для случая цепочки связанных резонаторов. В отличие от широко используемого эвристического подхода, основанного на подборе параметров цепочки связанных контуров (см., например, [13]), предложенный подход дает возможность более корректно описывать характеристики аксиально-несимметричных колебаний в замедляющих структурах и процесс их возбуждения сильнооточными электронными пучками.

Библиографический список

1. *Bethe H. A.* Theory of diffraction by small holes / H. A. Bethe // *Phys. Rev.* – 1944. – 66, N 7, 8. – P. 163–182.
2. *Владимирский В. В.* Связь полых электромагнитных резонаторов через малое отверстие / В. В. Владимирский // *Журн. техн. физики.* – 1947. – 17, № 11. – С. 1277–1282.
3. *Ахизер А. И.* Медленные волны / А. И. Ахизер, Я.Б. Файнберг // *Укр. физ. журн.* – 1951. – 44, № 3. – С. 321–368.
4. *Rahmat-Samii Y.* Electromagnetic coupling through small apertures in a conducting screen / Y. Rahmat-Samii, R. Mittra // *IEEE Transactions on Antennas and Propagation.* – 1977. – AP-25, N 2. – P. 180–187.
5. *Butler C. M.* Electromagnetic penetration through apertures in conducting surfaces / C. M. Butler, Y. Rahmat-Samii, R. Mittra // *IEEE Transactions on Antennas and Propagation.* – 1978. – AP-26, N 1. – P. 82–92.
6. *Ayzatsky M. I.* Analytical solutions in the two-cavity coupling problem / M. I. Ayzatsky // *Вопросы атомной науки и техники.* – 2000. – № 2(36). – С. 66–68.
7. *Айзацкий Н. И.* К вопросу о связи двух резонаторов / Н. И. Айзацкий // *Журн. техн. физики.* – 1996. – 66, вып. 9. – С. 137–147.
8. *Айзацкий Н. И.* Моделирование поперечной неустойчивости релятивистских электронных пучков в неоднородных замедляющих структурах / Н. И. Айзацкий, Е. Ю. Крамаренко // *Вопросы атомной науки и техники.* – 2012. – № 3(79). – С. 111–117.

9. *Lapostolle P. M.* Linear accelerators / P. M. Lapostolle, A. L. Septier. – Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1970. – 1204 p.
10. *Chao A. W.* Handbook of accelerator physics and engineering / A. W. Chao, M. Tigner. – Singapore: World Scientific, 1999. – 650 p.
11. *Бейтмен Г.* Высшие трансцендентные функции: в 3 т. Т. 2 / Г. Бейтмен, А. Эрдейи; пер. с англ. под ред. Н.Я. Виленкина. – М.: Наука, 1965–1967. – 295 с.
12. *Mumma P.* Аналитические методы теории волноводов / Р. Митра, С. Ли; пер. с англ. под ред. Г. В. Воскресенского. – М.: Мир, 1974. – 327 с.
13. *Equivalent circuit analysis of the SLAC damped detuned structure.* [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.slac.stanford.edu/slac-pub-7187>. – Загл. с экрана.

Рукопись поступила 01.10.2012 г.

М. И. Ayzatskiy, К. Yu. Kramarenko

ANALYTICAL SOLUTION OF THE PROBLEM OF CAVITIES DIPOLE MODES COUPLING THROUGH SMALL HOLE

The problem of the cavity dipole modes coupling is of great practical significance, since it is the basis for the description of non-axial oscillations in disk-loaded waveguides. These oscillations are responsible for the transverse displacement of the accelerated beam and, consequently, for transverse instability in linear resonance accelerators. Until recently, there was no method based on the rigorous electrodynamic approach for calculation of coupling coefficients of the cavity dipole modes under various assumptions about the geometry of the aperture and cavities. Therefore, these coefficients were calculated by approximate methods based on the solutions of electrostatic and magnetostatic problems. Electromagnetic fields in different regions were considered as a complete set of eigenfunction consisting of solenoidal and potential subsystems. Infinite sets of algebraic equations for the expansion coefficients of the field at the aperture obtained by using boundary conditions were transformed into systems of dual integral equations. Analytical solutions of these integral equations are obtained. It is shown that there is no zero approximation in the expansion of the tangential component of the electric field at the aperture in the small ($\sim a$) parameter. The tangential component of the electric field is proportional both to the tangential components of the magnetic field of TM_{110} and TE_{111} modes ($\sim a/\lambda$, where λ is the wave length) and to the normal (to the plane of the aperture) component of the electric field of the TM_{110} mode ($\sim a/b$, where b is radius of the cavity). The coupling coefficients of TM_{110} and TE_{111} modes are obtained. It is shown that the coupling coefficients, defined up to a^3 , depend only on the solenoidal component of electric field at the aperture. In contrast to the widely used heuristic approach based on the selection of the parameters of coupled circuits chain, the proposed approach makes it possible to describe the characteristics of an axially asymmetric oscillations in slow-wave structures and the process of their excitation by high-current electron beam more accurately.

Key words: cylindrical cavity, dipole modes, coupling coefficients.

М. И. Айзацкий, К. Ю. Крамаренко

АНАЛІТИЧНЕ РІШЕННЯ ЗАДАЧІ ПРО ЗВ'ЯЗОК ЧЕРЕЗ МАЛИЙ ОТВІР ДИПОЛЬНИХ МОД РЕЗОНАТОРІВ

Задача про зв'язок дипольних мод резонаторів має велике прикладне значення, тому що вона є базовою для опи-

сування аксіально-несиметричних коливань в діафрагмованих хвилеводах. Ці коливання відповідальні за поперечне зміщення прискорюваного пучка і, як наслідок, за розвиток поперечної нестабільності в лінійних резонансних прискорювачах. До останнього часу був відсутній метод, що дозволяє на підставі суворого електродинамічного підходу розраховувати коефіцієнти зв'язку дипольних мод резонаторів при різних припущеннях щодо геометрії отвору зв'язку та резонаторів. Тому вони обчислювались наближеними методами, заснованими на використанні рішень електростатичних і магнітостатичних задач. Електромагнітні поля в різних областях нами були представлені у вигляді строгих розкладань по повним наборам власних функцій, що складаються з соленоїдальних і потенціальних підсистем. Нескінченні системи алгебраїчних рівнянь для коефіцієнтів розкладання поля на апертурі, отримані при використанні граничних умов, були трансформовані в системи парних інтегральних рівнянь. Отримано аналітичні рішення цих інтегральних рівнянь. Їх аналіз показав, що в

розкладанні тангенціальної складової електричного поля на апертурі по малому ($\sim a$) параметру відсутнє нульове наближення. Тангенціальна складова електричного поля пропорційна як тангенціальному складовим магнітного поля мод TM_{110} і TE_{111} ($\sim a/\lambda$, λ - довжина хвилі), так і нормальній (до площини апертури) складовій електричного поля моди TM_{110} ($\sim a/b$, b – радіус резонатора). Отримано також вирази для коефіцієнтів зв'язку мод TM_{110} і TE_{111} . Показано, що коефіцієнти зв'язку, визначені з точністю до a^3 , залежать тільки від соленоїдальної складової електричного поля на апертурі. На відміну від широко використовуваного евристичного підходу, заснованого на підборі параметрів ланцюжка зв'язаних контурів, запропонований підхід дає можливість більш коректно описувати характеристики аксіально-несиметричних коливань в уповільнюючих структурах і процес їх збудження потужно-струмовим електронним пучком.

Ключові слова: циліндричний резонатор, дипольні моди, коефіцієнти зв'язку.