

А. А. Могила

РЕШАЮЩАЯ СТАТИСТИКА ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО ОБНАРУЖИТЕЛЯ, ОСНОВАННОГО НА ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОМ РАЗЛОЖЕНИИ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

*Институт радиопрофики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины
12, ул. Ак. Проскуры, Харьков, 61085, Украина
E-mail: moganat10@gmail.com*

Рассмотрены вопросы оптимального обнаружения скрытых стохастических сигналов с известной спектрально-временной структурой на фоне нормального шума с равномерным спектром в полосе пропускания приемника. Получены отношения правдоподобия и решающая статистика при использовании двухпараметрического разложения, построена структурная схема обнаружителя. Найдены приближенные выражения для условной плотности вероятности амплитуды, если на входе действует только гауссовская помеха и если действует и сигнал, и помеха. Ил. 3. Библиогр.: 16 назв.

Ключевые слова: стохастический сигнал, двухпараметрическое разложение, отношение правдоподобия, решающая статистика, энергетический обнаружитель, спектрально-временная структура, гауссовская помеха.

В последнее время в активной локации интенсивно ведутся исследования по использованию стохастических радиосигналов в качестве зондирующих. Для перехвата их излучения требуется некоторая априорная информация о статистических характеристиках как помехи, так и обнаруживаемого радиосигнала. В работе [1] рассмотрены общие вопросы обнаружения сигналов и показано, что если и сигнал, и помеха являются выборкой белого гауссова шума, то оптимальным обнаружителем реализаций стохастического сигнала является энергетический приемник, а распределение амплитуды его отклика представляется с помощью функции χ^2 . При этом полагаются известными время прихода, длительность, средняя частота и ширина спектра сигнала. Для этих же условий рассмотрена задача обнаружения неизвестного детерминированного сигнала и показано, что если на входе энергетического приемника присутствует обнаруживаемый сигнал, то его отклик имеет нецентральное χ^2 -распределение [2]. В работе [3] рассмотрена задача обнаружения скрытых стохастических сигналов при неизвестных времени прихода, длительности, средней частоте и ширине спектра и показано, что обработка в этом случае становится многоканальной как в частотной, так и во временной области. При этом для сигналов с большой базой решающая статистика может приближенно описываться с помощью гауссовского распределения. Структура сигнала в этих работах предполагалась неизвестной. Однако если информация о структуре есть, то она может использоваться при расчете соответствующих обнаружителей для улучшения их характеристик. Такая задача может возникнуть, например, если необходимо на фоне помех обнаружить стохастический сигнал с изменяющимся во времени моментом второго порядка. В работе [4] рассмотрена идея улучшения отношения сигнал-шум на выходе радиолокатора

миллиметрового диапазона в условиях априорной неопределенности относительно доплеровской частоты путем использования адаптивного фильтра, основанного на траекторном спектральном анализе (двухпараметрическом представлении) отраженных целью сигналов. Однако теоретического исследования возможности использования двухпараметрического разложения для построения систем обнаружения скрытых стохастических сигналов с изменяющимся во времени моментом второго порядка не проводилось.

Цель статьи – получение решающей статистики и ее вероятностных характеристик при приеме скрытых стохастических радиосигналов с известной спектрально-временной структурой.

Поставленная задача решается на базе методов статистической теории решений [5], описание стохастических сигналов основано на энергетической теории случайных процессов [6–12]. Рассматриваются модели сигнала и помехи, задаются или оцениваются их плотности вероятности, выводятся функции и отношение правдоподобия, модель обнаружителя и оптимального приемника. Получено приближенное соотношение для плотности вероятности амплитуд отклика энергетического приемника при наличии на его входе только помехи и при наличии и сигнала, и помехи.

1. Постановка задачи. На вход приемника поступает сигнал $\xi_r(\vartheta; \lambda)$, существующий в течение интервала времени T наблюдения, который может состоять из аддитивной смеси

$$\xi_r(\vartheta; \lambda) = A \xi_s(\vartheta; \lambda) + \xi_g(\vartheta; \lambda) \quad (1)$$

– скрытого сигнала $\xi_s(\vartheta; \lambda)$ и помехи $\xi_g(\vartheta; \lambda)$, если $A = 1$, или только из помехи $\xi_r(\vartheta; \lambda) = \xi_g(\vartheta; \lambda)$, если $A = 0$. Необходимо на основе анализа входного колебания $\xi_r(\vartheta; \lambda)$ вы-

нести решение о принятии гипотезы H_1 о наличии или принятии альтернативы H_0 об отсутствии во входной смеси $\xi_r(\mathcal{G}; \lambda)$ скрытого сигнала $\xi_s(\mathcal{G}; \lambda)$. Здесь \mathcal{G} – текущее время, $\lambda \in \Lambda$, Λ – множество элементарных событий λ , на аддитивной системе подмножеств которого задана вероятностная мера $P(\cdot)$ такая, что $P(\Lambda)=1$. Для решения этой задачи определим набор априорных данных о сигнале и помехе.

2. Априорная информация. В условиях теоремы Котельникова [13] гауссовский стохастический сигнал $\xi_s(\mathcal{G}; \lambda)$ может быть представлен в виде случайного гильбертова процесса $\xi(k; \lambda)$ с дискретным временем $\mathcal{G}_k = k/2\Delta f$, который имеет нулевое среднее и конечную энергию [6]

$$\varepsilon_\xi = \frac{1}{2\Delta f} E \sum_{k \in D_d} |\xi(k; \lambda)|^2 < \infty, \quad (2)$$

где Δf – ширина спектра скрытого сигнала; k – номер дискретного момента времени; $D_d \subseteq Z$, Z – множество целых чисел; $E\{\xi(k; \lambda)\} = \int_\Lambda \xi(k; \lambda)P(d\lambda)$ – знак математического ожидания. Реализации $\xi_s(k; \lambda_p)$ случайного гильбертова процесса $\xi_s(k; \lambda)$ с дискретным аргументом k могут быть представлены [7, 10] в виде двухпараметрического разложения

$$\xi_s(k; \lambda_p) = \sum_{i \in \aleph} \sum_{n \in M_d} Z_s(i, n; \lambda_p) \psi_{in}(k), \quad (3)$$

сходящегося по норме гильбертова пространства $L_2(M_d, L_2(M_n))$, если ортонормированная система функций $\{\psi_{in}(k)\}_{i=1}^\infty$

$$\frac{1}{2\Delta f} \sum_{k \in M_n} \psi_{im}(k) \psi_{in}^*(k) = \delta_{ii} \delta_{mn} \quad (3a)$$

полная в $L_2(M_d, L_2)$. Здесь \aleph – множество натуральных чисел,

$$Z_s(i, n; \lambda_p) = \frac{1}{2\Delta f} \sum_{k \in M_n} \xi_s(k; \lambda_p) \psi_{in}^*(k) \quad (4)$$

– составляющие пространства компонент $L_2(\Lambda, L_2(M_d, L_2))$ двухпараметрического разложения (пространство текущих спектров); звездочкой * обозначена комплексно-сопряженная функция; p – номер реализации процесса с дискретным временем; $\psi_{in}(k) = G(k-n)\varphi_i(k)$; $G(\cdot)$ – числовая функция, отличная от нуля на конечных диск-

ретных множествах M_n с мерой K_n , $M_n = [n - K_n/2, n + K_n/2]$, удовлетворяющая условию

$$\frac{1}{2\Delta f} \sum_{k \in D_d} G(k-n)G^*(k-m) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = m, \\ 0, & \text{если } n \neq m; \end{cases} \quad (5)$$

$\varphi_i(k) \in L_2(M_n)$ – детерминированные функции, обладающие свойством ортогональности [10]

$$\frac{1}{2\Delta f} \sum_{k \in M_n} \varphi_i(k) \varphi_l^*(k) = \begin{cases} K_n/2\Delta f, & \text{если } l = i, \\ 0, & \text{если } l \neq i \end{cases}$$

и мультиплекативности; δ_{li} и δ_{mn} – символы Кронекера; $M_n \subseteq D_d$; $K = 2T\Delta f$ – мера дискретного множества D_d ; $I = \text{int}[K/K_n]$; $N = (I-1)K_n$; $i \in \{0, 1, \dots, I-1\}$; $M_d = \{0, K_n, \dots, tK_n, \dots, N\}$ – дискретное множество моментов времени $n \in M_d$; $k \in \bigcup_n M_n = D_d$. Мера K_n дискретного множества M_n определяется с учетом локальной когерентности скрытого сигнала [8, 9]. В [9] показано, что в течение времени T существования сигнала с большой базой интервал его локальной когерентности может изменяться в широких пределах от T_{\min} до T_{\max} . Поэтому ортонормированная система функций $\psi_{in}(k)$ строиться с учетом среднего интервала локальной когерентности $T_n = (T_{\max} + T_{\min})/2$ скрытого сигнала $\xi_s(\mathcal{G}; \lambda)$, а $K_n = 2\Delta f T_n$.

В качестве ортонормированного базиса $\psi_{in}(k) = G(k-n)\varphi_i(k)$ можно взять, например, систему комплексных экспоненциальных функций

$$\{\varphi_i(k) = \exp(j2\pi ik/K_n)\}_{i=-\infty}^\infty,$$

взвешенных с помощью функции

$$G(k-n) = \begin{cases} \sqrt{2\Delta f/K_n}, & \text{если } |k-n| \leq K_n/2; \\ 0, & \text{если } |k-n| > K_n/2. \end{cases} \quad (5a)$$

Тогда ортонормированность базиса $\psi_{in}(k)$ обеспечивается за счет ортогональности комплексных экспоненциальных функций на дискретном интервале M_n и свойства (5) и (5a).

Предположим, что скрытый сигнал имеет гауссово распределение амплитуд с нулевым средним и дисперсией σ_s^2 . Коэффициенты $Z_s(i; n; \lambda_p)$, полученные для разных реализаций $\xi_s(k; \lambda_p)$, будут различными, так как являются значениями гауссовской случайной величины с нулевым средним $E\{Z_s(i; n; \lambda)\} = 0$, представляющей собой линейное преобразование (4) дискретизированного гауссовского случайного процесса

$\xi_s(k; \lambda)$. Дисперсия $\sigma_{J_s}^2(i, n)$ i, n -й составляющей $J_s(i; n; k; \lambda) = Z_s(i, n; \lambda)\psi_{in}(k)$ этого сигнала $\xi_s(k; \lambda)$ может быть найдена как мгновенная мощность $\sigma_{J_s}^2(i, n; k; \lambda) = |J_s(i, n, k; \lambda)|^2$ (для k -го момента времени), усредненная на дискретном интервале времени M_n и на множестве Λ элементарных событий:

$$\begin{aligned} \sigma_{J_s}^2(i, n) &= E \sum_{k \in M_n} |J_s(i, n; k; \lambda)|^2 / K_n = \\ &= 2\Delta f E |Z_s(i, n; \lambda)|^2 / K_n = E \{ \sigma_{J_s}^2(i, n; \lambda) \}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\varepsilon_{J_s}(i, n; \lambda) = |Z_s(i, n; \lambda)|^2$ – энергия и $\sigma_{J_s}^2(i, n; \lambda) = 2\varepsilon_{J_s}(i, n; \lambda)\Delta f / K_n$ – мощность являются случайными, а $\varepsilon_{J_s}(i, n) = E \{ \varepsilon_{J_s}(i, n; \lambda) \}$ и $\sigma_{J_s}^2(i, n) = 2\varepsilon_{J_s}(i, n)\Delta f / K_n$ – не случайными значениями i, n -й составляющей дискретизированного сигнала $\xi_s(k; \lambda)$. Предполагается что энергетический спектр двухпараметрического разложения [11] $\varepsilon_s(i, n) = \varepsilon_{J_s}(i, n) = E |Z_s(i, n; \lambda)|^2$ известен. Составляющие $J_s(i; n; k; \lambda)$ скрытого сигнала $\xi_s(k; \lambda)$ также распределены по гауссовскому закону с нулевым средним и дисперсией, равной $\sigma_{J_s}^2(i, n)$, так что их плотность вероятности может быть задана с помощью выражения

$$p_{i,n}(j_s) = \frac{1}{\sigma_{j_s}(i, n)\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{|j_s(i, n; k)|^2}{2\sigma_{j_s}^2(i, n)} \right\}, \quad (7)$$

где j_s – возможные значения случайной величины $J_s(i; n; k; \lambda)$ при любом $k \in D_d$.

Каждая реализация $\xi_s(k; \lambda_p)$ дискретного сигнала $\xi_s(k; \lambda)$ определяется набором составляющих $Z_s(i; n; \lambda_p)$ и может интерпретироваться как точка в пространстве $l_2(M_d, l_2)$. Поскольку на входе приемника действует ансамбль реализаций $\{\xi_s(k; \lambda_p)\}_{p=1}^{\infty}$, то дискретизированный сигнал $\xi_s(k; \lambda)$ может рассматриваться как элемент гильбертова пространства $L_2(\Lambda, l_2(M_d, l_2))$ над гильбертовым пространством $l_2(M_d, l_2)$, т. е. может трактоваться как счетно-мерная гауссовская случайная величина. В эксперименте на входе приемника может действовать выборка из ансамбля $\{\xi_s(k; \lambda_q)\}_{q=1}^P$, состоящая из P реализаций, а количество составляющих $J_s(i; n; k; \lambda_p) = Z_s(i; n; \lambda_p)\psi_{in}(k)$

дискретизированной реализации может быть ограничено IN элементами $\{J_s(i; n; k; \lambda_p)\}_{i,n=1}^{I,N}$, так как ширина спектра скрытого сигнала на дискретном интервале времени D_d и ширина его текущего спектра на M_n всегда конечны и определяются полосой пропускания входного фильтра приемника и средним интервалом T_n локальной когерентности [8, 9], $I = K_n$. Тогда скрытый сигнал можно рассматривать как INP -мерную случайную величину, подчиняющуюся гауссовскому закону распределения, параметры которого задаются с помощью корреляционной матрицы порядка INP . Вследствие ортонормированности (3а) системы функций $\{\psi_{in}(k)\}_{i=1}^{\infty}$ [11, 12] корреляционная матрица будет диагональной, состоящей из дисперсий (6) случайных величин $J_s(i, n; k; \lambda)$. Тогда, используя (7), случайный дискретный сигнал $\xi_s(k; \lambda)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} p(\xi | s) &= \prod_{p=1}^P \prod_{n=0}^N \prod_{i=1}^I \frac{1}{\sigma_{J_s}(i, n)\sqrt{2\pi}} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{|J_s(k; n, i, p)|^2}{2\sigma_{J_s}^2(i, n)} \right\} = \\ &= \prod_{n=0}^N \prod_{i=1}^I \left(\frac{1}{2\pi\sigma_{J_s}^2(i, n)} \right)^{P/2} \times \\ &\times \exp \left\{ -\sum_{p=1}^P \sum_{n=0}^N \sum_{i=1}^I \frac{2\Delta f |Z_s(i, n; \lambda_p)|^2}{2K_n\sigma_{J_s}^2(i, n)} \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

– многомерной плотности вероятности. Это соотношение описывает входной сигнал приемника в отсутствие помехи и получено путем перехода от случайных функций времени $\xi_s(\mathcal{G}; \lambda)$ пространства $L_2(\Lambda, L_2(T))$ к многомерным случайным величинам $Z_s(i; n; \lambda)$ пространства $L_2(\Lambda, l_2(M_d, l_2))$.

Помеха $\xi_g(\mathcal{G}; \lambda)$, действующая на входе приемника в течение интервала времени T , также представляет собой гауссовский случайный процесс с конечной энергией (2), нулевым средним и дисперсией $N_g = N_0\Delta f$, где N_0 – односторонняя спектральная плотность, равномерная в полосе пропускания приемника Δf . Ее дискретизированные реализации $\xi_g(k; \lambda_p)$ могут быть представлены с помощью соотношения (3), если $\xi_s(k; \lambda_p)$ и $Z_s(i; n; \lambda_p)$ заменить на $\xi_g(k; \lambda_p)$ и $Z_g(i; n; \lambda_p)$ соответственно. Тогда, по аналогии с (8), помеха

$\xi_g(k; \lambda)$ также может быть представлена в виде многомерной плотности вероятности

$$p(\xi|g) = \prod_{n=0}^N \prod_{i=1}^I (2\pi\sigma_g^2(i, n))^{-P/2} \times \exp\left\{-\sum_{p=1}^P \sum_{n=0}^N \sum_{i=1}^I \frac{|J_g(k; n, i, p)|^2}{2\sigma_g^2(i, n)}\right\}, \quad (9)$$

где $\sigma_g^2(i, n) = E \sum_{k \in M_n} |J_g(i, n, k; \lambda)|^2$ – мощность i, n -й составляющей помехи. Если $N_g = N_0 \Delta f$ и $\sigma_g^2(i, n) = 2N_g / K_n$, то

$$p(\xi|g) = \left(\frac{K_n}{2\pi 2N_g}\right)^{\frac{PNI}{2}} \times \exp\left\{-\frac{1}{2N_0} \sum_{p=1}^P \sum_{n=0}^N \sum_{i=1}^I |Z_g(i, n; \lambda_p)|^2\right\}. \quad (10)$$

Соотношения (9) и (10) описывают входной сигнал приемника, если на его входе действует только помеха.

3. Отношение правдоподобия. Для принятия решения о наличии или об отсутствии скрытого сигнала во входной смеси (1) воспользуемся критерием отношения правдоподобия. Для этого необходимо найти условную плотность вероятности амплитуд [5], если на входе приемника совместно действуют скрытый сигнал и помеха. В этом случае каждая составляющая $J_r(i; n; k; \lambda_p) = Z_r(i; n; \lambda_p) \psi_{in}(k)$ дискретизированной реализации $\xi_r(k; \lambda_p)$ входного сигнала приемника $\xi_r(g; \lambda)$ может быть представлена в виде суммы

$$J_r(i, n; k; \lambda_p) = J_t(i, n; k; \lambda_p) + J_g(i, n; k; \lambda_p),$$

где $Z_r(i, n; \lambda_p)$ – коэффициенты ряда (3), которые определяются с помощью соотношения (4), если вместо $\xi_s(k; \lambda_p)$ под знаком интеграла использовать $\xi_r(k; \lambda_p)$. Поэтому на входе приемника действует ансамбль случайных векторов $\left\{J_r(i, n; k; \lambda_p)\right\}_{i, n=1}^{I, N}$ $\left\{J_r(i, n; k; \lambda_p)\right\}_{i, n, p=1}^{I, N, P}$ являющийся суммой независимых скрытого $\left\{J_t(i, n; k; \lambda_p)\right\}_{i, n, p=1}^{I, N, P}$ и $\left\{J_g(i, n; k; \lambda_p)\right\}_{i, n, p=1}^{I, N, P}$ помехового ансамблей гауссовских векторов. Его совместная плотность вероятности может быть записана в виде

$$p(\xi|s+g) = p(J_r) = \prod_{p=1}^P \prod_{n=0}^N \prod_{i=1}^I \frac{1}{\sqrt{2\pi[\sigma_s^2(i, n) + \sigma_g^2(i, n)]}} \times \exp\left\{-\frac{|J_r(i, n; k; \lambda_p)|^2}{2[\sigma_s^2(i, n) + \sigma_g^2(i, n)]}\right\} = \prod_{n=0}^N \prod_{i=1}^I (2\pi[\sigma_s^2(i, n) + \sigma_g^2(i, n)])^{-P/2} \times \exp\left\{-\sum_{p=1}^P \sum_{n=0}^N \sum_{i=1}^I \frac{|J_r(i, n; k; \lambda_p)|^2}{2[\sigma_s^2(i, n) + \sigma_g^2(i, n)]}\right\}. \quad (11)$$

Тогда с учетом (9) и (11) отношение правдоподобия равно

$$l = p(\xi|s+g) / p(\xi|g) = \prod_{n=0}^N \prod_{i=1}^I \left(\frac{\sigma_g^2(i, n)}{\sigma_s^2(i, n) + \sigma_g^2(i, n)}\right)^{P/2} \times \exp\left\{\sum_{p=1}^P \sum_{n=0}^N \sum_{i=1}^I \left[\frac{|J_r(i, n; k; p)|^2}{2\sigma_g^2(i, n)} - \frac{|J_r(i, n; k; p)|^2}{2[\sigma_s^2(i, n) + \sigma_g^2(i, n)]}\right]\right\} = \prod_{n=0}^N \prod_{i=1}^I \left(\frac{1}{q^2(i, n) + 1}\right)^{P/2} \times \exp\left\{\frac{1}{2} \sum_{p=1}^P \sum_{n=0}^N \sum_{i=1}^I \frac{1}{\sigma_g^2(i, n)} \frac{q^2(i, n)}{q^2(i, n) + 1} |J_r(i, n; k; p)|^2\right\}, \quad (12)$$

где $q^2(i, n) = \sigma_s^2(i, n) / \sigma_g^2(i, n) = \varepsilon_s(i, n) / \varepsilon_g(i, n)$ – ожидаемое отношение сигнал/помеха для i -й составляющей n -го энергетического спектра.

4. Модель обнаружителя скрытых сигналов. Процесс обнаружения заключается в сравнении отношения правдоподобия l с порогом l_0 . Из последнего выражения следует, что отношение правдоподобия является монотонной функцией от $\sum_{p=1}^P \sum_{n=0}^N \sum_{i=1}^I \frac{q^2(i, n)}{q^2(i, n) + 1} \frac{|J_r(i, n; k; p)|^2}{\sigma_g^2(i, n)}$.

После логарифмирования соотношения (12) можно получить решающую статистику

$$L' = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^P \sum_{n=0}^N \sum_{i=1}^I \frac{q^2(i, n)}{q^2(i, n) + 1} \frac{|J_r(i, n; k; p)|^2}{\sigma_g^2(i, n)} = \frac{1}{2N_0} \sum_{p=1}^P \sum_{n=0}^N \sum_{i=1}^I \frac{q^2(i, n)}{q^2(i, n) + 1} |Z_r(i, n; \lambda_p)|^2. \quad (13)$$

Тогда модель обнаружителя скрытого сигнала можно представить в следующем виде:

вносится решение про принятие гипотезы H_1 о наличии скрытого сигнала на входе приемника, если $L \geq L_0$, и решение про принятие гипотезы H_0 об его отсутствии, если $L < L_0$, т. е.

$$L = \sum_{p=1}^P \sum_{n=0}^N \sum_{i=1}^I |Z_f(i, n; \lambda_p)|^2 \begin{cases} \geq L_0 \Rightarrow H_1, \\ < L_0 \Rightarrow H_0, \end{cases} \quad (14)$$

где $|Z_f(i, n; \lambda_p)|^2 = |K(i, n)|^2 |Z_r(i, n; \lambda_p)|^2$ – энергетический спектр двухпараметрического представления реализации выходного сигнала весового фильтра с переменными параметрами, квадрат амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) которого имеет вид $|K(i, n)|^2 = q^2(i, n)/(q^2(i, n)+1)$; $L_0 = N_0 \left[2 \ln l_0 + P \sum_{n=0}^N \sum_{i=1}^I \ln(q^2(i, n)+1) \right]$ – порог обнаружения.

Коэффициент передачи $K(i, n)$ весового фильтра состоит из двух сомножителей, что позволяет рассматривать его как каскадное включение двух фильтров. Квадрат модуля АЧХ первого фильтра (Ф1) совпадает с энергетическим спектром двухпараметрического преобразования скрытого сигнала $|K_1(i, n)|^2 = q^2(i, n) = \varepsilon_s(i, n)/N_0$. АЧХ второго фильтра (Ф2) для каждого n -го момента времени совпадает с АЧХ обесцараживающего фильтра [14, 15]. В двухпараметрическом представлении обесцараживающий фильтр имеет изменяющиеся во времени параметры, и поэтому может называться нестационарным обесцараживающим фильтром, квадрат модуля АЧХ которого имеет вид $|K_2(i, n)|^2 = 1/(q^2(i, n)+1)$. Следует отметить, что соотношениями для $|K_1(i, n)|^2$ и $|K_2(i, n)|^2$ устанавливаются требования только к АЧХ Ф1 и Ф2. Фазочастотная характеристика этих фильтров может быть произвольной.

На рис. 1 показано семейство нормированных квадратов модуля АЧХ весового фильтра $|K(i-i_0, n)|^2/q^2(i_0, n)$ как функции дискретного аргумента в зависимости от расстройки $(i-i_0)/\Delta i$ при $q^2(i_0, n) = 730, 240, 80, 9, 1, 0,3$ – сплошные кривые 1–6 соответственно, а также если $q^2(i_0, n) \rightarrow \infty$ – пунктирная и $q^2(i_0, n) \ll 1$ – штрихпунктирная линия. Здесь $|K(i-i_0, n)|^2 = q^2(i-i_0, n)/[q^2(i-i_0, n)+1]$ – квадрат модуля АЧХ, i_0 – положение максимума $q^2(i_0, n)$ и Δi – ширина текущей (n -й) АЧХ $|K_1(i, n)|$ фильтра Ф1 по уровню –3 дБ.

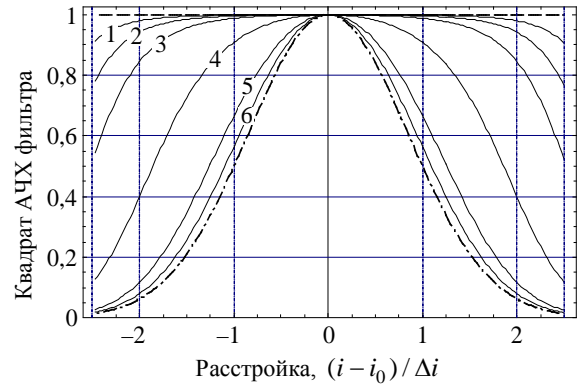


Рис. 1. Зависимость АЧХ весового фильтра от расстройки

Так как спектральная плотность N_0 помехи $\xi_g(\vartheta; \lambda)$ постоянна в полосе пропускания приемника, то форма $q^2(i, n)$ определяется формой энергетического спектра двухпараметрического преобразования $\varepsilon_s(i, n)$ скрытого сигнала $\xi_s(\vartheta; \lambda)$. Поэтому если $q^2(i, n) \ll 1$, то при уменьшении $q^2(i, n)$ АЧХ весового фильтра $|K(i, n)|$ сходится к энергетическому спектру двухпараметрического преобразования $\varepsilon_s(i, n)$ скрытого сигнала, $|K(i, n)|^2 \rightarrow \varepsilon_s(i, n)$. Тогда соотношение (14) может быть записано в следующем виде:

$$L = \sum_{p=1}^P \sum_{n=0}^N \sum_{i=1}^I q^2(i, n) |Z_r(i, n; \lambda_p)|^2. \quad (15)$$

Если $q^2(i, n) \gg 1$ при каждом i и n , то АЧХ весового фильтра $|K(i, n)|$ сходится к единице, $|K(i, n)| \xrightarrow{q \rightarrow \infty} 1$, и тогда

$$L = \sum_{p=1}^P \sum_{n=0}^N \sum_{i=1}^I |Z_r(i, n; \lambda_p)|^2. \quad (16)$$

Если в соотношении (14) $I \rightarrow \infty$, то внутренняя сумма сходится к норме реализации $\xi_f(\vartheta; \lambda_q)$ для M_n -окрестности момента времени t_n в координатном гильбертовом пространстве l_2 , а внутренняя двойная сумма (14) сходится к норме $\|x_p\|_{l_2(l_2)}^2$ реализации $\xi_f(k; \lambda_p)$ в пространстве $l_2(l_2)$. Также известно [16], что если $P \rightarrow \infty$, то усреднение по ансамблю с вероятностью 1 сходится к математическому ожиданию. Поэтому если P и $I \rightarrow \infty$, то трехкратная сумма (14) сходится к норме $\|x\|_{L_2(\Lambda, l_2(M, l_2))}^2$ случайного сигнала $\xi_f(k; \lambda)$ в пространстве $L_2(\Lambda, l_2(l_2))$. Но так как и

P и $I < \infty$, то тройная сумма является оценкой этой нормы, а значит, и энергии случайного сигнала $\xi_f(k; \lambda)$.

5. Функциональная схема обнаружителя скрытых стохастических сигналов с *a priori* известным двухпараметрическим спектром энергии показана на рис. 2. Обнаружитель состоит из последовательно включенных оптимального приемника и порогового устройства (ПУ). Оптимальный приемник включает каскадносоединенные двухпараметрический преобразователь (ДПП) принятого сигнала в ортонормированном базисе гильбертова пространства $l_2(l_2)$, квадратирующее устройство (КУ), весовой фильтр (Ф) и три сумматора $\sum_{i=1}^I$, $\sum_{n=0}^N$ и $\sum_{p=0}^{P-1}$.

С помощью функциональных блоков ДПП и КУ оценивается двухпараметрический спектр энергии $|Z_p|^2 = |Z_r(i, n; \lambda_q)|^2$ реализации входного сигнала в M_n -окрестности каждого n -го момента времени, составляющие которого взвешиваются с помощью фильтра Ф. Квадрат модуля АЧХ этого фильтра, как следует из соотношения (14), имеет вид $K^2(i, n) = \sigma_s^2(i, n) / (\sigma_s^2(i, n) + \sigma_g^2(i, n))$. Составляющие взвешенного энергетического спектра $\varepsilon_{inp} = |x_p|^2$ поступают на вход сумматора $\sum_{i=1}^I$, с помощью

которого находится энергия ε_{np} (оценка нормы $\|x_p\|_{l_2}^2 = \varepsilon_{np}$ в координатном гильбертовом пространстве l_2) реализации входного сигнала в M_n -окрестности n -го момента времени. В течение дискретного интервала $K = IK_n$ существования реализации на множестве M_d энергии вычисляются в M_n -окрестности I -го количества смежных интервалов времени, запоминаются в блоке, условно показанном в виде набора линий задержки на интервалы $T_n = K_n / 2\Delta f$, и складываются в сумматоре $\sum_{n=0}^N$. В результате находится энергия ε_p p -й реализации – оценка нормы $\|x_p\|_{l_2(l_2)}^2 = \varepsilon_p$ в пространстве $l_2(M_d, l_2(M_n))$.

Здесь предполагается, что выборка из ансамбля состоит из P реализаций $\xi_s(k; \lambda_p)$, разнесенных во времени. Она формируется в блоке памяти, который подключается к выходу сумматора $\sum_{n=0}^N$. Блок памяти условно показан в виде набора линий задержки на интервалы, определяющиеся интервалами следования T_p реализаций. Если реализации имеют неперекрывающиеся спектры, то оптимальный приемник может быть построен по многоканальной схеме.

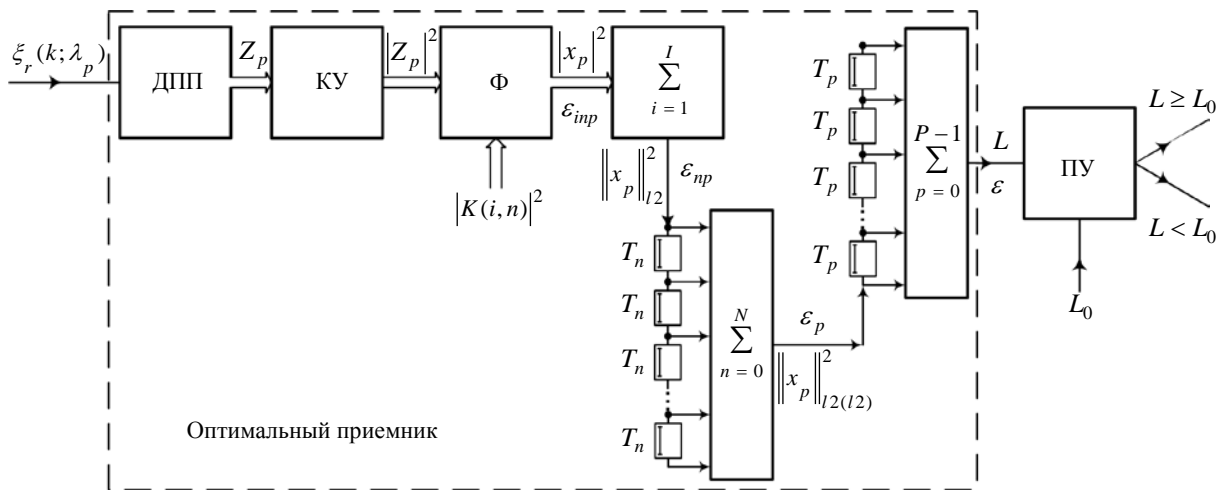


Рис. 2. Структурная схема обнаружителя скрытых радиосигналов

После вычисления энергии P реализаций их значения усредняются с помощью сумматора $\sum_{p=0}^{P-1}$, что дает оценку энергии ε взвешен-

ного скрытого сигнала $\xi_f(k; \lambda)$. Поэтому синтезированный приемник также [1, 2] может называться энергетическим. Выходной сигнал $L = \varepsilon$

сумматора $\sum_{p=0}^{P-1}$ – оценка нормы $\|x\|_{L_2(\Lambda, l_2(M, l_2))}^2$ взвешенного стохастического сигнала в гильбертовом пространстве $L_2(\Lambda, l_2(l_2))$ – сравнивается с порогом L_0 , в результате чего принимается решение о наличии или отсутствии во входной смеси (1) скрытого сигнала $\xi_s(\mathcal{G}; \lambda)$.

6. Условные плотности вероятности решающей статистики энергетического обнаружителя. Качество обнаружения описывается с помощью вероятностей ложной тревоги и правильного обнаружения. Они могут быть определены на основе закона распределения решающей статистики L энергетического приемника, которая имеет следующий вид:

$$L = \sum_{p=1}^P \sum_{n=0}^N \sum_{i=1}^I x(p, n, i; \lambda_p). \quad (17)$$

Правая часть (17) есть сумма ортогональных в пространстве $L_2(\Lambda, l_2(l_2))$ случайных величин $x(p, n, i; \lambda) = |K(i, n)|^2 |Z_r(i, n; \lambda)|^2 2\Delta f / K_n$, характеристическая функция которых имеет вид

$$\Theta_x(j\nu) = (1 - j2\nu |K(i, n)|^2 \sigma_{pmi}^2)^{-1/2}.$$

Рассмотрим два случая, когда на входе энергетического приемника присутствует и сигнал, и помеха или только помеха.

Если на входе приемника действует только гауссовская помеха, $A = 0$, то $Z_r(i, n; \lambda_p) = Z_g(i, n; \lambda_p)$ и все составляющие $Z_r(i, n; \lambda)$ входного сигнала оптимального приемника $\xi_r(\mathcal{G}; \lambda) = \xi_g(\mathcal{G}; \lambda)$ имеют нулевое математическое ожидание $m_1(g) = 0$ и постоянную дисперсию $\sigma_{in}^2(g) = \sigma^2(g) = N_0/T$. После умножения двухпараметрического спектра энергии $|Z_g(i, n)|^2 = N_0$ этого сигнала на весовую функцию $|K(i, n)|^2$ дисперсия σ_{in}^2 составляющих становится функцией двух (i и n) дискретных переменных $\sigma_{ni}^2 = \sigma_{in}^2(x|g) = \sigma^2(g) |K(i, n)|^2$ и уже не является постоянной величиной.

Если на входе приемника действуют гауссовские сигнал и помеха, $A = 1$, то составляющие входного сигнала приемника $Z_r(i, n; \lambda) = Z_s(i, n; \lambda) + Z_g(i, n; \lambda)$ случайные величины с нулевым математическим ожиданием $m_1(x|s+g) = 0$ и увеличенной дисперсией $\sigma^2(g) + \sigma_{in}^2(s)$. После умножения энергетического спектра этого сигнала на весовую функцию

$|K(i, n)|^2$ дисперсия его составляющих равна $\sigma_{ni}^2 = \sigma_{in}^2(x|s+g) = \sigma^2(g) |K(i, n)|^2 + \sigma_{in}^2(s) |K(i, n)|^2 = \sigma_{in}^2(x|g) + \sigma_{in}^2(x|s)$, где $\sigma_{in}^2(x|g) = \sigma_{in}^2(s) |K(i, n)|^2$.

Тогда в соответствии с (17) характеристическая функция достаточной статистики L при условиях отсутствия ($x|g$) и наличия ($x|s+g$) сигнала $\xi_s(\mathcal{G}; \lambda)$ может быть представлена в виде

$$\Theta_L(j\nu) = \prod_{n=0}^N \prod_{i=1}^I (1 - j2\nu \sigma_{ni}^2(x|\cdot))^{-P/2}. \quad (18)$$

Отсюда (18) для решающей статистики L можно найти моменты $m_k(L|\cdot)$ ее распределения любого порядка k . Ниже приводятся значения моментов нулевого $m_0(L|\cdot) = 1$, первого

$$m_1(L|\cdot) = \sum_{p=1}^P \sum_{n=0}^N \sum_{i=1}^I \sigma_{pmi}^2(x|\cdot), \quad (19)$$

второго

$$m_2(L|\cdot) = 2 \sum_{p=1}^P \sum_{n=0}^N \sum_{i=1}^I \sigma_{ni}^4(x|\cdot) + \left(\sum_{p=1}^P \sum_{n=0}^N \sum_{i=1}^I \sigma_{ni}^2(x|\cdot) \right)^2, \quad (20)$$

третьего

$$m_3(L|\cdot) = 8 \sum_{p=1}^P \sum_{n=0}^N \sum_{i=1}^I \sigma_{ni}^6(x|\cdot) + 6 \sum_{p=1}^P \sum_{n=0}^N \sum_{i=1}^I \sigma_{ni}^2(x|\cdot) \sum_{p=1}^P \sum_{n=0}^N \sum_{i=1}^I \sigma_{ni}^4(x|\cdot) + \left(\sum_{p=1}^P \sum_{n=0}^N \sum_{i=1}^I \sigma_{ni}^2(x|\cdot) \right)^3$$

порядка и дисперсии

$$D(L|\cdot) = 2 \sum_{p=1}^P \sum_{n=0}^N \sum_{i=1}^I \sigma_{ni}^4(x|\cdot). \quad (22)$$

Соотношения для моментов более высокого порядка громоздки, и поэтому не приводятся.

Условные плотности вероятностей решающей статистики $p(L|\cdot)$ при условии отсутствия $p(L|g)$ и наличия $p(L|g+s)$ сигнала на входе могут быть представлены приближенно с помощью ряда Лагерра с конечным числом членов K . Если $K = 3$, то при $L \geq 0$

$$\begin{aligned}
 p(L|\cdot) &= \frac{m_1(L|\cdot)}{D(L|\cdot)} \left[\frac{m_1(L|\cdot)}{D(L|\cdot)} L \right]^{\frac{m_1^2(L|\cdot)}{D(L|\cdot)} - 1} \times \\
 &\times \exp \left\{ -\frac{m_1(L|\cdot)}{D(L|\cdot)} L \right\} \times \\
 &\times \left\{ \frac{1}{\Gamma \left(\frac{m_1^2(L|\cdot)}{D(L|\cdot)} \right)} + \left[m_1^2(L|\cdot) \left[m_1^4(L|\cdot) - m_1(L|\cdot) m_3(L|\cdot) \right] + \right. \right. \\
 &+ 3m_1^2(L|\cdot) D(L|\cdot) + 2D^2(L|\cdot) \left. \right] L_3^a(L|\cdot) \left. \right] / \left[D^3(L|\cdot) \times \right. \\
 &\left. \times \Gamma \left(\frac{m_1^2(L|\cdot)}{D(L|\cdot)} + 3 \right) \right] \left. \right\} \quad (23)
 \end{aligned}$$

и $p(L|\cdot) = 0$ при $L < 0$. Здесь $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция;

$$\begin{aligned}
 L_3^a(L|\cdot) &= \frac{11}{6} \frac{m_1^2(L|\cdot)}{D(L|\cdot)} - \frac{5}{6} + \left(\frac{m_1^2(L|\cdot)}{D(L|\cdot)} - 1 \right)^2 + \\
 &+ \frac{1}{6} \left(\frac{m_1^2(L|\cdot)}{D(L|\cdot)} - 1 \right)^3 - \frac{1}{2} \left[1 + 5 \frac{m_1^2(L|\cdot)}{D(L|\cdot)} + \right. \\
 &\left. + \left(\frac{m_1^2(L|\cdot)}{D(L|\cdot)} - 1 \right)^2 \right] L + \left[1 + \frac{m_1^2(L|\cdot)}{2D(L|\cdot)} \right] L^2 - \frac{1}{6} L^3 \quad (24)
 \end{aligned}$$

– многочлен Лагерра 3-го порядка.

На основе соотношений [19–24] рассчитаны условные плотности вероятности решающей статистики, если на входе обнаружителя присутствует только помеха $p(L|g)$ и если присутствует и сигнал, и помеха $p(L|g+s)$, для случая, когда $\rho = 1$ и $m = 50$ (рис. 3). Здесь ρ – отношение энергии сигнала к энергии помехи; m – база скрытого сигнала.

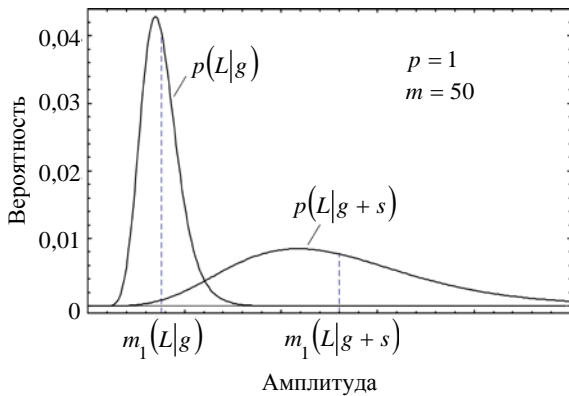


Рис. 3. Плотность вероятности решающей статистики при наличии на входе обнаружителя только помехи $p(L|g)$ и скрытого сигнала и помехи $p(L|g+s)$

Из рисунка видно, что плотности вероятности являются асимметричными функциями, положение максимального и среднего значения которых не совпадает. Среднее значение $m_1(L|g)$ при наличии на входе только помехи определяется энергией помехи, а при наличии сигнала и помехи $m_1(L|g+s)$ – энергией сигнала.

Выводы. Таким образом, на основе дискретного двухпараметрического разложения получена модель обнаружителя скрытых стохастических радиосигналов с известной спектрально-временной структурой на фоне гауссовской помехи с равномерным спектром. Показано, что она отличается от известного энергетического обнаружителя структурой входного фильтра и выходного накопителя. Входной фильтр состоит из двух каскадно-включенных фильтров с переменными параметрами: обеслаивающего и фильтра, АЧХ которого согласована с энергетическим спектром двухпараметрического преобразования скрытого сигнала. Структурная схема выходного накопителя в рассмотренном случае содержит три сумматора, с помощью которых оценивается энергия сигнала, взвешенного с помощью входного фильтра.

Также получены аналитические соотношения для начальных моментов и дисперсии функции распределения решающей статистики. На их основе найдены приближенные соотношения для условных плотностей вероятности при наличии и отсутствии на входе обнаружителя скрытого сигнала с известным двухпараметрическим спектром энергии произвольной формы.

Результаты, полученные в статье, могут использоваться при решении задачи перехвата скрытых радиосигналов и оценке энергетической скрытности радиоэлектронных средств.

1. Peterson W. W. The Theory of Signal Detectability / W. W. Peterson, T. G. Birdsall, W. C. Fox // IRE Trans. on Information Theory. – 1954. – PGIT-4, N 4. – P. 171–212.
2. Urkowitz H. Energy Detection of Unknown Deterministic signals / H. Urkowitz // Proc. IEEE. – 1967. – 55, N 4. – P. 523–531.
3. Shirman Y. D. Some Construction Principles of Anti-LPI Radar / Y. D. Shirman, V. M. Orlenko, V. S. Seleznev // Applied Radio Electronics. – 2005. – 4, N 1. – P. 42–46.
4. Могила А. А. Адаптивная обработка сигналов когерентной РЛС КВЧ ММД в условиях априорной неопределенности / А. А. Могила // 3-я Всесоюзн. шк.-симп. по распространению мм и субмм волн в атмосфере: тез. докл. – Х., 1989. – С. 182–183.
5. Левин Б. П. Теоретические основы статистической радиотехники / Б. П. Левин. – М.: Сов. радио, 1989. – 656 с.
6. Омельченко В. А. Основы спектральной теории распознавания сигналов / В. А. Омельченко – Х.: Вища школа, 1983. – 159 с.
7. Могила А. А. Адаптивная фильтрация сигналов, основанная на двухпараметрическом представлении случайных

- процессов / А. А. Могила // Радиофизика и электрон.: сб. науч. тр. / Ин-т радиофизики и электрон. НАН Украины. – Х., 1997. – 2, № 2. – С. 137–141.
8. Могила А. А. Траекторный спектральный анализ / А. А. Могила, Г. И. Хлопов, В. П. Шестопалов // Радиотехника: науч.-техн. сб. / Харьков. гос. ун-т. – Х., 1989. – Вып. 91. – С. 86–93.
 9. Хлопов Г. И. Локальная когерентность сигналов, рассеянных сложными объектами и их адаптивная обработка в технологических РЛС миллиметрового диапазона / Г. И. Хлопов, В. П. Шестопалов // Применение радиоволн миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов: сб. науч. тр. / Ин-т радиофизики и электроники АН УССР. – Х., 1990. – С. 85–93.
 10. Могила А. А. Двухпараметрическое представление нестационарных случайных сигналов с конечной средневзвешенной энергией / А. А. Могила, К. А. Лукин // Радиофизика и электрон.: сб. науч. тр. / Ин-т радиофизики и электрон. НАН Украины. – Х., 1996. – 1, – С. 118–124.
 11. Могила А. А. Взаимосвязь двухпараметрических представлений случайных сигналов с конечной энергией в различных ортонормированных базисах / А. А. Могила // Радиофизика и электрон.: сб. науч. тр. / Ин-т радиофизики и электрон. НАН Украины. – Х., 2000. – 5, № 3. – С. 131–136.
 12. Могила А. А. Взаимосвязь одно- и двухпараметрических представлений случайных сигналов с конечной энергией / А. А. Могила, К. А. Лукин // Радиофизика и электрон.: сб. науч. тр. / Ин-т радиофизики и электрон. НАН Украины. – Х., 2001. – 6, № 2–3. – С. 320–326.
 13. Хургин Я. И. Фinitные функции в физике и технике / Я. И. Хургин, В. П. Яковлев. – М.: Наука, 1971. – 408 с.
 14. Сосулин Ю. Г. Обеляющий фильтр: эволюция и применение / Ю. Г. Сосулин, В. В. Костров // Радиотехника и электрон. – 1998. – 43, N 9. – С. 1030–1043.
 15. Гуткин Л. С. Теория оптимальных методов радиоприема при флуктуационных помехах / Л. С. Гуткин. – М.: Госэнергоиздат, 1961. – 488 с.
 16. Cramer H. Mathematical methods of statistics / H. Cramer. – Uppsala: Almqvist & Wiksells, 1945. – 575 p.

Рукопись поступила 28.07.2011.

A. A. Mogyla

THE DECISION STATISTICS OF ENERGY DETECTION BASED ON TWO-PARAMETRICAL EXPANSION OF STOCHASTIC SIGNALS

Questions of optimal detection of stochastic signals hiding with known spectral-temporal structure on the background of normal noise with a flat spectrum in a receiver pass-band are considered. The likelihood ratio and the decision statistics are obtained using two-parametrical transform; the block diagram of detector is developed. The approximate expressions for conditional probability density of amplitude are found for two cases: only Gaussian interference affects on an input; both a signal and interference affect on an input.

Key words: stochastic signal, two-parametrical transform, likelihood ratio, decision statistics, energy detection, spectral-temporal structure, Gaussian interference.

A. A. Могила

ВИРІШАЛЬНА СТАТИСТИКА ЕНЕРГЕТИЧНОГО ВИЯВЛЯЧА, ЩО ҐРУНТУЄТЬСЯ НА ДВОПАРАМЕТРИЧНОМУ РОЗКЛАДАННІ СТОХАСТИЧНИХ СИГНАЛІВ

Розглянуто питання оптимального виявлення потайних стохастичних сигналів з відомою спектрально-часовою структурою на фоні нормального шуму з рівномірним спектром у смузі пропускання приймача. Отримано відношення правдоподібності та вирішальну статистику при використанні двопараметричного розкладання, побудовано структурну схему виявляча. Знайдено наближені вирази для умовної щільності ймовірності амплітуди, якщо на вході діє тільки гаусова завада та якщо діють і сигнал, і завада.

Ключові слова: стохастичний сигнал, двопараметричне розкладання, відношення правдоподібності, вирішальна статистика, енергетичний виявляч, спектрально-часова структура, гаусова завада.