

## ЭВОЛЮЦИЯ И ДИНАМИЧЕСКАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ МЕЗОСКОПИЧЕСКИХ ДИССИПАТИВНЫХ СТРУКТУР (ВРАЩАЮЩИХСЯ АВТОВОЛН) С КРАТНЫМИ ТОПОЛОГИЧЕСКИМИ ЗАРЯДАМИ В ТРЕХУРОВНЕВЫХ ВОЗБУДИМЫХ СИСТЕМАХ

Д. Н. Маковецкий

*Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины,  
12, ул. Ак. Проскуры, Харьков, 61085, Украина  
E-mail: [makov@ire.kharkov.ua](mailto:makov@ire.kharkov.ua)*

Работа посвящена компьютерному моделированию эволюции мезоскопических диссипативных структур (ДС), возникающих в трехуровневых возбудимых системах фазерного типа. Основное внимание уделено изучению вращающихся спиральных автоволн (ВСА), в том числе устойчивых ВСА с кратными топологическими зарядами. В наших компьютерных экспериментах обнаружены и детально изучены размерные эффекты для таких ВСА. Продемонстрирована гиперчувствительность к начальным условиям для мультистабильной возбудимой системы, имеющей пространственные аттракторы в форме ВСА с различными высшими топологическими зарядами. Впервые выполнено моделирование эффекта пространственного сосуществования регулярных и нерегулярных ДС при медленных переходных процессах в возбудимой среде (подобный эффект наблюдался нами ранее в реальных экспериментах на рубиновом фазере). Ил. 3. Библиогр.: 41 назв.

**Ключевые слова:** мезоскопические диссипативные структуры, топологический заряд, фазер.

Исследование процессов возникновения, эволюции, конкуренции и динамической стабилизации диссипативных структур (ДС) является актуальной задачей для целого ряда направлений физики нелинейных систем [1], физической химии и химической кинетики [2], наноэлектроники [3], а также для многих других областей современного естествознания и техники, включая биофизику [4], технологические системы управления энергоснабжением [5] и др.

Одним из наиболее распространенных типов ДС являются автоволны [6], имеющие характерные, вполне определенные топологические характеристики и метрические параметры. Например, для вращающихся спиральных автоволн (ВСА) такими величинами являются топологический заряд  $Q_T$  и винеровская длина волны (винеровский масштаб)  $\lambda_W$  [7, 8]. В распределенных и (или) многокомпонентных диссипативных системах автоволны играют такую же ключевую роль, как и автоколебания в сосредоточенных системах.

Все ДС, в том числе и автоволны, могут возникать и существовать только в неравновесной среде за счет проходящего через нее потока энергии. Свойства автоволн резко отличаются от свойств обычных волн, распространяющихся в равновесных или квазиравновесных средах. Так, автоволны не интерферируют, но могут аннигилировать при "лобовом" столкновении друг с другом. Распространяющиеся в активной среде автоволны сохраняют свою амплитуду и форму. Например, при концентрическом или спиральном распространении автоволны ее амплитуда не уменьшается, как у обычной волны, поскольку энергия для поддержания автоволны черпается из каждой точки активной среды.

Особый интерес представляют механизмы коллективной автоволновой динамики, обусловленные самоорганизацией ДС в многочастичных неравновесных системах с локальными взаимодействиями [9]. Кооперативные явления в таких системах обычно являются результатом развития и стабилизации неустойчивостей, реализующихся на мезоскопических масштабах. Типичным здесь является формирование мезоскопических объектов автоволнового типа, определяющих в итоге макроскопическую динамику системы [2-4, 6, 8].

Возникновение ДС (в том числе автоволновых объектов) в микроволновом акустическом лазере (фазере) было обнаружено ранее экспериментально [10, 11]. Для выяснения механизмов формирования автоволновых структур в фазере требуется, как было показано в работах [12-16], моделирование мезоскопических ДС без использования процедуры пространственного усреднения состояний активных элементов фазера. Типичными являются ситуации, когда количество  $D$  активных центров (АЦ) фазерной среды, вовлекаемых в процесс формирования ДС, является мезоскопически большим ( $D \approx 10^3 - 10^4$  и более). Кратко рассмотрим вопросы моделирования подобных больших систем применительно к интересующей нас проблеме фазерной генерации.

**1. Современное состояние проблемы и цель работы.** Традиционный подход к математическому моделированию такого рода сложных систем базируется на термодинамических представлениях, распространяемых на область, где имеется сильная неравновесность активной среды [17]. Самоорганизация ДС трактуется, согласно

И. Пригожину, как результат флуктуационной перестройки возбуждений в активной среде [17].

В рамках указанного подхода для ряда случаев удается корректно ввести такие параметры, как температура неравновесной системы, ее теплоемкость и т. д. Подтверждением этого является, например, плодотворное использование концепции спиновой температуры при интерпретации микроволновых экспериментов по электронному парамагнитному резонансу [18] и по фазерному усилению гиперзвука [19].

С другой стороны, в похожих системах к настоящему времени экспериментально обнаружен ряд новых явлений, которые не удается объяснить на основе концепций неравновесной термодинамики. К их числу относятся и нелинейные явления в микроволновом фазерном генераторе [10, 11, 16]. В отличие от упомянутых выше работ по фазерному усилению гиперзвука [19], данные по исследованию фазерной генерации [10, 11, 16] указывают на доминирующую роль автоволн в макроскопической динамике системы. В данном случае ни спиновая температура электронной подсистемы, ни спиновая температура связанной с ней ядерной подсистемы не могут быть корректно определены. Аналогичная ситуация имеет место и при исследовании генерации фононов в других частотных диапазонах [20, 21].

В работах [12-15] была предложена динамическая модель возбудимой трехуровневой среды фазерного типа, основанная на общности ряда важных свойств неравновесной системы парамагнитных АЦ в кристалле и свойств АЦ в неравновесной физико-химической системе типа Белоусова-Жаботинского. Эта модель, в свою очередь, основана на клеточно-автоматном методе моделирования многочастичных систем [9]. В качестве базовой была выбрана модель возбудимой среды Зыкова-Михайлова (ЗМ) [7], которая допускает модификацию в сторону приближения к условиям задачи о пространственной динамике трехуровневой фазерной системы [12-15].

Конкретным примером системы возбудимых парамагнитных АЦ в кристалле являются ионы  $\text{Ni}^{2+}$ , внедренные в решетку корунда  $\text{Al}_2\text{O}_3$ . Фазер на основе системы  $\text{Ni}^{2+} : \text{Al}_2\text{O}_3$  был разработан и экспериментально исследован нами ранее [22]. Структура нижних энергетических уровней системы  $\text{Ni}^{2+} : \text{Al}_2\text{O}_3$  и правила переходов между этими уровнями соответствуют аналогичным характеристикам модельной трехуровневой возбудимой среды типа ЗМ [7]. В частности, нижний энергетический уровень  $L_I^{(\text{Ni})}$  для иона  $\text{Ni}^{2+}$ , как и нижний уровень  $L_I^{(\text{ZM})}$  для

АЦ в модели ЗМ, является основным (устойчивым по отношению к малым возмущениям). Остальные уровни (средний  $L_{II}^{(\text{Ni})}$  и верхний  $L_{III}^{(\text{Ni})}$ ) для иона  $\text{Ni}^{2+}$ , как и соответствующие уровни  $L_{II}^{(\text{ZM})}$  и  $L_{III}^{(\text{ZM})}$  для АЦ в модели ЗМ, являются метастабильными. Существенно, что между энергетическими уровнями  $L_I^{(\text{Ni})}$ ,  $L_{II}^{(\text{Ni})}$  иона  $\text{Ni}^{2+}$  строго запрещены магнитодипольные переходы (при направлении статического магнитного поля вдоль оптической оси корунда) [22]. Это соответствует так называемой рефрактерности второго уровня АЦ в модели ЗМ. Верхний (третий) уровень  $L_{III}^{(\text{Ni})}$  иона  $\text{Ni}^{2+}$  в корунде является аналогом возбужденного (третьего) уровня АЦ в модели ЗМ  $L_{III}^{(\text{ZM})}$ . Более того, соотношение времен жизни для метастабильных уровней  $L_{II}^{(\text{Ni})}$  и  $L_{III}^{(\text{Ni})}$  является по порядку величины таким же, как и для  $L_{II}^{(\text{ZM})}$ ,  $L_{III}^{(\text{ZM})}$ , что и позволяет использовать модель ЗМ в качестве базовой для исследования фазерной системы.

Однако имеется и одно принципиально важное различие между АЦ типа ионов  $\text{Ni}^{2+}$  в корунде и АЦ в моделях типа ЗМ. Дело в том, что помимо локальной активации возбуждений (обычной для физико-химических моделей типа ЗМ) в системе  $\text{Ni}^{2+} : \text{Al}_2\text{O}_3$  имеет место также и локальное ингибирование уже возбужденных АЦ. Это требует модификации исходной модели ЗМ, где локальное ингибирование возбуждений отсутствует (такова особенность реакций типа Белоусова-Жаботинского, для описания которых служит модель ЗМ). Соответствующая модификация модели ЗМ была предложена и детально описана в работах [12-15].

В рамках указанной модифицированной модели ЗМ в работах [12-15] были выполнены компьютерные эксперименты, касающиеся в основном ДС типа ВСА с топологическими зарядами  $Q_T = \pm 1$ . Численное исследование других ДС, в том числе ВСА с кратными топологическими зарядами ( $|Q_T| > 1$ ), представляется весьма важным для понимания причин возникновения автоволновых резонансов на гармониках частоты модуляции фазерной системы, а также в связи с более общим вопросом об устойчивости ДС с кратными топологическими зарядами в различных системах [23-25].

Таким образом, актуальной является задача моделирования ДС с кратными топологическими зарядами в ограниченной активной среде с локально связанными трехуровневыми АЦ.

Целью настоящей работы является компьютерное моделирование эволюции и динамической стабилизации мезоскопических ДС типа ВСА с кратными топологическими зарядами в трехуровневых возбудимых системах (на основе клеточно-автоматного представления активной среды [7, 9]).

Основные задачи работы – выполнение численных экспериментов, направленных на исследование размерных эффектов при самоорганизации ВСА с кратными топологическими зарядами, на выяснение возможности сосуществования регулярных и нерегулярных мезоскопических ДС в процессе эволюции активной системы и на изучение гиперчувствительности трехуровневой возбудимой среды фазерного типа к пространственной конфигурации ее начального возбуждения при формировании ДС с кратными топологическими зарядами.

Перейдем к рассмотрению базовых моделей, используемых при организации компьютерных экспериментов в интересующей нас области.

**2. Базовые дискретные модели трехуровневой активной среды.** Наиболее известные модели данного типа представляют собой клеточно-автоматные реализации концептуальной модели Винера-Розенблюта [7]. Некоторые простейшие модели из этого класса исследовались методом численных экспериментов еще в 1970-х гг. [26, 27], однако широко внимание клеточно-автоматный подход к исследованию многочастичных систем привлек только в последние годы [9, 28].

В рамках клеточно-автоматных моделей многочастичных возбудимых систем обычно считается, что система содержит трехуровневые АЦ, локально взаимодействующие между собой в пределах заданной окрестности. Задача состоит в исследовании нестационарных пространственных структур, характеризующих зависящие от времени  $t$  распределения АЦ по уровням  $L_K^{(i)}(\vec{R})$ , где вектор  $\vec{R}$  указывает координаты АЦ, а индекс  $K$  нумерует рабочие уровни. Далее будут рассмотрены двумерные (2D) дискретные активные среды (прямоугольные решетки) с координатами АЦ  $\vec{R} = (i, j)$ , где  $i, j$  – целые числа, причем  $i \in [1, M_X]$ ;  $j \in [1, M_Y]$ ;  $M_X, M_Y$  – размеры решетки;  $M_X \times M_Y \equiv D_{XY}$ .

Каждый АЦ в каждый из моментов времени  $n$  может находиться только на одном из уровней  $L_K \in \{L_I; L_{II}; L_{III}\}$ , но для определенности считается  $L_I < L_{II} < L_{III}$ . Модельное время  $t$  является дискретным:  $t \in \{n\}$ , где  $n$  – целые числа, лежащие в интервале  $0 \leq n \leq N$ . Здесь  $N$  – продолжительность эволюции системы.

Нижний (основной) уровень  $L_I$  изолированного АЦ – устойчивый, он соответствует отсутствию возбуждения данного АЦ. Если же рядом с данным АЦ есть и другие АЦ, но находящиеся на уровне  $L_{III}$ , то устойчивость основного уровня нарушается и данный АЦ с  $L_K = L_I$  может перейти на уровень  $L_{III}$ .

Верхний уровень  $L_{III}$  – возбужденный, причем даже изолированный АЦ может находиться на уровне  $L_{III}$  не дольше, чем время релаксации  $\tau_e$  указанного уровня. После этого АЦ переходит на уровень  $L_{II}$ . Реальное же время жизни АЦ на уровне  $L_{III}$  из-за взаимодействия с соседними АЦ может оказаться меньшим, чем  $\tau_e$ .

Средний уровень  $L_{II}$  соответствует рефракторному состоянию АЦ, когда последний не может взаимодействовать с соседними АЦ. Поэтому время жизни АЦ на уровне  $L_{II}$  всегда равно времени релаксации этого уровня  $\tau_r$ , после чего АЦ переходит на уровень  $L_I$ .

Совокупность всех АЦ с указанием уровней  $L_K \in \{L_I; L_{II}; L_{III}\}$ , на которых они находятся в момент времени  $n$ , составляет текущую пространственную структуру – паттерн.

Самая простая трехуровневая модель, описывающая некоторые особенности формирования и эволюции паттернов в возбудимой среде (модель Гринберга-Хастингса), была предложена в работе [27]. Модель Гринберга-Хастингса сводится к следующему. Каждому уровню  $L_K \in \{L_I; L_{II}; L_{III}\}$  ставится в соответствие значение тринарной фазовой переменной  $\gamma_{ij}^{(n)} \in \{0, 1, 2\}$  следующим образом:

$$\begin{cases} [L_K^{(n)}(i, j) = L_I] \Leftrightarrow (\gamma_{ij}^{(n)} = 0); \\ [L_K^{(n)}(i, j) = L_{III}] \Leftrightarrow (\gamma_{ij}^{(n)} = 1); \\ [L_K^{(n)}(i, j) = L_{II}] \Leftrightarrow (\gamma_{ij}^{(n)} = 2). \end{cases} \quad (1)$$

Эволюция системы моделируется последовательными дискретными отображениями (итерациями) для матрицы фазовых состояний  $\Gamma^{(n)} = \|\gamma_{ij}^{(n)}\|$ .

Соответствующий одношаговый колмогоровский оператор  $\hat{\Omega}_{GH}$  может быть определен импликативным соотношением

$$B_\mu^{(GH)} \Rightarrow (\gamma_{ij}^{(n+1)} \equiv \hat{\Omega}_{GH} \gamma_{ij}^{(n)} = \mu), \quad (2)$$

где  $\mu \in \{0,1,2\}$ , а булевы выражения  $B_\mu^{(GH)}$  имеют вид

$$B_2^{(GH)} \equiv (\gamma_{ij}^{(n)} = 1); \quad (3)$$

$$B_1^{(GH)} \equiv [(\gamma_{ij}^{(n)} = 0) \wedge (\exists \gamma_{i+r,j+s}^{(n)} = 1)]; \quad (4)$$

$$B_0^{(GH)} \equiv [\neg(B_1^{(GH)} \wedge B_2^{(GH)})]. \quad (5)$$

Пары индексов  $\{i+r, j+s\}$  принадлежат окрестности Неймана, т. е. учитываются только ближайшие недиагональные соседние АЦ. Модель Гринберга-Хастингса [27] является наиболее простой из тех, которые позволяют наблюдать возникновение ВСА в трехуровневой  $2D$ -системе.

Качественно иная модель трехуровневой  $2D$ -системы, генерирующей автоволновые ДС (модель Малинецкого-Шакаевой), была рассмотрена в работе [24]. В этой модели используется тринарная фазовая переменная, имеющая форму:  $\chi_{ij}^{(n)} \in \{0, 1, \tilde{M}\}$ , где  $\tilde{M} > 1$ , причем  $\tilde{M} \in \mathbb{Z}_+$  ( $\mathbb{Z}_+$  – множество положительных целых чисел) и колмогоровский оператор  $\tilde{\Omega}_{MS}$  следующего вида:

$$\chi_{ij}^{(n+1)} \equiv \tilde{\Omega}_{MS} \chi_{ij}^{(n)} = \begin{cases} \tilde{M}, & \text{IF } \tilde{\chi}_{ij}^{(n)} < h_1; \\ 1, & \text{IF } \tilde{\chi}_{ij}^{(n)} \geq h_2; \\ 0, & \text{IF } h_1 \leq \tilde{\chi}_{ij}^{(n)} < h_2, \end{cases} \quad (6)$$

где управляющие параметры  $h_1$  и  $h_2$  – соответственно нижнее и верхнее значения для элементов вспомогательной матрицы  $\tilde{X}^{(n)} = \|\tilde{\chi}_{ij}^{(n)}\|$ , которые вычисляются следующим образом:

$$\tilde{\chi}_{ij}^{(n)} = \frac{\alpha}{\alpha_{(\max)}} \sum_{i',j'} \chi_{i'j'}^{(n)} + (1-\alpha)\chi_{ij}^{(n)}. \quad (7)$$

Здесь управляющий параметр  $\alpha$  характеризует скорость диффузии возбуждений,  $i', j'$  – координаты АЦ, находящихся в активной окрестности (Неймана, Мура и т. п.). Как и модель Гринберга-Хастингса, модель Малинецкого-Шакаевой не содержит механизмов, описывающих релаксацию АЦ (релаксация предполагается "мгновенной").

Наконец, в рамках модели типа лесных пожаров (*Forest Fire*) [29], как и в моделях возбудимых сред типа Гринберга-Хастингса, эволюция системы может быть описана посредством дискретных отображений для матрицы состояний АЦ, имеющей вид  $\|\phi_{ij}^{(n)}\|$ , где фазовая переменная является тринарной и принимает значения  $\phi_{ij}^{(n)} \in \{0,1,2\}$ . Наряду с детерминированными локальными взаимодействиями в модели лесных пожаров имеются максимально упрощенные эле-

менты нелокальных взаимодействий, описываемые в форме усредненного вероятностного влияния всей системы на каждый данный АЦ (на каждом шаге итерационного процесса). По сути, модель лесных пожаров [29] представляет собой следующую модификацию модели Гринберга-Хастингса [27]:

$$B_\mu^{(FF)} \Rightarrow (\phi_{ij}^{(n+1)} = \mu); \quad (8)$$

$$B_{-1}^{(FF)} \Rightarrow (\phi_{ij}^{(n+1)} = \phi_{ij}^{(n)}), \quad (9)$$

где  $\mu \in \{0,1,2\}$ , а булевы выражения  $B_\mu^{(FF)}$ ,  $B_{-1}^{(FF)}$  имеют вид

$$B_2^{(FF)} \equiv (\phi_{ij}^{(n)} = 1); \quad (10)$$

$$B_1^{(FF)} \equiv \{(\phi_{ij}^{(n)} = 0) \wedge \wedge [(\exists \phi_{i+r,j+s}^{(n)} = 1) \vee (F^{(n+1)} > \tilde{f})]\}; \quad (11)$$

$$B_0^{(FF)} \equiv [(\phi_{ij}^{(n)} = 2) \wedge (P^{(n+1)} > \tilde{p})]; \quad (12)$$

$$B_{-1}^{(FF)} \equiv [\neg(B_0^{(FF)} \wedge B_1^{(FF)} \wedge B_2^{(FF)})]. \quad (13)$$

Здесь  $F^{(n)}$  и  $P^{(n)}$  – принадлежат случайным последовательностям  $\{F^{(n)}\}$  и  $\{P^{(n)}\}$ , генерируемым на интервале  $[0; 1]$ ;  $\tilde{f}$  и  $\tilde{p}$  – пороговые значения, определяющие соответственно уровень нелокально индуцированного "зажигания" (*firing*) и уровень нелокально инициированного "прорастания" (*pullulation*) АЦ [29]. Под зажиганием имеется в виду переход АЦ на уровень  $L_{III}$ , а под прорастанием – переход на уровень  $L_I$ . Нетрудно заметить, что (как и в модели Гринберга-Хастингса) в (8) - (13) молчаливо предполагается, что  $\tau_e = 1$ . Однако в противоположность модели Гринберга-Хастингса, из (8) - (13) видно, что для модели лесных пожаров время жизни уединенного АЦ, находящегося на уровне  $L_{II}$ , является неограниченным  $\tau_r = \infty$ . Другими словами, в рамках модели лесных пожаров предполагается существование двух стабильных состояний АЦ:  $L_I$  и  $L_{II}$ , а не одного (нижнего), как в модели Гринберга-Хастингса.

Все описанные выше модели являются базовыми для исследования динамики некоторых простейших классов активных трехуровневых систем, однако функциональность указанных моделей ограничена предположениями о мгновенной и (или) бесконечно медленной релаксации отдельных компонент системы. Более реалистичные модели должны, в частности, учитывать конечный характер скорости релаксации АЦ.

Рассмотрим клеточно-автоматную модель активной системы, основанную на концептуальном подходе Гринберга-Хастингса, но учитывающую ряд важных моментов, связанных как с релаксацией, так и с другими особенностями трехуровневой возбудимой среды фазерного типа. Эта модель является основной для постановки наших компьютерных экспериментов. Данная модель была предложена ранее в работах [12-15]. В следующем разделе приведено краткое описание рассматриваемой модели, необходимое для понимания постановки и хода компьютерных экспериментов. Полное описание этой модели содержится в указанных работах [12-15].

**3. Постановка компьютерных экспериментов.** Корректная постановка компьютерного эксперимента предполагает прежде всего выбор адекватной алгоритмической схемы. Изложенная ниже алгоритмическая схема составляет ядро математической модели трехуровневой среды с конечными временами релаксации АЦ и учитывает основные особенности физических парамагнитных сред, используемых в фазерных системах. Эта алгоритмическая схема была сформулирована в работах [12-15], она является обобщением модели Гринберга-Хастингса [27, 28] и близка по структуре к клеточно-автоматной модели Зыкова-Михайлова (ЗМ) [7]. В отличие от модели ЗМ, которая была изначально ориентирована на химические возбудимые системы типа Белоусова-Жаботинского [4, 8], в настоящей клеточно-автоматной модели учтены особенности обмена возбуждениями между АЦ в физической парамагнитной системе. Детальное описание указанных особенностей (локальное ингибирование возбуждений, двухканальный механизм диффузии возбуждений и др.) можно найти в работах [12-15].

В рамках рассматриваемой модели, как и в модели Гринберга-Хастингса, для всех АЦ при  $0 \leq n \leq N$  имеют место взаимно-однозначные соотношения между текущими уровнями  $L_K^{(n)}(i, j)$ , где  $K \in \{I, II, III\}$  и текущими значениями дискретных фазовых переменных  $\varphi_{ij}^{(n)}$ , являющихся элементами матрицы  $\Phi^{(n)} \equiv \|\varphi_{ij}^{(n)}\|$ . Однако эти соотношения носят иной характер, нежели для матрицы Гринберга-Хастингса  $\Gamma^{(n)} = \|\gamma_{ij}^{(n)}\|$ , а сами переменные  $\varphi_{ij}^{(n)}$  являются не тринарными, а определены на некотором конечном подмножестве  $Z_\varphi \subset Z$  множества целых чисел  $Z$ , причем  $\dim Z_\varphi \gg 3$ .

В явном виде соотношения между  $L_K^{(n)}(i, j)$  и  $\varphi_{ij}^{(n)}$  соответствуют соглашениям, принятым в модели ЗМ [7]

$$\begin{cases} [L_K^{(n)}(i, j) = L_I] \Leftrightarrow (\varphi_{ij}^{(n)} = 0); \\ [L_K^{(n)}(i, j) = L_{III}] \Leftrightarrow (0 < \varphi_{ij}^{(n)} \leq \tau_e); \\ [L_K^{(n)}(i, j) = L_{II}] \Leftrightarrow (\tau_e < \varphi_{ij}^{(n)} \leq \tau_e + \tau_r). \end{cases} \quad (14)$$

Как видно из (14), значения матричных элементов  $\varphi_{ij}^{(n)}$  для всех АЦ определены на интервале  $\varphi_{ij}^{(n)} \in [0, \tau_e + \tau_r]$ , что соответствует максимально возможному времени замыкания цикла  $L_I \rightarrow L_{III} \rightarrow L_{II} \rightarrow L_I$  для каждого из АЦ.

Начальные условия  $\Phi^{(0)} \equiv \|\varphi_{ij}^{(0)}\|$ , т. е. совокупность состояний всех АЦ при  $n=0$ , определяются стартовыми пространственным распределениям АЦ по уровням  $L_K$  в момент времени  $n=0$ . Для определенности полагаем  $\varphi_{ij}^{(0)} \in \{0; 1; \tau_e + 1\}$ , тогда

$$\begin{cases} (L_K^{(0)}(i, j) = L_I) \Rightarrow (\varphi_{ij}^{(0)} = 0); \\ (L_K^{(0)}(i, j) = L_{III}) \Rightarrow (\varphi_{ij}^{(0)} = 1); \\ (L_K^{(0)}(i, j) = L_{II}) \Rightarrow (\varphi_{ij}^{(0)} = \tau_e + 1). \end{cases} \quad (15)$$

Отметим, что в более общем случае начальные условия могут быть определены для следующих значений фазовых переменных:  $\varphi_{ij}^{(0)} \in \{0; \mathcal{G}_{ij}; \xi_{ij}\}$ , где элементы матриц  $\|\mathcal{G}_{ij}\|$  и  $\|\xi_{ij}\|$  принадлежат множествам случайных целых чисел  $\{\mathcal{G}\} \subseteq [1; \tau_e]$ ,  $\{\xi\} \subseteq [\tau_e + 1; \tau_r]$ .

В качестве граничных условий нами использованы условия нулевого потока возбуждений через границы активной среды. Для формулировки таких граничных условий в данной модели достаточно ввести одноуровневые виртуальные пассивные центры (ВПЦ), обрамляющие активную среду [12-15].

Итеративный процесс строится по той же схеме, что и в работах [12-15]. Управляющими параметрами являются величины  $h$  [7] и  $f$  [12-15], которые характеризуют переходы  $L_I \rightarrow L_{III}$  и  $L_{III} \rightarrow L_{II}$  (вызванные влиянием окружающих АЦ), а также параметр  $g$ , отвечающий за аккумуляцию возбуждений [7]. Переход  $L_{II} \rightarrow L_I$ , как и в моделях Гринберга-Хастингса

[27, 28] и ЗМ [7], является рефрактерным, т. е. не зависит от состояния окружающих АЦ.

Инициализация системы (импульсное возбуждение неравновесного состояния) осуществляется путем генерации случайных пространственных распределений АЦ по уровням  $L_K$  [12-15]. Завершение итеративного процесса может происходить либо автоматически (после выхода системы на аттрактор), либо же по predeterminedной точке останова, что определяется настройками программ, реализующих компьютерное моделирование. Подробное описание всех деталей данной алгоритмической схемы приведено в работах [12-15].

Основная часть компьютерных экспериментов в настоящей работе выполнена с использованием программ *Three-Level Laser model (TLL)* [30] и *Three-Level Model of excitable system (TLM)* [31], построенных на основе приведенной выше алгоритмической схемы. Программы *TLL* и *TLM* имеют дружественные оконные интерфейсы, наборы дополнительных утилит для работы как с символическими, так и с битовыми представлениями образов активной среды, а также эмуляторы импульсного возбуждения среды со случайным пространственным распределением АЦ по уровням  $L_K$ .

Исходный код программы *TLL* [30] написан на языке C++, эта программа оптимизирована по скорости выполнения итеративного процесса, но она предназначена только для работы на платформе *Windows*, т. е. преимущественно на ЭВМ, совместимых с *IBM PC*.

Исходный код программы *TLM* [31] написан на языке *Java*, относительная скорость ее работы под *Windows* несколько ниже (при равных прочих условиях), чем у программы *TLL*. Однако программа *TLM* является кросс-платформенной и компилируется для работы не только под *Windows*, но и под *Unix*, *Linux*, *Solaris* и любыми другими платформами, для которых реализована виртуальная машина *Java* [32]. Поэтому программа *TLM* может без какой-либо адаптации работать и на компьютерах, несовместимых с *IBM PC*, в том числе на средних и больших ЭВМ, где платформа *Windows* обычно не используется. Программы *TLL* [30] и *TLM* [31] разработаны С. Д. Маковецким в Харьковском национальном университете радиоэлектроники в 2002-2006 гг.

**4. Прогноз возможных сценариев эволюции.** Постановка компьютерных экспериментов обычно требует предварительного анализа возможного поведения моделируемых объектов, что существенно сокращает непроизводительные затраты машинного времени. Рассмотрим возможные сценарии эволюции нашей диссипативной системы и выделим типичные ситуации, ко-

торые могут реализоваться при различных условиях ее инициализации.

Выход на аттрактор для автономной однородной диссипативной системы, содержащей конечное количество  $D$  дискретных АЦ (каждый из которых имеет конечный спектр собственных состояний  $\{L_K\}$ ), осуществляется, в отличие от континуальных систем, за ограниченный отрезок времени эволюции  $\tau_{tran} \in \{n\} \subset \mathbb{Z}_+$ . После этого такая система в силу конечности полного числа ее конфигураций  $(\dim\{L_K\})^D$  стабилизируется в одном из двух возможных регулярных состояний. Эти состояния являются пространственными аналогами регулярных аттракторов, известных в сосредоточенных системах [7].

Первое из указанных состояний является статическим – это пространственная ДС Тьюринга. Второе состояние представляет собой периодически осциллирующую во времени пространственно-временную ДС – динамически стабильную автоволновую структуру. В последнем случае система в целом характеризуется, кроме  $\tau_{tran}$ , еще одним временным масштабом – периодом осцилляций ДС  $\tau_{cycle}$ .

Для колмогоровского оператора  $\hat{\Omega}$  [33], описывающего эволюцию дискретной возбудимой системы с матрицей состояний  $\Phi$  и локальными взаимодействиями, можно записать уравнения, позволяющие вычислить  $\tau_{tran}$  и  $\tau_{cycle}$ :

$$\begin{cases} (\hat{\Omega}^c - \hat{\mathbf{I}})\hat{\Omega}^a \Phi^{(0)} = \Theta; \\ \tau_{tran} = \min(a) \equiv a_m; \\ \tau_{cycle} = \min(c) \equiv c_m, \end{cases} \quad (16)$$

где  $\Phi^{(0)}$  – стартовая конфигурация системы, представляющая собой матрицу начальных условий:  $\Phi^{(0)} \equiv \|\varphi_{ij}^{(0)}\|$ ;  $\Theta \equiv \|\theta_{ij}\|$  – нулевая матрица,  $\theta_{ij} = 0 \forall (i, j)$ , а вычислению подлежат пары  $(a_m, c_m)$ , где  $a_m \in \{a\} \subset \{n\}$ ,  $c_m \in \{c\} \subset \{n\}$ .

В зависимости от вида пар  $(a_m, c_m)$  может реализоваться четыре различных сценария  $\tilde{E}(a_m, c_m)$ , по которым реализуется эволюция рассматриваемой системы, а именно:

$$\begin{cases} \tilde{E}_{0,1} & \Leftrightarrow [(a_m = 0) \wedge (c_m = 1)]; \\ \tilde{E}_{1,1} & \Leftrightarrow [(a_m \geq 1) \wedge (c_m = 1)]; \\ \tilde{E}_{0,2} & \Leftrightarrow [(a_m = 0) \wedge (c_m \geq 2)]; \\ \tilde{E}_{1,2} & \Leftrightarrow [(a_m \geq 1) \wedge (c_m \geq 2)]. \end{cases} \quad (17)$$

Сценарий  $\tilde{E}_{0,1}$  соответствует матрице начальных условий, в точности равной собственной матрице оператора  $\hat{\Omega}$ , т. е.  $\Phi^{(n)} = \hat{\Omega}^n \Phi^{(0)} \equiv \Phi^{(0)}$ . Иначе говоря, уже само стартовое состояние системы принадлежит ее точечному аттрактору. Для нашей системы, где устойчивым состоянием каждого из уединенных АЦ есть  $L_K = L_1$ , точечный аттрактор является единственным и имеет тривиальный вид, а именно:  $\Phi = \Theta$ .

Сценарий  $\tilde{E}_{1,1}$  также приводит к выходу на указанный выше точечный аттрактор, однако в этом случае стартовое состояние системы лежит не на самом аттракторе, а в области его притяжения. Таким образом, коллапс возбуждений, т. е. обращение всех  $\varphi_{ij}$  в нуль, имеет место лишь при ненулевом  $a_m$ . Обычно  $a_m \gg (\tau_e + \tau_r)$ , т. е. длительность переходного процесса может быть очень большой. В этом случае нестационарная пространственно-временная динамика системы может быть исключительно сложной, что уже наблюдалось в предыдущих компьютерных экспериментах [12-15].

Сценарии  $\tilde{E}_{0,2}$  и  $\tilde{E}_{1,2}$  приводят к устойчивому периодическому движению системы. При этом сценарий  $\tilde{E}_{0,2}$ , как и рассмотренный выше сценарий  $\tilde{E}_{0,1}$ , отвечает случаю, когда стартовое состояние системы уже принадлежит ее аттрактору. Разница состоит в том, что теперь матрица начальных условий не равна собственной матрице оператора  $\hat{\Omega}$ , но, очевидно, является собственной матрицей оператора  $(\hat{\Omega})^m$ .

Формально сценарий  $\tilde{E}_{0,2}$  напоминает эволюцию нелинейной системы типа Ферми-Паста-Улама (ФПУ) [34], а именно ее периодический возврат к исходному состоянию, хотя механизмы этого возврата для нашей возбудимой диссипативной системы и для солитонобразующей консервативной системы ФПУ качественно различны.

Сценарий  $\tilde{E}_{0,2}$  для нашей системы является атипичным, поскольку для его реализации требуется задать начальные условия  $\Phi^{(0)} \equiv \|\varphi_{ij}^{(0)}\|$  очень специального, регуляризованного вида. В то же время постановка компьютерных экспериментов подобного рода предполагает случайную генерацию элементов матрицы  $\|\varphi_{ij}^{(0)}\|$ , что соответствует естественному физическому условию стохастического пространственного распределения АЦ по уровням  $L_K$ .

С алгоритмической точки зрения подавляющее большинство матриц начальных условий, заданных хорошим генератором случайных чисел [35], являются невычислимыми для операторов  $\hat{\Omega}$  интересующего нас вида. Существование принципиально невычислимых конфигураций для многомерных дискретных отображений, в том числе для клеточных автоматов, хорошо известно – это конфигурации "gardens of Eden" [36]. Поэтому в наших компьютерных экспериментах следует ожидать, что выход на периодический аттрактор должен практически всегда сопровождаться переходным процессом, и соответственно сценарий  $\tilde{E}_{1,2}$  принадлежит к числу типичных.

К этому следует добавить, что клеточно-автоматные алгоритмы позволяют легко моделировать эволюцию многочастичных объектов с большим количеством сосуществующих неточечных (периодических) аттракторов [7]. Предыдущие исследования [12-15] показывают, что количество аттракторов для интересующей нас системы быстро возрастает с увеличением ее размеров. Следовательно, можно прогнозировать, что сценарий  $\tilde{E}_{1,2}$  для нашей конкретной системы является не только типичным, но и основным, поскольку сценарий  $\tilde{E}_{1,1}$  всегда реализует выход на единственный точечный аттрактор, а остальные два сценария ( $\tilde{E}_{0,1}$  и  $\tilde{E}_{0,2}$ ), как уже отмечалось, вообще не являются типичными.

Таким образом, в компьютерных экспериментах предполагается вычисление множества  $\{\Phi^{(x)}(\Phi^{(0)})\}$ , где  $1 \leq x \leq N_{evol} \equiv \tau_{tran} + \tau_{cycle}$ , содержащих все разрешенные конфигурации для нашего колмогоровского оператора  $\hat{\Omega}$  при заданных начальных условиях  $\Phi^{(0)}$  и при описанных в предыдущем параграфе граничных условиях.

Для повышения выразительности визуализируемых объектов будут использоваться паттерны  $P^{(x)} \equiv \|L_{ij}^{(x)}\|$ , представляющие собой матричные представления мгновенного распределения АЦ по уровням во всей системе. Основное внимание, как уже указывалось выше, уделено ДС типа ВСА с  $|Q_T| > 1$ .

**5. Размерные эффекты при генерации ВСА с кратными топологическими зарядами.** Для ряда нелинейных многокомпонентных систем (таких, как связанные осцилляторы Ван дер Поля) было показано, что пространственно-временные структуры с  $|Q_T| > 1$  неустойчивы, поэтому конечным результатом эволюции могут быть лишь

вихри с  $|Q_T|=1$  [25]. Подобный же вывод был сделан в свое время Хаганом [37] и по отношению к модельным системам, которые описываются уравнениями типа "реакция-диффузия". К этому же классу принадлежит и большинство континуальных моделей возбудимых систем. Однако позже выяснилось, что последний результат применим лишь к слабо нелинейным системам, элементы которых совершают почти гармонические колебания. В то же время элементы возбудимой среды, объединенные в сеть с локальными связями, совершают релаксационные, очень богатые гармониками колебания [8], и модель Хагана [37] для подобных систем неадекватна.

Еще менее изученным является в настоящее время вопрос о влиянии размеров активной среды на возможность выживания высших ВСА в процессе эволюции возбудимой системы. Обычно считается, что даже небольшое увеличение размеров активной среды приводит к разрушению случайно выживших высших ВСА и доминированию ВСА с  $|Q_T|=1$ . Действительно, такой процесс реализуется в целом ряде случаев, в том числе и для интересующих нас трехуровневых возбудимых систем [12-15]. С другой стороны, для подобных систем, как выяснилось, характерными являются и несколько качественно иных направлений эволюции, приводящих к динамической стабилизации высших ВСА не только при умеренных, но и при больших размерах активной среды ( $D_{XY} / \lambda_W > 10$ ).

Для выяснения вопроса о роли размерных эффектов при формировании ВСА с  $|Q_T| > 1$  была выполнена следующая серия компьютерных экспериментов. Инициализация системы в каждом из компьютерных экспериментов этой серии производилась одним и тем же стартовым паттерном, имеющим фиксированные размеры  $(M_X^{(0)}, M_Y^{(0)})$ , но размеры активной среды  $(M_X, M_Y)$  последовательно увеличивались от эксперимента к эксперименту следующим образом:  $M_X(\delta M) = M_Y(\delta M) = M_X^{(0)} + 2\delta M$ , где величина  $\delta M = 0, 1, 2, 3, \dots$  соответствует приращению размеров активной среды со стороны каждой из ее границ. При всех  $\delta M > 0$  геометрический центр начального возмущения, имеющего размеры  $(M_X^{(0)}, M_Y^{(0)})$ , совпадал с центром активной среды. Состояния всех периферических АЦ, не затронутых начальным возмущением, являлись при  $n=0$  основными (т. е. выполнялось  $L_K^{(0)} = L_I$  для всех АЦ, лежащих вне центральной области среды).

На рис. 1 приведены результаты серии таких компьютерных экспериментов при  $M_X^{(0)} = M_Y^{(0)} = 100$ ;  $\delta M \in [0, 17]$ ;  $\tau_e = 5$ ;  $\tau_r = 10$ ;  $g = 1$ ;  $h = f = 9$ . Показаны состояния, соответствующие мгновенным снимкам систем с различными  $\delta M$  после их выхода на соответствующий аттрактор (для всех паттернов на рис. 1 приведены состояния при  $n = 10^5 > \tau_{tram} + \tau_{cycle}$ ). Черным, серым и белым цветами на рис. 1 обозначены возбужденные ( $L_{III}$ ), рефрактерные ( $L_{II}$ ) и основные ( $L_I$ ) состояния АЦ.

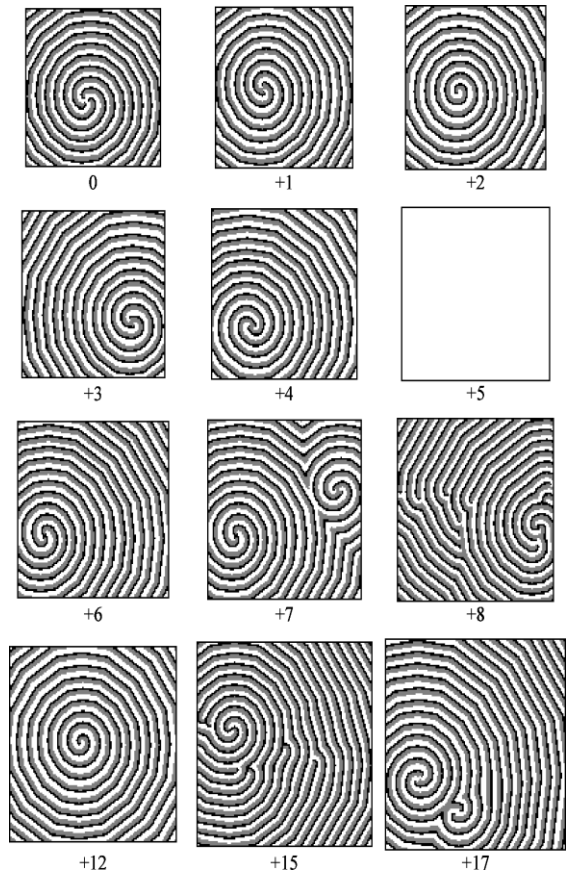


Рис. 1. Размерные эффекты при динамической стабилизации пространственно-временных структур в возбудимых системах с различными размерами, но с одинаковым стартовым возмущением. Числа под паттернами показывают приращение  $\delta M$  для размеров системы по каждой из ее сторон

При  $\delta M = 0; +1; +2$  аттракторами являются правильные ВСА (рис. 1) с уменьшающимися по модулю, но неизменными по знаку топологическими зарядами:  $Q_T = +3; +2; +1$ . Поэтому может показаться, что предположение о неустойчивости ВСА с  $|Q_T| > 1$  относительно увеличения размеров активной среды является корректным и для нашей возбудимой системы.



Однако уже при  $\delta M = +3$ , как видно из рис. 1, величина  $|Q_T|$  снова возрастает, при этом  $\text{sgn } Q_T$  все еще сохраняется ( $Q_T = +2$ ). Увеличение  $\delta M$  еще на единицу (рис. 1,  $\delta M = +4$ ) приводит к обращению  $\text{sgn } Q_T$  при неизменном  $|Q_T|$ , т. е. теперь аттрактором системы является ВСА с  $Q_T = -2$ . До сих пор (т. е. при  $\delta M \in [0; +4]$ ) все аттракторы представляли собой правильные ВСА с различными  $|Q_T|$  и различными  $\text{sgn } Q_T$ .

Далее при  $\delta M = +5$  происходит резкое изменение результата эволюции системы по сравнению со случаями  $\delta M \in [0; +4]$ . Вместо периодического аттрактора при  $\delta M = +5$  происходит выход системы на точечный аттрактор, когда все возбуждения коллапсируют – паттерн становится чисто белым (рис. 1,  $\delta M = +5$ ).

Начиная с  $\delta M = +6$  периодические аттракторы восстанавливаются, но кроме уединенных правильных ВСА ( $Q_T = +2$  при  $\delta M = +6$  и  $Q_T = +1$  при  $\delta M = +12$ ) наблюдаются и более сложные результаты эволюции. Так, при  $\delta M = +7$  аттрактором системы становится пространственно-временная структура из двух сосуществующих, но пространственно обособленных ВСА, каждая из которых имеет  $Q_T = +2$ , т. е. суммарный топологический заряд составляет  $Q_{\Sigma T} = +4$ . Аналогично при  $\delta M = +17$  сосуществуют две ВСА с  $Q_T = -2$ , но из-за близости их ядер автоволны в дальней зоне выглядят как волны от единого вихревого источника с  $Q_T = -4$ . Наконец при  $\delta M = +8$  и  $\delta M = +15$  аттракторами являются сложные вихревые структуры спирально-лабиринтного типа, содержащие по одному четко выраженному ядру.

Качественное объяснение столь сложных метаморфоз состояния возбудимой системы при постепенном увеличении ее размеров может быть основано на следующих соображениях. С ростом  $M_X$  и  $M_Y$  область поверхностного слоя, прилегающего к поглощающим границам системы, сдвигается относительно фиксированной области начального возмущения, для которого в данных экспериментах  $M_X^{(0)} = M_Y^{(0)} = \text{const}$ . Соответственно изменяются условия конкуренции для ВСА и, как результат, динамическая стабилизация той или иной ВСА (или более сложной структуры, или же, напротив, выход на точечный аттрактор) происходит по сценарию, который кажется случайным, хотя система является полностью детерминированной, а начальное возмущение фикси-

ровано. По ходу эволюции ВСА, не выдерживающие конкуренции, вытесняются на периферию активной среды и разрушаются при столкновении их ядер с поглощающими границами.

При всех  $\delta M$ , показанных на рис. 1, кроме единственного случая  $\delta M = +5$ , эволюция протекает по сценарию  $\tilde{E}_{1,2}$ , что подтверждает сделанный в предыдущем параграфе прогноз. В случае же  $\delta M = +5$  (рис. 1) конкуренция между ВСА приводит к тому, что ни одна из ВСА не успевает закрепиться на безопасном расстоянии от границы активной среды. В результате, как уже отмечалось выше, происходит самоиндуцированный коллапс возбуждений – система переходит в состояние  $L_K^{(0)} = L_1$  по сценарию  $\tilde{E}_{1,1}$ .

До сих пор мы уделяли внимание только завершающему этапу эволюции нашей многочастичной системы, а именно, ее движению на аттракторе. Не менее важной является роль переходных процессов, которые могут быть очень длительными. В следующем параграфе рассматриваются некоторые нетривиальные аспекты переходных процессов в подобных системах ( $1 \leq n \leq \tau_{tran}$ ), прежде всего при формировании ВСА с кратными топологическими зарядами.

**6. Существование регулярных и нерегулярных структур в возбудимой среде.** Выполненные ранее исследования переходных процессов в многокомпонентных возбудимых системах рассматриваемого типа показали, что здесь возможны такие интересные явления, как самоиндуцированное обращение знака топологического заряда, нелинейные "отражения" ВСА от границ, скользящие режимы движения ДС, а также репликация (самовоспроизведение) ВСА [12-15].

Мощным инструментом для автоматизации таких исследований является программно реализованная техника сечений Пуанкаре (СП) [7], обобщенная на случай распределенных, многочастичных или многокомпонентных систем. Для однокомпонентной (сосредоточенной) системы сечением Пуанкаре называется дизъюнктивная последовательность стробоскопических картин эволюции системы в условиях, когда период стробирования совпадает с тем или иным периодическим процессом в данной системе [7]. Если же периодичность отсутствует, то сечение Пуанкаре может характеризовать вид неупорядоченности (динамический хаос, стохастичность типа белого или цветного шума и т. д.).

Для многокомпонентной системы возможности подобной техники исследований существенно расширяются, поскольку теперь можно визуализировать различные сложные движения в системе с помощью относительно небольшого количества

паттернов, зарегистрированных с некоторым экспериментально подобранным периодом. В частности, можно увидеть "застывшую" стробоскопическую картину периодических пространственно-временных структур на фоне некоторых непериодических (переходных, нестационарных) движений.

На основе указанной техники нами обнаружен нелинейный процесс, ускользавший от внимания при прямом наблюдении эволюции возбудимых систем с дискретным спектром состояний АЦ. В основе использовавшегося нами метода анализа итерационных последовательностей лежит получение прямых и обратных серий СП, кратко описанное ниже.

Построение прямых ( $n_{start} \rightarrow n_{finish}$ ) и обратных ( $n_{start} \leftarrow n_{finish}$ ) серий СП было реализовано приведенными далее алгоритмами. Здесь  $n_{start}$  и  $n_{finish}$  определяют соответственно начало и конец фрагмента итерационной последовательности  $\{n\}$ , подлежащей анализу методом СП. Пусть кортеж  $V(n)$  содержит последовательность матриц  $\|B_{ij}(n)\|$ , где  $B_{ij}$  – булевы функции, определяемые на бинарном множестве

$$B_{ij}(n) \in \{TRUE, FALSE\} \equiv \{1_B, 0_B\}, \quad (18)$$

и имеющие вид

$$B_{ij}(n) = \begin{cases} 1_B, & \text{IF } (L_{ij}^{(n)} = L_{III}), \\ 0_B, & \text{IF } [(L_{ij}^{(n)} = L_I) \vee (L_{ij}^{(n)} = L_{II})], \end{cases} \quad (19)$$

причем  $i \in [1, M_X]$ ,  $j \in [1, M_Y]$ . Предполагается, что распределения АЦ по уровням, т. е. матрицы  $\|L_{ij}^{(n)}\|$  уже вычислены для всех указанных  $(i, j)$  при всех необходимых значениях  $n$  в диапазоне  $n \in [n_{start}; n_{finish}]$ .

Выполним серию из  $k$  операций дизъюнкции для булевых значений каждого матричного элемента  $B_{ij}$  при некоторых фиксированных значениях  $n$ . Для этого выберем определенный интервал времени  $\Delta n$  (интервал стробирования), через который последовательно берутся булевы величины  $B_{ij}(n) \in \{1_B, 0_B\}$ , начиная с некоторого момента времени  $n_1$ , где  $n_{start} \leq n_1 \leq N - k\Delta n$ . В результате этих операций получаем матрицу  $V^{(+)} = \|B_{ij}^{(+)}(n_1, \Delta n, k)\|$  с элементами

$$\begin{aligned} B_{ij}^{(+)}(n_1, \Delta n, k) &= \\ &= [[ [ [ B_{ij}(n_1) \vee B_{ij}(n_1 + \Delta n) ] \vee \\ &\vee B_{ij}(n_1 + 2\Delta n) ] \vee \dots \vee B_{ij}(n_1 + k\Delta n) ]. \end{aligned} \quad (20)$$

Выполним также аналогичную серию из  $m$  операций дизъюнкции, но в обратном по времени порядке, начиная с некоторого момента  $n_2$ , где  $m\Delta n < n_2 \leq n_{finish}$  (напомним, что мы работаем с уже готовыми наборами паттернов, что позволяет посмотреть эволюцию в обратном времени). В результате получаем матрицу  $V^{(-)} = \|B_{ij}^{(-)}(n_2, \Delta n, m)\|$  с такими элементами:

$$\begin{aligned} B_{ij}^{(-)}(n_2, \Delta n, m) &= \\ &= [[ [ [ B_{ij}(n_2) \vee B_{ij}(n_2 - \Delta n) ] \vee \\ &\vee B_{ij}(n_2 - 2\Delta n) ] \vee \dots \vee B_{ij}(n_2 - m\Delta n) ]. \end{aligned} \quad (21)$$

Прямые и обратные серии СП представляют собой наборы паттернов  $P_{cross}^{(+)}$  и  $P_{cross}^{(-)}$ , каждый из которых состоит из черных ( $\rho_{black}$ ) и белых ( $\rho_{white}$ ) пикселей. Цвет пикселей с координатами  $(i, j)$  определяется матричными элементами  $B_{ij}^{(+)}(n_1, \Delta n, k)$  и  $B_{ij}^{(-)}(n_2, \Delta n, m)$  соответственно:

$$P_{cross}^{(+)}(n_1, \Delta n, k) = \| \tilde{\rho}(B_{ij}^{(+)}) \|; \quad (22)$$

$$P_{cross}^{(-)}(n_2, \Delta n, m) = \| \tilde{\rho}(B_{ij}^{(-)}) \|, \quad (23)$$

где бинарная функция  $\tilde{\rho}(\cdot)$  для каждой индивидуальной клетки  $(i', j')$  имеет вид

$$\tilde{\rho}(B_{i'j'}^{(\pm)}) = \begin{cases} \rho_{black}, & \text{IF } (B_{i'j'}^{(\pm)} = 1_B); \\ \rho_{white}, & \text{IF } (B_{i'j'}^{(\pm)} = 0_B). \end{cases} \quad (24)$$

На рис. 2 показаны прямые (левый столбец) и обратные (правый столбец) серии СП для системы с  $M_X = M_Y = 100$ ;  $\tau_e = \tau_r = h = 50$ ;  $g = 1$ ;  $f = 5$ . Стробирование и построение СП было осуществлено при  $n_1 = 154000 \ll \tau_{tran}$ ;  $n_2 = 338000 > \tau_{tran}$  и при  $\Delta n = 1000 = 2\tau_{cycle}$ ;  $\max(k) = \max(m) = 184$ . Средний столбец содержит обычную последовательность паттернов, на основе которых построены СП (в этом столбце черным цветом показаны только АЦ с  $L_{III}$ , а все остальные АЦ – белым). Числа под всеми строками – текущие значения  $n$ .

Прямая серия СП (рис. 2, левый столбец) показывает, что пространственная область аperiodических движений является ограниченной на всем исследованном интервале стробирования  $[n_1, n_2]$ . Другими словами, область периодических движений является динамически стабильной на большей части активной среды, начиная по меньшей мере с  $n \approx 1,5 \cdot 10^5$ . Обратная серия СП (рис. 2, правый столбец) дополняет картину фор-

мирования области периодических движений при выходе системы на регулярный аттрактор по сценарию  $\tilde{E}_{1,2}$  ( $n = 338000$ ). В данном конкретном случае область периодических движений представляет собой ВСА с высоким топологическим зарядом  $Q_T = +4$  и зацепившуюся за один из ее рукавов дислокацию. Эта сложная периодическая мезоскопическая ДС, "застывающая" на стробоскопической картинке, постепенно расширяется и становится совершенно неподвижной по мере выхода системы на аттрактор (рис. 2).

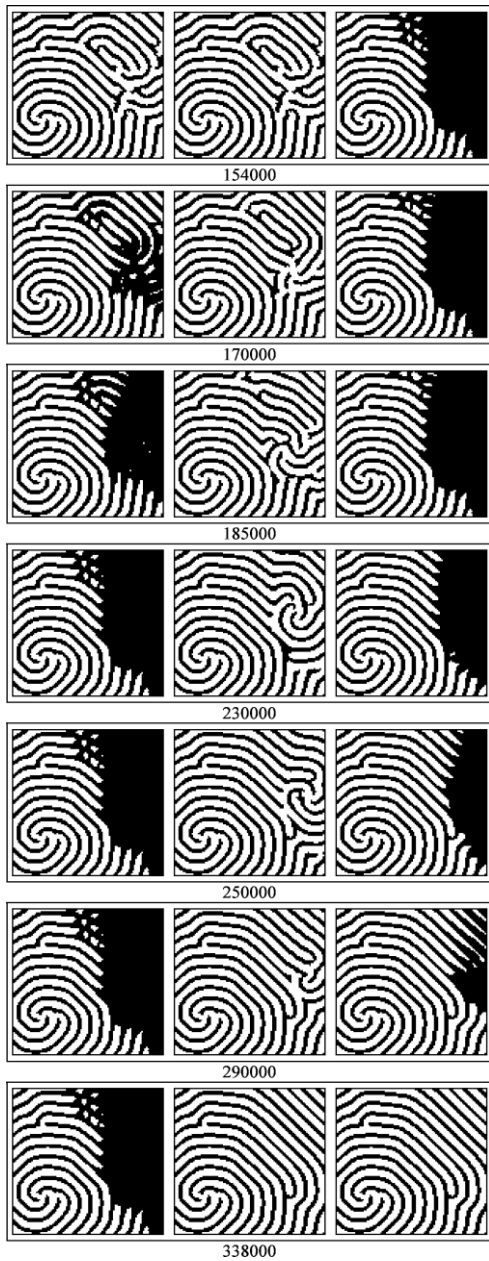


Рис. 2. Сосуществование регулярной (ВСА) и нерегулярной структур при переходном процессе в возбудимой системе. Числа под паттернами – текущие шаги эволюции, следующие через два периода вращения ВСА

Сосуществование периодических и аperiodических движений в дискретной возбудимой среде, показанное на рис. 2, напоминает аналогичный эффект в континуальных системах взаимодействующих осцилляторов [38] (эффект "chimera states" [39]). Однако доменные стенки, разделяющие области периодических и аperiodических движений в дискретной пространственно-ограниченной возбудимой системе, не могут быть неподвижными, поскольку величина  $\tau_{tran}$  является конечной, а все аттракторы такой системы регулярны. Другими словами, в отличие от эффекта "chimera states" для континуальных систем [38, 39] в нашей возбудимой дискретной системе сосуществование областей с регулярной и нерегулярной пространственной динамикой возможно только в нестационарном (переходном) режиме.

Еще одной важной особенностью исследуемой системы является ее исключительно высокая чувствительность (гиперчувствительность) к начальным условиям, т. е. к виду матрицы  $\Phi^{(0)}$ . В следующем параграфе изложены результаты компьютерных экспериментов, демонстрирующие этот эффект на примере ВСА с кратными  $Q_T$ .

**7. Гиперчувствительность трехуровневой возбудимой системы к изменению начальных условий.** Эффект гиперчувствительности континуальных нелинейных динамических систем к начальным условиям, т. е. экспоненциальная расходимость фазовых траекторий при сколь угодно малых конечных вариациях начальных условий, хорошо известен как для сосредоточенных, так и для распределенных объектов в различных областях физики, химической кинетики и др. [7]. Для дискретных многочастичных нелинейных систем минимальная вариация начальных условий обычно означает изменение начального состояния одного-единственного из ее элементов, причем это изменение также должно быть минимально возможным. Несмотря на счетность состояний пространственно-ограниченной дискретной системы с конечным спектром возбуждений АЦ, ее поведение при определенных условиях напоминает гиперчувствительность континуальных систем. В настоящем параграфе выполнены компьютерные эксперименты, демонстрирующие качественное изменение результата эволюции дискретной возбудимой системы при указанной минимальной вариации начальных условий.

Рассмотрим два параллельных варианта эволюции нашей трехуровневой возбудимой системы (рис. 3), задавая начальные условия в виде почти одинаковых стартовых паттернов  $P_{SL}^{(0)}$  (рис. 3, левая колонка,  $n = 0$ ) и  $P_{SR}^{(0)}$  (рис. 3, пра-

вая колонка,  $n=0$ ). Каждый из этих двух стартовых паттернов ( $P_{SL}^{(0)}$  и  $P_{SR}^{(0)}$ ) имеет размеры  $M_X \times M_Y = 75 \times 50$ . Оба варианта эволюции системы, фрагменты которой показаны на рис. 3 при  $n > 0$ , соответствуют идентичным параметрам возбудимой среды, а именно  $\tau_e = 5$ ;  $\tau_r = 7$ ;  $g = 0,3$ ;  $h = 3$ ;  $f = 9$ . При  $n = 10118$  наша мультистабильная система в обоих случаях уже находится на соответствующих аттракторах.

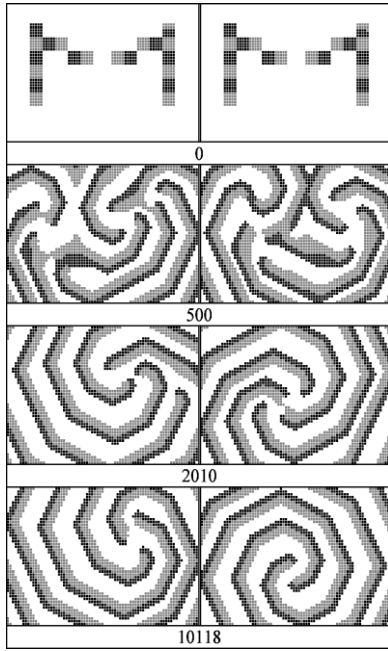


Рис. 3. Компьютерный эксперимент, демонстрирующий гиперчувствительность возбудимой системы с трехуровневыми АЦ по отношению к изменению начальных условий

Стартовые пространственные конфигурации АЦ, находящихся в основном состоянии ( $L_K = L_I$ , белые пиксели на рис. 3 при  $n=0$ ), заданы абсолютно одинаковыми для обоих стартовых паттернов  $P_{SL}^{(0)}$  и  $P_{SR}^{(0)}$ . Отличие же между  $P_{SL}^{(0)}$  и  $P_{SR}^{(0)}$  состоит в том, что стартовые конфигурации АЦ, находящихся в возбужденном ( $L_K = L_{III}$ , черные пиксели на рис. 3 при  $n=0$ ) и рефрактерном ( $L_K = L_{II}$ , серые пиксели на рис. 3 при  $n=0$ ) состояниях, разнятся лишь для одного АЦ. Координаты этого АЦ составляют в данном случае  $i = 66$ ,  $j = 41$ . Для  $P_{SL}^{(0)}$  пиксель, соответствующий указанному АЦ, является черным, а для  $P_{SR}^{(0)}$  – серым. Напомним, что цвета пикселей для стартового паттерна однозначно соответствуют значениям соответствующих элементов матрицы фазовых состояний, а именно:

$\varphi_{ij}^{(0)} = 0$  для белых,  $\varphi_{kl}^{(0)} = 1$  для черных и  $\varphi_{mn}^{(0)} = \tau_e + 1$  для серых пикселей соответственно.

Несмотря на столь малое различие между стартовыми паттернами  $P_{SL}^{(0)}$  и  $P_{SR}^{(0)}$ , эволюция рассматриваемой системы качественно изменяется при переходе от начальных условий  $P_{SL}^{(0)}$  к начальным условиям  $P_{SR}^{(0)}$ . Действительно, после старта системы из состояния  $P_{SL}^{(0)}$  видно, как формируется ВСА, которая после выхода на аттрактор имеет  $|Q_T| = 3$ ;  $\text{sgn } Q_T = +1$  (рис. 3, левая колонка,  $n = 10118$ ). В то же время эволюция системы, стартовавшей из состояния  $P_{SR}^{(0)}$ , ведет к возникновению ВСА, для которой и модуль, и знак топологического заряда уже совсем другие:  $|Q_T| = 2$ ;  $\text{sgn } Q_T = -1$  (рис. 3, правая колонка,  $n = 10118$ ). Промежуточные этапы (рис. 3,  $n = 500$  и  $n = 2010$ ) показывают наиболее характерные стадии переходных процессов для обоих рассмотренных случаев. Хорошо видны противоположные тенденции в конкурентных процессах между ДС с положительными и отрицательными вихреобразующими элементами (рис. 3,  $n = 500$ ) и формирование промежуточных уединенных ВСА с  $\text{sgn } Q_T = +1$  (рис. 3, левая колонка,  $n = 2010$ ) и  $\text{sgn } Q_T = -1$  (рис. 3, правая колонка,  $n = 2010$ ). Интересно, что обе промежуточные уединенные ВСА, различаясь по знаку  $Q_T$ , имеют одинаковые модули топологического заряда  $|Q_T| = 4$  (рис. 3,  $n = 2010$ ). Подчеркнем, что по ходу дальнейшей эволюции системы происходит дифференциация ВСА не только по знаку, но также и по модулю (рис. 3,  $n = 10118$ ). В целом же приведенные выше результаты компьютерных экспериментов демонстрируют ярко выраженный эффект гиперчувствительности модельной возбудимой трехуровневой системы к изменению начальных условий, что характерно и для реальных фазерных систем.

**Выводы.** Таким образом, методами компьютерных экспериментов обнаружены и исследованы эволюционные процессы в трехуровневых возбудимых системах, приводящие к самоорганизации мезоскопических ДС (содержащих АЦ в количестве  $D \approx 10^3 - 10^4$  и более), в том числе устойчивых ВСА с кратными топологическими зарядами. Обнаружены и детально изучены размерные эффекты для таких ВСА. Методом обобщенных сечений Пуанкаре выполнено моделирование эффекта пространственного сосуществова-

ния регулярных и нерегулярных автоволновых структур при медленных переходных процессах в возбудимой среде (эффект такого рода наблюдался нами ранее в реальных экспериментах на рубиновом фазере [16]). Продемонстрирована гиперчувствительность к начальным условиям для мультистабильной возбудимой системы, имеющей аттракторы в форме ВСА с различными высшими топологическими зарядами.

Кратко рассмотрим перспективы дальнейших исследований. Предварительные компьютерные эксперименты, выходящие за рамки поставленных в настоящей работе задач, показали, что гиперчувствительность исследуемой системы к начальным условиям может приводить и к другим нетривиальным явлениям, среди которых можно особо выделить спонтанное восстановление симметрии, принудительно нарушенной при задании начальных условий. Так, для системы, близкой к показанной на рис. 3, можно найти условия, при которых изменение состояния одного единственного пикселя приводит к формированию не ВСА, а зеркально-симметричной мезоскопической ДС, хотя изначально зеркальная симметрия стартового паттерна была существенно (по сравнению с рис. 3) искажена. Подробное исследование этого явления предполагается провести в последующих работах.

Еще одним возможным направлением развития исследований самоорганизованных структур является разработка решеточных моделей для диссипативных систем того же класса, что и в настоящей работе (когда релаксация активной среды протекает значительно медленнее, чем релаксация полевой подсистемы), но в условиях, когда АЦ не закреплены физически в некоторых неподвижных узлах решетки, а могут мигрировать в пределах всей рабочей среды, формируя специфические пространственные структуры. Подобные системы уже исследовались ранее в другом контексте – это, например, светочувствительные пленки типа AgCl-Ag [40]. Алгоритмически задача о движущихся АЦ с локальными взаимодействиями относится к тому же классу трудности (класс *P-time* [41]), что и задача о динамике дискретной возбудимой среды. Это важно с точки зрения разработки эффективного программного обеспечения для моделирования длительных эволюционных процессов в диссипативных системах.

Автор выражает искреннюю признательность С. Д. Маковецкому (*Microsoft CP*) за возможность использовать разработанные им программы *TLM* и *TLL*, а также за постоянное сотрудничество в проведении компьютерных экспериментов. Автор глубоко благодарен Е. Д. Маковецкому (Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, кафедра физической оптики), О. Л. Бандман (Ин-

ститут вычислительной математики и математической геофизики, Новосибирск) и Х. Гисадо (*Computer Science Department, Centro Universitario de Merida, Spain*) за интерес к нашим исследованиям многочастичных трехуровневых систем и за любезно предоставленную библиографическую информацию по тематике данной работы.

1. Weiss C. O., Larionova Ye. Pattern Formation in Optical Resonators // Rep. Prog. Phys. - 2007. - 70. - P. 255–335.
2. Ваняг В. К. Волны и динамические структуры в реакционно-диффузионных системах. Реакция Белоусова-Жаботинского в обращенной микроэмульсии // Успехи физ. наук. - 2004. - 174, № 9. - С. 991-1010.
3. Oya T., Asai T., Fukui T., Amemiya Y. Reaction-Diffusion Systems Consisting of Single-Electron Oscillators // Int. J. Unconventional Computing. - 2005. - 1. - P. 177-194.
4. Murray J. D. Mathematical Biology: 3-rd Edition. - Berlin: Springer, 2002. - 618 p.
5. Fairley P. The Unruly Power Grid // IEEE Spectrum. - 2004. - 41, N 8. - P. 16-21.
6. Васильев В. А., Романовский Ю. М., Яхно В. Г. Автоволновые процессы. - М.: Наука, 1987. - 240 с.
7. Лоскутов А. Ю., Михайлов А. С. Введение в синергетику. - М.: Наука, 1990. - 272 с.
8. Колебания и бегущие волны в химических системах / Под ред. Ричарда Филда и Марии Бургер. - М.: Мир, 1988. - 720 с.
9. Бандман О. Л. Клеточно-автоматные модели пространственной динамики // Системная информатика. - Новосибирск: Изд-во СО РАН. - 2006. - Вып. 10. - С. 57-113.
10. Маковецкий Д. Н. Нелинейная динамика индуцированного излучения фононов в микроволновом неавтономном акустическом квантовом генераторе при сверхнизкочастотной модуляции накачки // Письма в Журн. техн. физики. - 2001. - 27, вып. 12. - С. 57-64.
11. Маковецкий Д. Н. Резонансная дестабилизация микроволнового индуцированного излучения фононов в акустическом квантовом генераторе (фазере) при периодической модуляции накачки // Журн. техн. физики. - 2004. - 74, вып. 2. - С. 83-91.
12. Makovetskiy S. D., Makovetskii D. N. A Computational Study of Rotating Spiral Waves and Spatio-Temporal Transient Chaos in a Deterministic Three-Level Active System. - Cornell (USA). - 2005. - 38 p. - (Preprint / Condensed Matter Repository. Cornell University; № cond-mat/0410460v2).
13. Маковецкий Д. Н. Нестационарные пространственные структуры, медленные переходные процессы и мультистабильность при слабой диффузии возбудителей в распределенных неравновесных системах с трехуровневыми активными центрами // Радиофизика и электроника. - Харьков: Ин-т радиофизики и электрон. НАН Украины. - 2005. - 10, № 3. - С. 466-475.
14. Makovetskiy S. D. Numerical Modeling of Coexistence, Competition and Collapse of Rotating Spiral Waves in Three-Level Excitable Media with Discrete Active Centers and Absorbing Boundaries. - Cornell (USA). - 2006. - 15 p. - (Preprint / Condensed Matter Repository. Cornell University; № cond-mat/0602345).
15. Маковецкий Д. Н. Конкуренция самоорганизованных вращающихся спиральных автоволн в неравновесной диссипативной системе с трехуровневыми активными центрами // Радиофизика и электроника. - Харьков: Ин-т радиофизики и электрон. НАН Украины. - 2007. - 12, № 1. - С. 209-222.
16. Makovetskii D. N. Slowing-Down of Transient Processes upon the Formation of the Power-Spectrum Fine Structure of a Microwave Phonon Laser (Phaser) // Ukr. J. Phys. - 2006. - 51, No. 5. - P. 449-459.

17. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. - М.: Мир, 1979. - 512 с.
18. Ацаркин В. А., Родак М. И. Спиновая температура в электронном парамагнитном резонансе // Проблемы магнитного резонанса. - М.: Наука, 1978. - С.187-205.
19. Гананольский Е. М., Маковецкий Д. Н. Усиление и генерация когерентных фононов в рубине в условиях инверсии населенностей спиновых уровней // Журн. эксперим. и теорет. физики. - 1977. - 72, вып 1. - С. 203-217.
20. Meltzer R. S., Rives J. E. New High-Energy Monoenergetic Source for Nanosecond Photon Spectroscopy // Phys. Rev. Letters. - 1977. - 38, No. 8. - P. 421-424.
21. Fokker P. A., Dijkhuis J. I., de Wijn H. W. Stimulated Emission of Phonons in an Acoustical Cavity // Phys. Rev. B. - 1997. - 55, No. 5. - P. 2925-2933.
22. Маковецкий Д. Н. Исследование усиления и генерации гиперзвука парамагнитными центрами в корунде при инверсии населенностей спиновых уровней: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. - Харьков, 1984. - 22 с.
23. Kevrekidis P. G., Malomed B. A., Zhigang Chen, Frantzeskakis D. J. Stable Higher-Order Vortices and Quasivortices in the Discrete Nonlinear Schrödinger Equation // Phys. Rev. E. - 2004. - 70, No. 5. - P. 6612.
24. Малинецкий Г. Г., Шакаева М. С. Моделирование колебательных химических реакций на поверхности // Журн. физ. химии. - 1995. - 69, № 8. - С. 1523-1527.
25. Зельдович Я. Б., Маломед Б. А. Топологические инварианты и струны в распределенных активных динамических системах // Докл. АН СССР. - 1980. - 254, No. 1. - С. 92-94.
26. Бодач П. Г., Реиодько Л. В. Алгоритмические и автоматные модели деятельности гладких мышц / Под ред. В. М. Глушкова. - К.: Наук. думка, 1979. - 348 с.
27. Greenberg J. M., Hastings S. P. Spatial Patterns for Discrete Models of Diffusion in Excitable Media // SIAM J. Appl. Math. - 1978. - 34. - P. 515-523.
28. Greenberg J. M., Greene C., Hastings S. P. Remarks on a 25 Year Old Theorem on Two-Dimensional Cellular Automata // Int. J. Unconv. Computing. - 2005. - 1, No. 4. - P. 399-402.
29. Jensen H. J. Self-Organized Criticality: Emergent Complex Behavior in Physical and Biological Systems. - Cambridge etc.: Cambridge Univ. Press, 1998. - 153 p.
30. Маковецкий С. Д. Программа для моделирования пространственно-временных структур в трехуровневых лазерах // Тр. 9-го Международ. форума "Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке" (19 - 21 апреля 2005). - Харьков: ХНУРЭ, 2005. - С. 348.
31. Маковецкий С. Д. Метод численного моделирования нестационарных процессов в трехуровневых возбудимых средах и его программная реализация на языке Java // Тр. 10-го Юбилейного Международ. форума "Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке" (10 - 12 апреля 2006). - Харьков: ХНУРЭ, 2006. - С. 357.
32. Арнолд К., Гослинг Дж., Холмс Д. Язык программирования Java. - М.: Изд. дом "Вильямс", 2001. - 624 с.
33. Колмогоров А. Н. Избранные труды. Теория информации и теория алгоритмов. - М.: Наука, 1987. - 304 с.
34. Fermi E., Pasta J., Ulam S. Studies of the Nonlinear Problems (Part I) // Collected Papers of Enrico Fermi / Ed. by E. Segre. - Chicago: Univ. of Chicago Press. - 1965. - P. 978-1007.
35. Кнут Д. Э. Получисленные алгоритмы, 3-е изд. - М.: Изд. дом "Вильямс", 2000. - 832 с. - (Искусство программирования: В 3-х т.; Т.2).
36. Gardner M. On Cellular Automata Self-Reproduction, the Garden of Eden and the Game of Life // Sci. Amer. - 1971. - 224. - P. 112-117.
37. Hagan P. S. Spiral Waves in Reaction-Diffusion Equations // SIAM Journ. Appl. Math. - 1982. - 42, No. 4. - P. 762-786.
38. Kuramoto Y., Battogtokh D. Coexistence of Coherence and Incoherence in Nonlocally Coupled Phase Oscillators // Nonlin. Phenom. Complex Syst. - 2002. - 5, No. 4. - P. 380-385.
39. Abrams D. M., Strogatz S. H. Chimera States in a Ring of Nonlocally Coupled Oscillators // Int. J. Bifurc. Chaos. - 2006. - 16, No. 1. - P. 21.
40. Makovetsky E. D., Miloslavsky V. K., Ageev L. A. Spontaneous Grating Formation in Thin Light-Sensitive AgCl-Ag Films at Linear P/S-Polarization of a Laser Beam // Journ. Optics A: Pure Appl. Optics. - 2005. - 7, No. 7. - P. 324-332.
41. Cormen T. H., Leiserson C. E., Rivest R. L., Stein C. Introduction to Algorithms: 2-nd edition. - Cambridge (Massachusetts, USA) etc.: The MIT Press, 2001. - 984 p.

**EVOLUTION AND THE DYNAMICAL  
STABILIZATION OF MESOSCOPIC  
DISSIPATIVE STRUCTURES (ROTATING  
AUTOWAVES) WITH MULTIPLE  
TOPOLOGICAL CHARGES IN THREE-LEVEL  
EXCITABLE SYSTEMS**

D. N. Makovetskii

The work is devoted to computer modeling of evolution of mesoscopic dissipative structures (DS), which emerge in three-level excitable systems of the phaser type. The main attention is concentrated on the investigation of the rotating spiral autowaves (RSA), including stable RSA with multiple topological charges. In our computer experiments, the dimensional phenomena for such the RSA were revealed and investigated in details. The hypersensitivity to initial conditions was demonstrated for a multistable excitable system having spatial attractors in the form of RSA with various higher topological charges. The phenomenon of spatial coexistence of regular and irregular DS during slow transition processes in excitable medium is modeled for the first time (such the phenomenon was observed by us earlier in real experiments on the ruby phaser).

**Key words:** mesoscopic dissipative structures, topological charge, phaser.

**ЕВОЛЮЦІЯ ТА ДИНАМІЧНА СТАБІЛІЗАЦІЯ  
МЕЗОСКОПІЧНИХ ДИСИПАТИВНИХ  
СТРУКТУР (ОБЕРТОВИХ АВТОХВИЛЬ)  
З КРАТНИМИ ТОПОЛОГІЧНИМИ ЗАРЯДАМИ  
У ТРИРІВНЕВИХ ЗБУДЖУВАНИХ СИСТЕМАХ**

Д. М. Маковецкий

Робота присвячена комп'ютерному моделюванню еволюції мезоскопічних дисипативних структур (ДС), що виникають у трирівневих збуджуваних системах фазерного типу. Основну увагу приділено вивченню обертових спіральних автохвиль (ОСА), у тому числі стійких ОСА з кратними топологічними зарядами. У наших комп'ютерних експериментах виявлені та детально вивчені розмірні ефекти для таких ОСА. Продемонстрована гіперчутливість до початкових умов для мультистабільної збуджуваної системи, що має просторові аттрактори у формі ОСА з різними вищими топологічними зарядами. Вперше виконано моделювання ефекту просторового співіснування регулярних та нерегулярних ДС при повільних перехідних процесах у збуджуваному середовищі (подібний ефект спостерігався нами раніше у реальних експериментах на рубіновому фазері).

**Ключові слова:** мезоскопічні дисипативні структури, топологічний заряд, фазер.

Рукопись поступила 12 марта 2008 г.