

**МЕТОД ЧАСТИЧНЫХ ОБЛАСТЕЙ С УЧЕТОМ ОСОБЕННОСТЕЙ
ВО ВНУТРЕННИХ ЗАДАЧАХ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ
КУСОЧНО-КООРДИНАТНЫМИ ГРАНИЦАМИ
ЧАСТЬ 1. СПЕКТРЫ СОБСТВЕННЫХ ВОЛН ОРТОГОННЫХ ВОЛНОВОДОВ**

С. А. Приколотин, А. А. Кириленко

*Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины
12, ул. Ак. Проскуры, Харьков, 61085, Украина
E-mail: prikolotin@ire.kharkov.ua*

Описан обобщенный метод нахождения модового базиса полых волноводов сложного поперечного сечения с произвольными кусочно-координатными границами, основанный на учете особенностей поля вблизи сингулярностей границ. Среди рассматриваемых объектов: П- и Н-волноводы, с Т-образной пластиной и многоканавчатые, простые и сложные крестообразные, прямоугольные коаксиальные и с сечением в виде полукольца и другие, являющиеся структурными элементами многих электродинамических объектов. Описаны все этапы алгоритма реализации обобщенного метода частичных областей с учетом особенностей поля от поиска полного спектра критических частот до поперечных полей собственных волн, что обеспечивает рассмотрение сложных векторных задач рассеяния в волноводах и перфорированных экранах. Приведены распределения поперечных электрических полей для низших и высших мод некоторых «экзотических» волноводов, демонстрирующие эффективность созданных вычислительных процедур. Ил. 4. Табл. 1. Библиогр.: 20 назв.

Ключевые слова: волновод сложного сечения, модовый базис, метод частичных областей.

При решении задач вычислительной электродинамики различают два подхода:

- разработка специализированных алгоритмов решения конкретных задач методом, оптимальным в смысле времени решения и скорости расчетов;
- использование известных глобальных сеточных методов и уже реализованных на их базе алгоритмов расчета и программных продуктов.

Преимуществом первого подхода являются скорость расчетов и точность получаемых решений, обеспечивающих возможность поиска оптимальных решений, а недостатком – высокая трудоемкость и, что немаловажно, высокая квалификация исполнителя. Главное достоинство второго направления: доступность и простота вычислительного инструмента естественным образом вытекает из глобальности подхода, однако быстрота расчетов, их точность и возможность поиска оптимальных решений пока оставляют желать лучшего.

В последнее время наметилась тенденция к использованию так называемых численно-аналитических подходов, сочетающих в себе достоинства обоих направлений. Их суть состоит в разработке таких специализированных методов и обобщающих программных решений, которые позволяют быстро и точно рассчитывать не одно конкретное устройство, а целый класс объектов, характеризующийся набором неких общих признаков, например, пренебрежимо малая толщина экранов, кусочно-координатные границы и т. д. Такие подходы уже на аналитическом уровне позволяют удовлетворить части требуемых условий (краевых, особенностей вблизи ребер и т. д.) и обеспечить наивысшую вычислительную эффективность в некотором классе краевых задач.

Примеры применения таких численно-аналитических подходов к анализу весьма сложных трехмерных объектов можно найти, например, в работах [1–4] и др. Более того, широко применяющийся прием ступенчатой аппроксимации гладких некоординатных границ может расширить сферу применения такого подхода и на произвольные некоординатные случаи, что впервые продемонстрировано в работе [5].

К упомянутому численно-аналитическим методам можно отнести и метод частичных областей (МЧО) с учетом поведения электромагнитного поля вблизи ребер. Впервые предложенный Г. И. Веселовым в 1980 г. [6] и развитый далее в разнообразных модификациях отечественными [7] и зарубежными [8, 9] исследователями, он продемонстрировал чрезвычайно высокую эффективность в разнообразных частных приложениях. Обобщение этого метода на произвольные волноводные объекты с декартово-координатными границами и его реализация в виде программного пакета на C++ представлены в настоящей работе.

Суть метода состоит в сшивании полей частичных подобластей, на которые разбита геометрия задачи, через дополнительные неизвестные поля, вводимые на «общих границах» частичных областей. Именно возможность учета особенности поведения полей на этих «общих границах» и обеспечивает чрезвычайно высокую сходимость соответствующих проекционных алгоритмов.

На ряде частных примеров авторами работ [6–9] были предложены различные наборы базисных функций, заданных на общих границах подобластей и обеспечивающих требуемое разложение, однако обобщение метода на произ-

вольное поперечное сечение проведено не было, что вызывало необходимость повторения трудоемких аналитических, программистских и отладочных процедур при использовании такого метода для расчета каждого нового волновода сложного сечения. Этот подход оказался подробно описанным только для расчета сечений, которые можно разбить на две области, таким образом, с учетом симметрии сечений можно было находить модовые базисы Г-, П-, Н-, Т-, О-, крестообразных волноводов и т. п.

Обобщение МЧО с учетом условия на ребре на волноводы с поперечным сечением в форме ортогона позволит рассчитывать модовый базис волноводов с поперечным сечением любой сложности, при этом выигрыш в скорости работы алгоритма в сравнении с классическим МЧО становится тем более очевиден, чем сложнее поперечное сечение. Кроме того, в отличие от классического МЧО, здесь нет необходимости вводить так называемые виртуальные подобласти, возникающие в случаях, когда прямое сшивание неприменимо. Единственным ограничением остается координатность границ поперечного сечения, но оно может быть снято благодаря использованию ступенчатой аппроксимации, применение которой в данном случае менее затратно.

1. Постановка задачи. Для решения задач дифракции на неоднородностях в сложных волноводах, задач о перфорированных экранах или диафрагмах с отверстиями специальной формы МЧО требуется знать модовые базисы всех структурных элементов, входящих в исследуемый объект. Нужно найти все критические частоты каждой линии в некотором заданном промежутке частот, определяющем размер проекционного базиса и в итоге точность расчета задачи рассеяния.

Рассмотрим для этого задачу о нахождении векторов собственных чисел и собственных функций оператора Лапласа с граничными условиями, описываемыми ТМ- и ТЕ-моды, которым соответствуют условия Дирихле и Неймана соответственно:

$$\begin{cases} \Delta U(x, y) - k_c^2 U(x, y) = 0; \\ \left[U(x, y) \right]_{(x, y) \in \partial S} = 0; \\ \left[\frac{\partial}{\partial \vec{n}} U(x, y) \right]_{(x, y) \in \partial S} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Для некоторой области S , ограниченной координатными ломаными, которые задают поперечное сечение волновода сложной формы (рис. 1), воспользуемся МЧО, для чего разобьем сложную область линиями $\{x = x_j\}_{j=1}^{J-1}$ на J прямоугольные подобласти $\{S_j\}_{j=1}^J$. Это делается

таким образом, чтобы у каждой области сверху и снизу были только металлические стенки, а слева и справа могут быть как общие границы подобластей, так и граница металла.

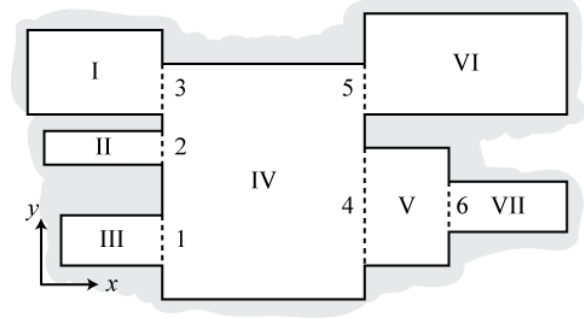


Рис. 1. Чертеж поперечного сечения волновода сложной формы, разбитого на прямоугольные подобласти I–VII

2. ТМ-моды. Будем искать собственные ТМ-моды волновода сложного сечения S , т. е. решать задачу (1) с граничными условиями Дирихле. Для этого представим поля ТМ-мод через электрический вектор Герца:

$$\vec{E}_e = \frac{\sqrt{W_e}}{i\beta} (\nabla \operatorname{div} \vec{\Pi}_e + k^2 \vec{\Pi}_e), \quad (2)$$

$$\vec{H}_e = -\frac{1}{\sqrt{W_e}} \operatorname{rot} \vec{\Pi}_e,$$

где $k = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu}$ – волновое число; β – продольная постоянная распространения; $\vec{\Pi}_e = \pm \vec{z}_0 \varphi_e(x, y) e^{\pm i\beta z}$ – электрический вектор Герца; $W_e = \frac{\beta}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon}$ – волновое сопротивление некой моды; $\varphi_e(x, y)$ – функция, являющаяся решением задачи Дирихле для оператора Лапласа:

$$\begin{cases} -\Delta \varphi_e(x, y) = k_c^2 \varphi_e(x, y), & (x, y) \in S; \\ \varphi_e(x, y) = 0, & (x, y) \in \partial S. \end{cases} \quad (3)$$

Представим функцию $\varphi_e(x, y)$ в каждой подобласти S_j в виде разложения в конечный ряд:

$$\begin{aligned} \varphi_e^{(j)}(x, y) = & \sum_{m=1}^{M^{(j)}} \frac{1}{\omega_m^{(j)}} \sin\left(\frac{m\pi}{h^{(j)}}(y - y_0^{(j)})\right) \times \\ & \times \left[A_m^{(j)} \sin(\omega_m^{(j)}(x - x_0^{(j)})) + \right. \\ & \left. + B_m^{(j)} \sin(\omega_m^{(j)}(a^{(j)} - x + x_0^{(j)})) \right], (x, y) \in S_j, \end{aligned} \quad (4)$$

где $j = 1, 2, \dots, J$; $a^{(j)}$ и $h^{(j)}$ – ширина и высота j -й подобласти S_j ; $(x_0^{(j)}, y_0^{(j)})$ – координаты ее левого нижнего угла в глобальной системе координат.

нат; $\omega_m^{(j)} = \sqrt{k_c^2 - \left(\frac{m\pi}{h^{(j)}}\right)^2}$. Задача, таким образом,

будет состоять в отыскании всех k_c из заданного промежутка, т. е. всех критических частот собственных мод и соответствующих каждой из них наборов векторов $\{\vec{A}^{(j)}, \vec{B}^{(j)}\}_{j=1}^N$, определяющих поля собственных мод волновода.

Обозначим теперь множество общих отрезков границ подобластей как $CB = \{CB_i\}_{i=1}^K$ (на рис. 1 CB_i показаны пунктирными линиями и пронумерованы арабскими цифрами 1–6). Для каждой подобласти S_i введем два множества границ: $CB_{left}^{(i)} = \{CB_j \in CB : CB_j \text{ лежат на левой стороне прямоугольника } S_i\}$ и $CB_{right}^{(i)} = \{CB_j \in CB : CB_j \text{ лежит на правой стороне прямоугольника } S_i\}$. Для каждой общей границы двух подобластей введем такие обозначения:

$$l(CB_i) = S_k \Leftrightarrow CB_i \in CB_{right}^{(k)},$$

$$r(CB_i) = S_k \Leftrightarrow CB_i \in CB_{left}^{(k)},$$

и, таким образом, через $l(CB_i)$ обозначим область, лежащую слева от апертуры CB_i , а как $r(CB_i)$ – область, лежащую справа от границы CB_i .

Например, для сечения, представленного на рис. 1, имеем $l(CB_3) = S_{IV}$, $r(CB_3) = S_V$, $CB_{left}^{(IV)} = \{CB_0, CB_1, CB_2\}$, $CB_{right}^{(IV)} = \{CB_3, CB_4\}$ и т. д.

Представим электрическое поле на каждой CB_i в виде разложения по системам функций $\{f_p^{(i)}(y)\}_{p=0}^{P^{(i)}}$, удовлетворяющих некоторым требованиям, которые определяются геометрией задачи и поведением касательной к ребрам компоненты \vec{E} -поля (см. разд. 4):

$$E_z^{(i)}(y) = \sum_{p=0}^{P^{(i)}} c_p^{(i)} f_p^{(i)}(y), \quad y \in CB_i, \quad (5)$$

где $c_p^{(i)}$ – неизвестные константы. Требуя непрерывности поля на стыках подобластей, сошьем касательные к плоскости «стыка» продольные электрические компоненты поля волновода на левой и правой сторонах подобласти S_i :

$$E_z(x, y)|_{x=x_0^{(i)}} = E_z^{(j)}, \quad j : CB_j \in CB_{left}^{(i)},$$

$$E_z(x, y)|_{x=x_0^{(i)}+a^{(i)}} = E_z^{(j)}, \quad j : CB_j \in CB_{right}^{(i)}$$

значит,

$$\sum_{m=1}^{M^{(i)}} \frac{1}{\omega_m^{(i)}} \sin\left(\frac{m\pi}{h^{(i)}}(y - y_0^{(i)})\right) B_m^{(i)} \sin(\omega_m^{(i)} a^{(i)}) =$$

$$= \sum_{j: CB_j \in CB_{left}^{(i)}} \sum_{p=0}^{P^{(j)}} c_p^{(j)} f_p^{(j)}(y),$$

$$\sum_{m=1}^{M^{(i)}} \frac{1}{\omega_m^{(i)}} \sin\left(\frac{m\pi}{h^{(i)}}(y - y_0^{(i)})\right) A_m^{(i)} \sin(\omega_m^{(i)} a^{(i)}) =$$

$$= \sum_{j: CB_j \in CB_{right}^{(i)}} \sum_{p=0}^{P^{(j)}} c_p^{(j)} f_p^{(j)}(y).$$

Спроектируем полученные равенства на тригонометрический базис $\sin\left(\frac{n\pi}{h^{(i)}}(y - y_0^{(i)})\right)$, в результате чего будем иметь следующие выражения для коэффициентов $A_m^{(i)}$ и $B_m^{(i)}$:

$$A_m^{(j)} = \frac{2\omega_m^{(j)}}{h^{(j)} \sin(\omega_m^{(j)} a^{(j)})} \sum_{CB_i \in CB_{right}^{(j)}} \sum_{p=0}^{P^{(i)}} c_p^{(i)} \times$$

$$\times \int_{CB_i} f_p^{(i)}(y) \sin\left(\frac{m\pi}{h^{(j)}}(y - y_0^{(j)})\right) dy, \quad (6)$$

$$B_m^{(j)} = \frac{2\omega_m^{(j)}}{h^{(j)} \sin(\omega_m^{(j)} a^{(j)})} \sum_{CB_i \in CB_{left}^{(j)}} \sum_{p=0}^{P^{(i)}} c_p^{(i)} \times$$

$$\times \int_{CB_i} f_p^{(i)}(y) \sin\left(\frac{m\pi}{h^{(j)}}(y - y_0^{(j)})\right) dy,$$

где $j = 1, 2, \dots, J$; $m = 1, 2, \dots, M^{(j)}$. Или в матричной форме:

$$\vec{A}^{(j)} = [\mathbf{N}^{(j)}]^{-1} \mathbf{W}^{(j)} [\mathbf{S}^{(j)}]^{-1} \sum_{i: CB_i \in CB_{right}^{(j)}} \mathbf{F}^{(i,j)} \vec{c}^{(i)},$$

$$\vec{B}^{(j)} = [\mathbf{N}^{(j)}]^{-1} \mathbf{W}^{(j)} [\mathbf{S}^{(j)}]^{-1} \sum_{i: CB_i \in CB_{left}^{(j)}} \mathbf{F}^{(i,j)} \vec{c}^{(i)}, \quad (7)$$

где $j = 1, 2, \dots, J$; $\mathbf{N}^{(j)}$, $\mathbf{W}^{(j)}$, $\mathbf{S}^{(j)}$ – диагональные матрицы $M^{(j)} \times M^{(j)}$; $N_{m,m}^{(j)} = \frac{h^{(j)}}{2}$; $W_{m,m}^{(j)} = \omega_m^{(j)}$; $S_{m,m}^{(j)} = \sin(\omega_m^{(j)} a^{(j)})$; $\mathbf{F}^{(i,j)}$ – матрица размером $M^{(j)} \times P^{(i)}$, элементами которой являются проекционные интегралы:

$$F_{m,p}^{(i,j)} = \int_{CB_i} f_p^{(i)}(y) \sin\left(\frac{m\pi}{h^{(j)}}(y - y_0^{(j)})\right) dy.$$

Далее, записывая условия непрерывности магнитных компонент поля на общих границах подобластей и проектируя полученное равенство на другие системы тестовых функций, заданных на общих границах подобластей и удовлетворяющих неким требованиям на магнитную компоненту поля (см. разд. 4), придем к выражению

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{G}^{(n,l(n))} \mathbf{C}^{(l(n))} [\mathbf{N}^{(l(n))}]^{-1} \mathbf{W}^{(l(n))} [\mathbf{S}^{(l(n))}]^{-1} \sum_{n \in CB_{right}^{(l(n))}} \mathbf{F}^{(l(n),n)} \bar{\mathbf{c}}^{(n)} - \\
 & - \mathbf{G}^{(n,l(n))} [\mathbf{N}^{(l(n))}]^{-1} \mathbf{W}^{(l(n))} [\mathbf{S}^{(l(n))}]^{-1} \sum_{n \in CB_{left}^{(l(n))}} \mathbf{F}^{(l(n),n)} \bar{\mathbf{c}}^{(n)} = \\
 & = \mathbf{G}^{(n,r(n))} [\mathbf{N}^{(r(n))}]^{-1} \mathbf{W}^{(r(n))} [\mathbf{S}^{(r(n))}]^{-1} \sum_{n \in CB_{right}^{(r(n))}} \mathbf{F}^{(r(n),n)} \bar{\mathbf{c}}^{(n)} - \\
 & - \mathbf{G}^{(n,r(n))} \mathbf{C}^{(r(n))} [\mathbf{N}^{(r(n))}]^{-1} \mathbf{W}^{(r(n))} [\mathbf{S}^{(r(n))}]^{-1} \sum_{n \in CB_{left}^{(r(n))}} \mathbf{F}^{(r(n),n)} \bar{\mathbf{c}}^{(n)}
 \end{aligned} \tag{8}$$

для $\forall n: CB_n \in CB$, где $\mathbf{C}^{(j)}$ – диагональная матрица $M^{(j)} \times M^{(j)}$ и $C_{m,m}^{(j)} = \cos(\omega_m^{(j)} a^{(j)})$; $\mathbf{G}^{(j,i)}$ – матрица размером $P^{(i)} \times M^{(j)}$;

$$G_{m,p}^{(j,i)} = \int_{CB_i} g_p^{(i)}(y) \sin\left(\frac{m\pi}{h^{(j)}}(y - y_0^{(j)})\right) dy;$$

$\{g_p^{(i)}(y)\}_{p=0}^{P^{(i)}}$ – система тестовых функций, определяемых магнитной компонентой. Таким образом, получим однородную систему линейных алгебраических уравнений первого рода относительно

$$\begin{aligned}
 & \text{вектора неизвестных } \bar{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} \bar{c}_1 \\ \dots \\ \bar{c}_2 \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} \\
 & \mathbf{K}^{(TM)} \bar{\mathbf{c}} = 0. \tag{9}
 \end{aligned}$$

Как известно, однородная система линейных уравнений имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда $\text{rang } \mathbf{K}$ меньше количества переменных, что в нашем случае равносильно выполнению равенства $\det \mathbf{K} = 0$. Следовательно, для отыскания решения системы (9) необходимо найти такие k_c , при которых определитель матрицы \mathbf{K} обращается в нуль, после чего следует поставить каждому найденному k_c в соответствие вектор $\bar{\mathbf{c}}$ – такой, что является решением (9). Далее, пользуясь (7), получим коэффициенты разложения $\varphi_e^{(j)}(x, y)$ в ряд и, следовательно, найдем решения задачи (1) с граничными условиями Дирихле.

3. ТЕ-моды. Теперь будем искать ТЕ-моды, т. е. рассмотрим задачу (1) с граничными условиями Неймана. Для этого представим поля через магнитный вектор Герца:

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{E}}_h &= \sqrt{W_h} \text{rot } \bar{\mathbf{\Pi}}_h, \\
 \bar{\mathbf{H}}_h &= \frac{1}{i\beta\sqrt{W_h}} (\nabla \text{div } \bar{\mathbf{\Pi}}_h + k^2 \bar{\mathbf{\Pi}}_h), \tag{10}
 \end{aligned}$$

где $W_h = \frac{\omega \mu_0 \mu}{\beta}$ – волновое сопротивление;

$\bar{\mathbf{\Pi}}_h = \pm \bar{z}_0 \varphi_h(x, y) e^{\pm i\beta z}$ – магнитный вектор Герца; $\varphi_h(x, y)$ – функция, являющаяся решением задачи Дирихле для оператора Лапласа:

$$\begin{cases} -\Delta \varphi_h(x, y) = k_c^2 \varphi_h(x, y), & (x, y) \in S; \\ \frac{\partial}{\partial n} \varphi_h(x, y) = 0, & (x, y) \in \partial S. \end{cases} \tag{11}$$

Представим функцию $\varphi_h(x, y)$ в каждой подобласти S_j ($j = 1, 2, 3, \dots, J$) в виде разложения

$$\begin{aligned}
 \varphi_h^{(j)}(x, y) &= \sum_{m=0}^{M^{(j)}} \cos\left(\frac{m\pi}{h^{(j)}}(y - y_0^{(j)})\right) \times \\
 & \times \left[A_m^{(j)} \cos(\omega_m^{(j)}(x - x_0^{(j)})) + \right. \\
 & \left. + B_m^{(j)} \cos(\omega_m^{(j)}(a^{(j)} - x + x_0^{(j)})) \right], (x, y) \in S_j. \tag{12}
 \end{aligned}$$

Представим электрическое поле на CB_i в виде разложения по функциям, заданным на CB_i и удовлетворяющим неким условиям, определяемым компонентой электрического поля, нормальной к ребрам границы волновода:

$$E_y^{(i)}(y) = \sum_{p=0}^{P^{(i)}} c_p^{(i)} f_p^{(i)}(y), \quad y \in CB_i. \tag{13}$$

Требую непрерывности полей на границах подобласти « j », сошьем касательные к границам раздела подобластей электрические компоненты поля на левой и правой сторонах подобласти S_j ($j = 1, 2, 3, \dots, J$):

$$E_y(x, y) \Big|_{x=x_0^{(j)}} = E_y^{(i)}(y), \quad y \in CB_i, i: CB_i \in CB_{left}^{(j)};$$

$$E_y(x, y) \Big|_{x=x_0^{(j)}+a^{(j)}} = E_y^{(i)}(y), \quad y \in CB_i, i: CB_i \in CB_{right}^{(j)}.$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=0}^{M^{(j)}} \omega_m^{(j)} \cos\left(\frac{m\pi}{h^{(j)}}(y - y_0^{(j)})\right) B_m^{(j)} \sin(\omega_m^{(j)} a^{(j)}) = \\
 & = \sum_{i: CB_i \in CB_{left}^{(j)}} \sum_{p=0}^{P^{(i)}} c_p^{(i)} f_p^{(i)}(y),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \sum_{m=0}^{M^{(j)}} \omega_m^{(j)} \cos\left(\frac{m\pi}{h^{(j)}}(y - y_0^{(j)})\right) A_m^{(j)} \sin(\omega_m^{(j)} a^{(j)}) = \\ & = \sum_{i:CB_i \in CB_{right}^{(j)}} \sum_{p=0}^{P^{(i)}} c_p^{(i)} f_p^{(i)}(y). \end{aligned}$$

Спроектируем полученные равенства на тригонометрический базис $\cos\left(\frac{n\pi}{h^{(j)}}(y - y_0^{(j)})\right)$, в результате чего будем иметь следующее выражение коэффициентов $A_m^{(j)}$ и $B_m^{(j)}$:

$$\begin{aligned} A_m^{(j)} &= -\frac{2}{(1 + \delta_{0m})h^{(j)}\omega_m^{(j)}} \frac{1}{\sin(\omega_m^{(j)} a^{(j)})} \times \\ & \times \sum_i \sum_{p=0}^{P^{(i)}} c_p^{(i)} \int_{CB_j} f_p^{(i)}(y) \cos\left(\frac{m\pi}{h^{(j)}}(y - y_0^{(j)})\right) dy, \\ B_m^{(j)} &= \frac{2}{(1 + \delta_{0m})h^{(j)}\omega_m^{(j)}} \frac{1}{\sin(\omega_m^{(j)} a^{(j)})} \times \\ & \times \sum_i \sum_{p=0}^{P^{(i)}} c_p^{(i)} \int_{CB_j} f_p^{(i)}(y) \cos\left(\frac{m\pi}{h^{(j)}}(y - y_0^{(j)})\right) dy, \end{aligned} \quad (14)$$

или в матричной форме:

$$\begin{aligned} \bar{A}^{(j)} &= -[\mathbf{N}^{(j)}]^{-1} [\mathbf{W}^{(j)}]^{-1} [\mathbf{S}^{(j)}]^{-1} \times \\ & \times \sum_{i:CB_i \in CB_{right}^{(j)}} \mathbf{F}^{(i,j)} \bar{c}^{(i)}, \\ \bar{B}^{(j)} &= [\mathbf{N}^{(j)}]^{-1} [\mathbf{W}^{(j)}]^{-1} [\mathbf{S}^{(j)}]^{-1} \times \\ & \times \sum_{i:CB_i \in CB_{left}^{(j)}} \mathbf{F}^{(i,j)} \bar{c}^{(i)}, \end{aligned} \quad (15)$$

где матрицы $\mathbf{N}^{(j)}$, $\mathbf{W}^{(j)}$, $\mathbf{S}^{(j)}$ – определены в (7), только теперь $N_{m,m}^{(j)} = \frac{(1 + \delta_{0m})h^{(j)}}{2}$; $\mathbf{F}^{(j,i)}$ – матрица размером $M^{(j)} \times P^{(i)}$, элементами которой являются проекционные интегралы

$$F_{m,p}^{(i,j)} = \int_{CB_i} f_p^{(i)}(y) \cos\left(\frac{m\pi}{h^{(j)}}(y - y_0^{(j)})\right) dy.$$

Записывая условие непрерывности магнитной компоненты поля на стыке подобластей и проектируя полученное равенство на систему тестовых функций, приходим к выражению

$$\begin{aligned} & \mathbf{G}^{(n,l(n))} \mathbf{C}^{(l(n))} [\mathbf{N}^{(l(n))}]^{-1} [\mathbf{W}^{(l(n))}]^{-1} [\mathbf{S}^{(l(n))}]^{-1} \sum_{n \in CB_{right}^{(l(n))}} \mathbf{F}^{(l(n),n)} \bar{c}^{(n)} - \\ & - \mathbf{G}^{(n,l(n))} [\mathbf{N}^{(l(n))}]^{-1} [\mathbf{W}^{(l(n))}]^{-1} [\mathbf{S}^{(l(n))}]^{-1} \sum_{n \in CB_{left}^{(l(n))}} \mathbf{F}^{(l(n),n)} \bar{c}^{(n)} = \\ & = \mathbf{G}^{(n,r(n))} [\mathbf{N}^{(r(n))}]^{-1} [\mathbf{W}^{(r(n))}]^{-1} [\mathbf{S}^{(r(n))}]^{-1} \sum_{n \in CB_{right}^{(r(n))}} \mathbf{F}^{(r(n),n)} \bar{c}^{(n)} - \\ & - \mathbf{G}^{(n,r(n))} \mathbf{C}^{(r(n))} [\mathbf{N}^{(r(n))}]^{-1} [\mathbf{W}^{(r(n))}]^{-1} [\mathbf{S}^{(r(n))}]^{-1} \sum_{n \in CB_{left}^{(r(n))}} \mathbf{F}^{(r(n),n)} \bar{c}^{(n)}, \end{aligned} \quad (16)$$

для $\forall n: CB_n \in CB$; $\mathbf{C}^{(i)}$ – диагональная, определенная в (8) матрица; $\mathbf{G}^{(i,j)}$ – матрица $P^{(j)} \times M^{(i)}$; $G_{m,p}^{(i,j)} = \int_{CB_j} g_p^{(j)}(y) \cos\left(\frac{m\pi}{h^{(i)}}(y - y_0^{(i)})\right) dy$.

Таким образом, снова приходим к однородной системе линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{K}^{(TE)} \bar{c} = 0. \quad (17)$$

Дальнейшие действия полностью повторяют алгоритм, описанный для TM -мод.

4. Требования к базисным и тестовым функциям. Представленный подход к решению задачи на собственные значения предполагает разложение компонент электрического поля по

некоторым системам базисных функций $\{f_p^{(i)}(y)\}_{p=0}^{P^{(i)}}$, заданных на общей границе подобластей, кроме того, и переразложение компонент магнитного поля по системам тестовых функций $\{g_p^{(i)}(y)\}_{p=0}^{P^{(i)}}$. Естественно, что скорость сходимости алгоритма во многом зависит именно от того, насколько удачно выбраны эти функции, насколько эффективны алгоритмы расчета интегралов связи (моментов) между ними и тригонометрическими функциями и т. д.

МЧО с учетом особенности поля вблизи сингулярных точек выдвигает следующие требования к базисным функциям $f_p^{(i)}(y)$:

– на конце интервала, являющегося вершинной геометрически сингулярной точкой поперечного сечения, базисные функции должны удовлетворять соответствующему условию Мейкснера;

– на конце интервала, не являющегося особой точкой, функции или их первые производные должны удовлетворять требуемым граничным условиям.

Поскольку в предлагаемой постановке задачи граница области может иметь только ребра, образованные изломом границы под прямым углом, то условие Мейкснера будет иметь вид

$$\begin{cases} \bar{E}_t, \bar{H}_t = \underline{O}(r^{-1/3}), \\ E_z, H_z = \underline{O}(r^{2/3}), \end{cases} \quad r \rightarrow 0, \quad (18)$$

где r – расстояние до ребра.

Таким образом, функции $\{f_p^{(i)}(y)\}_{p=0}^{p(i)}$ должны для TM -мод:

– вести себя как $\underline{O}(r^1)$ вблизи электрических стенок;

– вести себя как $\underline{O}(r^0)$ вблизи магнитных стенок.

Для TE -мод:

– вести себя как $\underline{O}(r^0)$ вблизи электрических стенок;

– вести себя как $\underline{O}(r^1)$ вблизи магнитных стенок.

И в обоих случаях возрастать как $\underline{O}(r^{-2/3})$ вблизи ребер.

Очевидно, можно построить большое количество систем функций, удовлетворяющих вышеуказанным требованиям, среди них и косинусы (синусы) с весом, и полиномы Гегенбауэра, и полиномы Чебышева первого и второго рода, и функции Бесселя дробного порядка и т. д.

К функциям $g_p^{(i)}(y)$ общим требованием является возрастание как $\underline{O}(r^{-1/3})$ вблизи ребер. Дополнительные условия для TM -мод:

– вести себя как $\underline{O}(r^1)$ вблизи электрических стенок;

– вести себя как $\underline{O}(r^0)$ вблизи магнитных стенок.

Для TE -мод:

– вести себя как $\underline{O}(r^0)$ вблизи электрических стенок;

– вести себя как $\underline{O}(r^1)$ вблизи магнитных стенок.

Однако иногда, для того чтобы обеспечить равенство $\mathbf{F} = \mathbf{G}^t$ и тем самым сократить время расчетов, полагают $g_p^{(i)}(y) = f_p^{(i)}(y)$.

5. Алгоритм поиска и локализации корней. Запись полей в форме (4), (12) выбрана не случайно, это сделано из тех соображений, чтобы значения определителя матрицы \mathbf{K} были вещественны, поскольку поиск полного спектра (от десятков до сотен) корней комплекснозначной функции – задача гораздо более сложная. Первичная локализация корней определителя матрицы \mathbf{K} состоит в поиске отрезков, на концах которых $\det \mathbf{K}$ имеет разные знаки. После этого на участках локализации, не содержащих полюсов, при помощи стандартных численных методов ищется корень. Дело в том, что $\det \mathbf{K}$ как функция k_c не является непрерывной функцией, так как имеет разрывы второго рода (рис. 2). Поэтому перемена знака не обязательно является свидетельством того, что на отрезке находится корень – она может оказаться лишь следствием наличия разрыва на исследуемом отрезке.

Попытки избавиться от полюсов предпринимались еще Борнеманом [10, 11], в частности, он предложил использовать анализ не определителя матрицы, а находить ее наименьшее сингулярное значение, которое можно получить посредством сингулярного разложения матрицы СЛАУ (SVD). Оказалось, что такой подход не только замедляет работу алгоритма (количество операций, необходимое для осуществления SVD разложения, в 9 раз больше, чем при вычислении определителя), но и усложняет выбор шага при локализации корней. Объясняется это тем, что в данном случае первое приближение корня определяется не как середина знакопеременного отрезка, а как минимум кривой. Соответствующая процедура выглядит более сложно реализуемой даже на простых геометрических конфигурациях.

Так, например, при анализе П-образного волновода, представленного на рис. 2, зависимость наименьшего сингулярного значения от поперечного волнового числа носит относительно плавный характер. Если тот же П-образный волновод имеет геометрию, представленную на рис. 3, то наименьшее сингулярное значение в районе корней определителя падает намного круче, вследствие этого при недостаточно мелком шаге эти минимумы можно и пропустить. А задача поиска именно всех корней на заданном интервале является крайне важной, поскольку при решении задач рассеяния пропуск даже одной высшей моды может существенным образом сказаться на АЧХ.

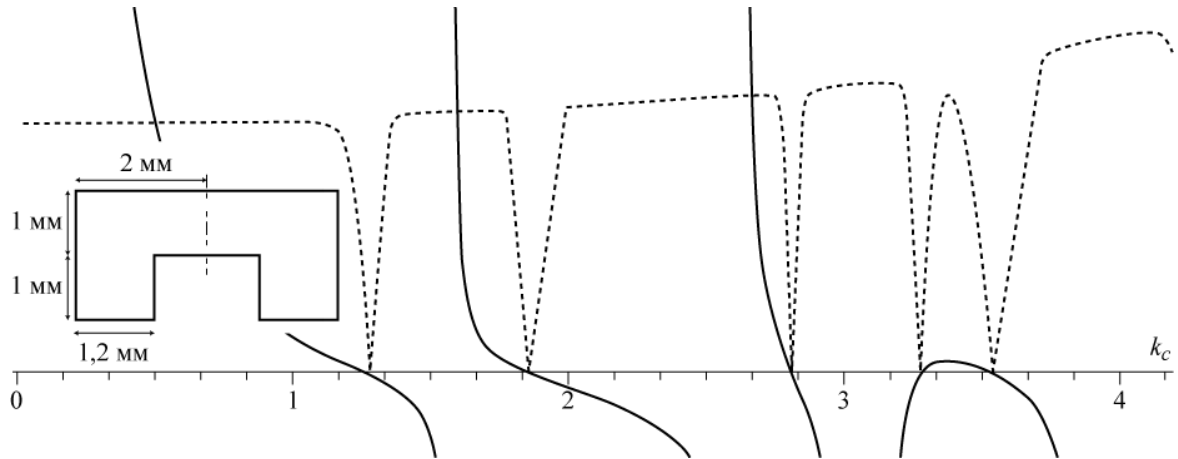


Рис. 2. Графики зависимостей определителя матрицы \mathbf{K} (сплошная линия) и наименьшего сингулярного значения матрицы \mathbf{K} (пунктирная линия) от k_c для П-волновода

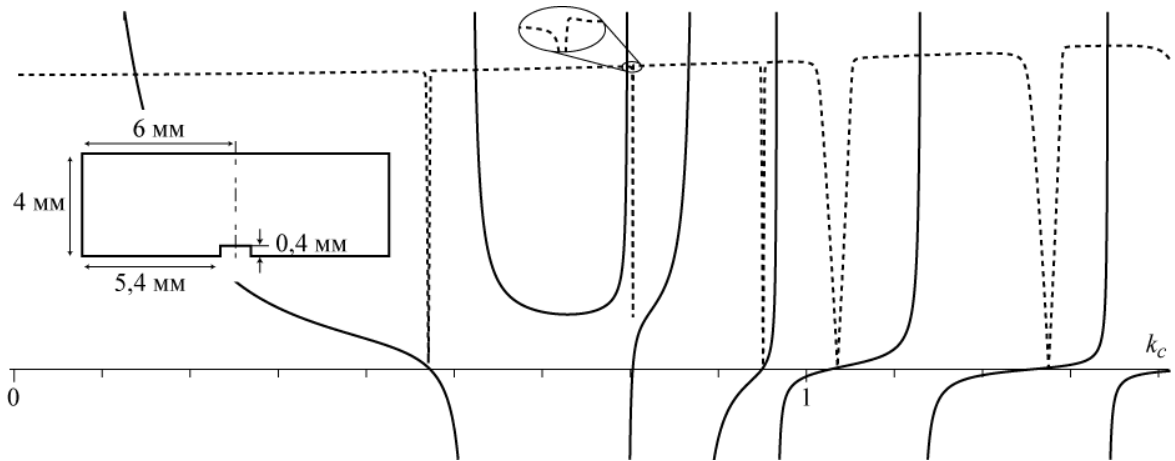


Рис. 3. Графики зависимостей определителя матрицы \mathbf{K} (сплошная линия) и наименьшего сингулярного значения матрицы \mathbf{K} (пунктирная линия) от k_c для П-волновода

Кроме того, как видно из рис. 3, локальный минимум вовсе не обязательно является следствием наличия корня в этой точке. Сам автор в работе [11] также признал этот метод не самым удачным.

Метод, основанный на *SVD*, также не позволяет эффективно уточнять значение корня. Единственным применимым надежным алгоритмом в данном случае является алгоритм половинного деления (дихотомии), который, как известно, является одним из самых медленно сходящихся методов. Если же применять метод *SVD* только для локализации корня, то более удобным, на наш взгляд, является использование в качестве значения функции не минимального сингулярного значения, а $\left| \arctan \left(\frac{\det \mathbf{K}}{\Delta} \right) \right|$. Получаемые кривые имеют абсолютно ту же топологию, но в случае использования арктангенса пологость графика вблизи минимумов удается регулировать пара-

метром Δ , да и скорость вычисления тригонометрической функции числа с плавающей точкой значительно выше скорости сингулярного разложения матрицы.

Если же локализовать корни по перемене знака определителя, то возникает новая проблема – выбор шага сканирования рассматриваемого промежутка. Существенно, что спектр поперечных волновых чисел собственных мод волновода сгущается по мере увеличения k_c , и поэтому шаг сканирования должен быть достаточно мелким, чтобы не пропустить высшие моды. Однако, выбрав такой шаг, мы существенно замедлим работу алгоритма при локализации низших мод. Кроме того, заранее угадать, какой шаг будет достаточно мелким для произвольной структуры без предварительного анализа практически невозможно.

После тщательного исследования проблемы мы пришли к выводу, что оптимальным все же выглядит алгоритм локализации корня с

использованием переменного шага, который выбирается после анализа численно взятой производной $\det \mathbf{K}$ как функции k_c . При этом, безусловно, от полюсов избавиться не удастся, но снижается вероятность пропуска корней и увеличивается быстродействие программы. А полюсы можно будет обходить в процессе поиска локализованного корня, поскольку известно, что наличие полюсов обусловлено наличием в формулах (8), (16) матриц $[\mathbf{S}^{(j)}]^{-1}$. А элементы этих матриц

$$S_{m,m}^{(j)} = \frac{1}{\sin(\omega_m^{(j)} a^{(j)})},$$

стремятся к бесконечности при $\sin(\omega_m^{(j)} a^{(j)}) \rightarrow 0$.

Опишем механизм подстройки шага в результате анализа производной. Пусть задан промежуток, на котором необходимо локализовать все корни определителя матрицы \mathbf{K} , и пусть переменная s определяет приращение k_c на каждом шаге продвижения по промежутку. Для краткости обозначим в этом разделе $u(x) := \det \mathbf{K}(x)$. Итак, при проходе по промежутку необходимо проанализировать значения функции u на текущем и следующем шаге, т. е. $u(x_1)$ и $u(x_2)$, где $x_1 := k_c$, $x_2 := k_c + s$.

Если $u(x_1)u(x_2) \leq 0$, то мы нашли отрезок, на котором находится либо корень, либо по-

люс. В этом случае нужно проверить, содержит ли отрезок полюсы, и если нет, то отыскать на нем корень.

Если же $u(x_1)u(x_2) > 0$, то ограничимся рассмотрением случая, когда $u(x_1) > 0$ и $u(x_2) > 0$, поскольку предлагаемый ниже анализ нетрудно по аналогии распространить и на случай, когда $u(x_1) < 0$ и $u(x_2) < 0$. Теперь, руководствуясь таблицей необходимо подстроить шаг s . В 1-й строке таблицы представлены различные комбинации оценок значений $u(x_1)$, $u'(x_1)$, $u(x_2)$ и $u'(x_2)$, во 2-й и 3-й строках проиллюстрировано и описано предполагаемое поведение функции u на отрезке $[x_1, x_2]$, а в 4-й строке указана константа, на которую в том или ином случае следует умножить s . Добавим, что ν и ξ определяются следующими равенствами:

$$\nu = \begin{cases} 2, & u'(x_1) \geq u'(x_2); \\ 1, & u'(x_1) < u'(x_2); \end{cases}$$

$$\xi = \begin{cases} 2, & \frac{|u'(x_1) - u'(x_2)|}{u'(x_1) + u'(x_2)} < 0,1; \\ 1, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Анализ поведения функции и выбор множителя шага

1	Значение определителя и его производной	$u'(x_1) \leq 0$ $u'(x_2) \geq 0$	$u'(x_1) > 0$ $u'(x_2) < 0$	$u(x_1) > u(x_2)$ $u'(x_1) \leq 0$ $u'(x_2) < 0$	$u(x_1) < u(x_2)$ $u'(x_1) > 0$ $u'(x_2) \geq 0$	$u(x_1) < u(x_2)$ $u'(x_1) \leq 0$ $u'(x_2) < 0$	$u(x_1) > u(x_2)$ $u'(x_1) > 0$ $u'(x_2) > 0$
2	Прогнозируемое поведение						
3	Анализ	На отрезке (x_1, x_2) пропущены корни или локальный минимум	На отрезке (x_1, x_2) локальный максимум или полюс	Впереди корень или локальный минимум	Позади корень или локальный минимум	Возможно, на отрезке (x_1, x_2) пропущены корни	Возможно, на отрезке (x_1, x_2) пропущены корни
4	Множитель шага	$1/3^*$	$\xi\nu$	$2\xi\nu$	2ν	$1/3^*$	$1/3^*$

* продолжить анализ с точки x_1 , т. е. пройти отрезок (x_1, x_2) с более мелким шагом

Следует учесть: поведение определителя может быть таким, что, руководствуясь правилами изменения шага, описанными в таблице, можно получить слишком мелкий или слишком крупный шаг, который в первом случае приведет к тому, что алгоритм будет работать очень медлен-

но, а во втором – к пропуску корней. Поэтому, чтобы отработать реальное сгущение спектра, нужно вводить ограничения на значения шага сверху и снизу, т. е. вводить две переменные $Step_{max}$ и $Step_{min}$, синхронно уменьшая их при нахождении каждого нового корня.

Тестирование алгоритма на разнообразных поперечных сечениях показало: несмотря на то что на каждом шаге приходится численно искать производную (а это влечет за собой дополнительное вычисление определителя в близкой точке), в целом такой алгоритм работает значительно быстрее и стабильнее, чем алгоритм с постоянным шагом. Более того, предлагаемый алгоритм является унифицированным для всех волноводов с координатными границами, т. е. работает без специализированных подстроек под заданную топологию.

Особую роль играет уменьшение исследуемого интервала посредством оценки снизу поперечного волнового числа основной моды (*TE* или *TM*). Так, для k_c первой *TM*-моды существуют различные способы оценки, наиболее удобной в нашем случае представляется оценка, которая была предложена в работе [12]:

$$k_{c0} \geq r_0 \sqrt{\frac{\pi}{S}},$$

где r_0 – первый положительный корень функции Бесселя $J_0(x)$; S – площадь поперечного сечения волновода. В нашем случае формулу можно переписать следующим образом:

$$k_{c0} \geq r_0 \sqrt{\frac{\pi}{\sum_{j=1}^J h^{(j)} a^{(j)}}}.$$

В случае *TE*-мод получение общей оценки частоты отсечки доминантной моды, верной для произвольных сечений, оказывается задачей существенно более сложной. Однако, для П- и Н-образных волноводов такие оценки существуют и приведены в работах [13–16].

6. Учет симметрии поперечного сечения. Известно, что использование специфических свойств модового базиса симметричных поперечных сечений позволяет не только сократить время

расчета, но также и разредить спектр, избавляясь от возникающих у таких объектов кратных корней. При этом появляются подобласти, у которых одна и более стенок оказываются магнитными (электрические стенки не вносят никаких изменений в формулы).

В случае наличия магнитной стенки на верхней стороне некоторой подобласти (рассекаемой горизонтальной плоскостью симметрии) в записи полей (4), (12) произойдут следующие изменения: в формуле (4) $\sin\left(\frac{m\pi}{h^{(j)}}(y - y_0^{(j)})\right)$ следует заменить на $\sin\left(\frac{\pi}{h^{(j)}}\left(m + \frac{1}{2}\right)(y - y_0^{(j)})\right)$, а в формуле (12) вместо $\cos\left(\frac{m\pi}{h^{(j)}}(y - y_0^{(j)})\right)$ нужно использовать $\cos\left(\frac{\pi}{h^{(j)}}\left(m + \frac{1}{2}\right)(y - y_0^{(j)})\right)$, что отразится лишь на вычислениях $F_{m,p}^{(j,i)}$ и $G_{m,p}^{(i,j)}$. Остальные формулы останутся верны.

Если магнитной стенкой является правая сторона некоторой подобласти (рассекаемой вертикальной плоскостью симметрии), то это равносильно выполнению равенств для *TM*-мод:

$$\begin{aligned} H_y^{(j)} \Big|_{x=x_0^{(j)}+a^{(j)}} = 0 &\Rightarrow \bar{A}^{(j)} \mathbf{C}^{(j)} - \bar{B}^{(j)} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \bar{A}^{(j)} = [\mathbf{C}^{(j)}]^{-1} \bar{B}^{(j)}, \end{aligned} \quad (19)$$

для *TE*-мод:

$$\begin{aligned} H_z^{(j)} \Big|_{x=x_0^{(j)}+a^{(j)}} = 0 &\Rightarrow \bar{A}^{(j)} \mathbf{C}^{(j)} + \bar{B}^{(j)} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \bar{A}^{(j)} = -[\mathbf{C}^{(j)}]^{-1} \bar{B}^{(j)}. \end{aligned} \quad (20)$$

Подставляя формулы (19) и (20) в равенства (8) и (16) соответственно, придем к уравнениям вида

$$\begin{aligned} &\mathbf{G}^{(n,l(n))} \mathbf{C}^{(l(n))} [\mathbf{N}^{(l(n))}]^{-1} \mathbf{W}^{(l(n))} [\mathbf{S}^{(l(n))}]^{-1} \times \sum_{n \in CB_{right}^{(l(n))}} \mathbf{F}^{(l(n),n)} \bar{\mathbf{c}}^{(n)} - \\ &- \mathbf{G}^{(n,l(n))} [\mathbf{N}^{(l(n))}]^{-1} \mathbf{W}^{(l(n))} [\mathbf{S}^{(l(n))}]^{-1} \times \sum_{n \in CB_{left}^{(l(n))}} \mathbf{F}^{(l(n),n)} \bar{\mathbf{c}}^{(n)} = \\ &= \mathbf{G}^{(n,r(n))} [\mathbf{N}^{(r(n))}]^{-1} \mathbf{W}^{(r(n))} [\mathbf{S}^{(r(n))}]^{-1} \times \sum_{n \in CB_{right}^{(r(n))}} \mathbf{F}^{(r(n),n)} \bar{\mathbf{c}}^{(n)} - \\ &- \mathbf{G}^{(n,r(n))} \left(\mathbf{C}^{(r(n))} - [\mathbf{C}^{(r(n))}]^{-1} \right) [\mathbf{N}^{(r(n))}]^{-1} \times \mathbf{W}^{(r(n))} [\mathbf{S}^{(r(n))}]^{-1} \sum_{n \in CB_{left}^{(r(n))}} \mathbf{F}^{(r(n),n)} \bar{\mathbf{c}}^{(n)} \end{aligned} \quad (21)$$

для *TM*-мод и вида

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{G}^{(n,l(n))} \mathbf{C}^{(l(n))} [\mathbf{N}^{(l(n))}]^{-1} [\mathbf{W}^{(l(n))}]^{-1} [\mathbf{S}^{(l(n))}]^{-1} \sum_{n \in CB_{right}^{(l(n))}} \mathbf{F}^{(l(n),n)} \bar{\mathbf{c}}^{(n)} - \\
 & - \mathbf{G}^{(n,l(n))} [\mathbf{N}^{(l(n))}]^{-1} [\mathbf{W}^{(l(n))}]^{-1} [\mathbf{S}^{(l(n))}]^{-1} \sum_{n \in CB_{left}^{(l(n))}} \mathbf{F}^{(l(n),n)} \bar{\mathbf{c}}^{(n)} = \\
 & = \mathbf{G}^{(n,r(n))} [\mathbf{N}^{(r(n))}]^{-1} [\mathbf{W}^{(r(n))}]^{-1} [\mathbf{S}^{(r(n))}]^{-1} \sum_{n \in CB_{right}^{(r(n))}} \mathbf{F}^{(r(n),n)} \bar{\mathbf{c}}^{(n)} - \\
 & - \mathbf{G}^{(n,r(n))} \left(\mathbf{C}^{(r(n))} - [\mathbf{C}^{(r(n))}]^{-1} \right) [\mathbf{N}^{(r(n))}]^{-1} [\mathbf{W}^{(r(n))}]^{-1} [\mathbf{S}^{(r(n))}]^{-1} \sum_{n \in CB_{left}^{(r(n))}} \mathbf{F}^{(r(n),n)} \bar{\mathbf{c}}^{(n)}
 \end{aligned} \tag{22}$$

для TE -мод.

Таким образом, приведенные выше формулы охватывают все случаи симметрии относительно обеих плоскостей.

7. Выбор количества функций в подобластях. Все приведенные выше рассуждения исходят из предположения, что количество членов ряда, аппроксимирующего поля в подобласти j , ограничено конечным числом $M^{(j)}$, тогда как в идеале их количество должно быть бесконечно. Очевидно, численные алгоритмы не могут оперировать бесконечными матрицами, в связи с этим возникает необходимость усечения рядов, при этом желательно использовать такое правило усечения, которое позволило бы получить наиболее точные решения при наименьшем количестве членов ряда.

Вычислить минимально необходимое количество членов разложения в подобласти j для отыскания всех собственных мод с частотой отсечки, не превышающей $k_{c \max}$, можно, обратившись к величинам $\omega_m^{(j)} = \sqrt{k_c^2 - \left(\frac{m\pi}{h^{(j)}}\right)^2}$ в выра-

жениях вида (4) или (12), по сути, описывающих суммы волн, распространяющихся или затухающих в плоскопараллельных волноводах ширины $h^{(j)}$. Если k_c и m таковы, что подкоренное выражение не отрицательно, то $\omega_m^{(j)}$ вещественна. Это означает, что такая k_c соответствует распространяющейся моде. С математической точки зрения обоснованность такого усечения объясняется тем, что, как видно из формул (6) и (14), из-за наличия в знаменателе $\sin(\omega_m^{(j)} a^{(j)})$, A_m и B_m быстро убывают при больших мнимых $\omega_m^{(j)}$. Следовательно, посредством простой формулы можно добиться того, чтобы были учтены по крайней мере все распространяющиеся моды с частотой отсечки, не превышающей $k_{c \max}$:

$$\begin{aligned}
 k_{c \max}^2 - \left(\frac{m\pi}{h^{(j)}}\right)^2 = 0 & \Leftrightarrow m = \frac{k_{c \max} h^{(j)}}{\pi} \Rightarrow \\
 \Rightarrow M_{\min}^{(j)} & = \frac{k_{c \max} h^{(j)}}{\pi}.
 \end{aligned} \tag{23}$$

После того как при некотором $M^{(j)}$, немного превышающем $M_{\min}^{(j)}$, найден первый набор частот отсечки, можно их уточнить. Процесс уточнения сводится к тому, что вводится некоторая константа точности, например δ , увеличивается $M^{(j)}$ и производится повторная процедура нахождения локализованного корня определителя, затем находится разность между корнем, найденным на предыдущей (u_{n-1}) и текущей (u_n) итерациях, эта разность сравнивается с δ . Процесс продолжается до тех пор, пока приращение корня на новой итерации не станет меньше δ :

$$\left| \frac{u_{n-1} - u_n}{u_n} \right| < \delta.$$

В результате проведения такой процедуры уточнения корней можно достичь высокой точности при нахождении всех критических частот.

8. Результаты. На основе данного метода было разработано и верифицировано на различных примерах программное обеспечение, позволяющее находить собственные моды волноводов, поперечное сечение которых представляет собой ортогональную любой степени сложности.

В целях демонстрации возможностей как самого метода, так и его реализации был рассмотрен ряд волноводов со сложным поперечным сечением и построено распределение электрического поля некоторых низших мод.

При уточнении частот отсечки константа δ была выбрана равной 10^{-4} . В качестве базисных функций были выбраны косинусы и синусы с весом:

$$f_{TE,p}^{(i)}(y) = \frac{\cos\left(\frac{p\pi}{|c_i|}y\right)}{\left(|c_i|^2 - y^2\right)^{1/3}}; f_{TM,p}^{(i)}(y) = \frac{\sin\left(\frac{p\pi}{|c_i|}y\right)}{\left(|c_i|^2 - y^2\right)^{1/3}},$$

здесь $|c_i|$ – длина отрезка CB_i ; такие функции были предложены в работе [9].

На рис. 4, а представлен так называемый «иерусалимский крест» (размеры квадрата, в который вписано поперечное сечение 8×8 мм), который широко используется как одна из конфигураций отверстий частотно-

селективных поверхностей [17]. На рис. 4, б показаны моды так называемых «complementary split-ring» (размеры описывающего прямоугольника $10,5 \times 9,5$ мм), широко используемых в качестве элементов новейших устройств микроволновой техники [18].

Распределение электрических полей некоторых собственных мод диафрагмы, образованной парой Т-образных вставок, изображено на рис. 4, в (размеры описывающего прямоугольника 20×10 мм). Такие диафрагмы применяются для синтеза запирающих волноводных фильтров [19].

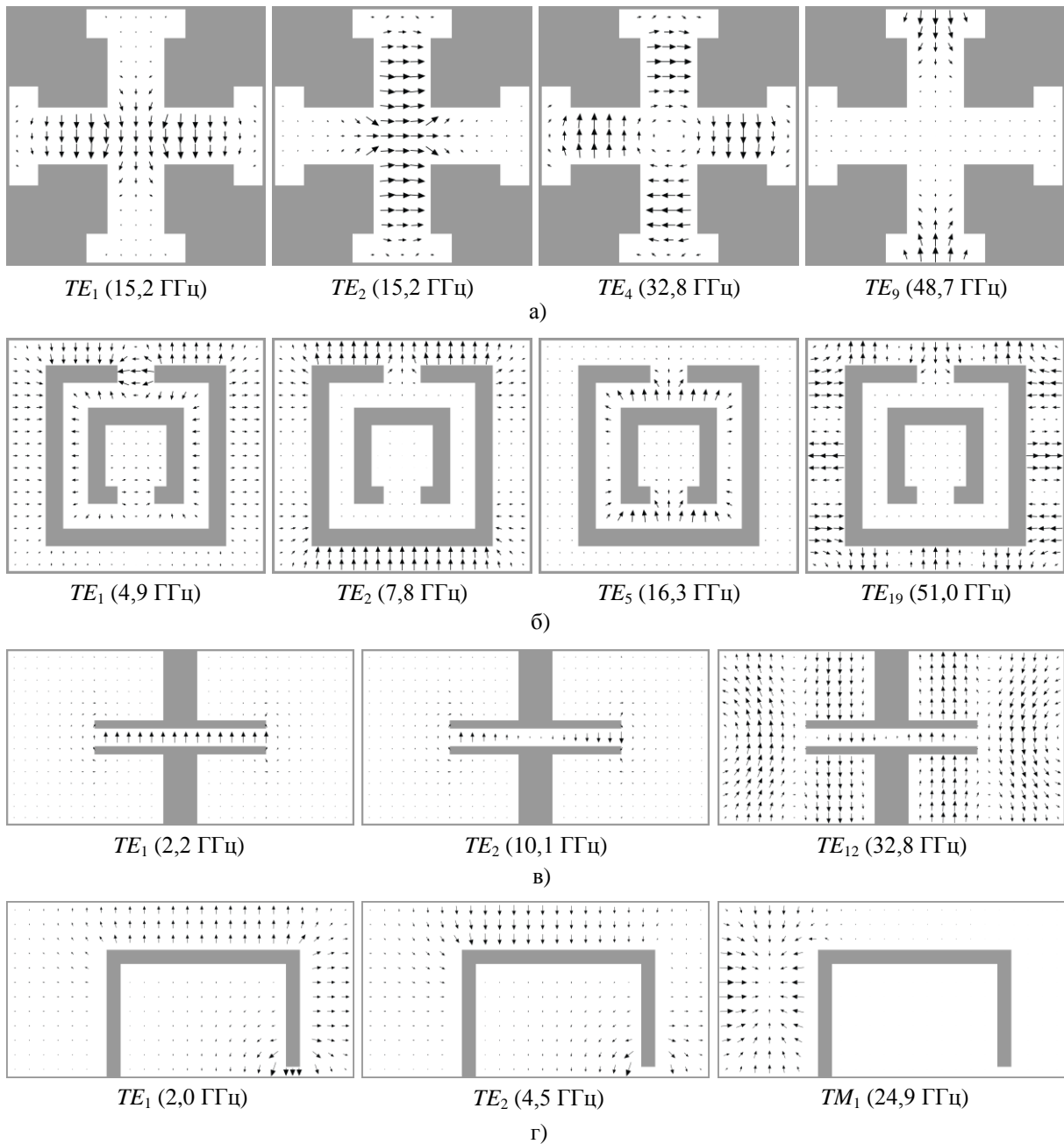


Рис. 4. Распределение электрического поля некоторых собственных мод волноводов сложного поперечного сечения

На рис. 4, г представлен волновод сложного сечения, возникший в результате декомпозиции устройства запитки прямоугольного волновода коаксиальным кабелем [20] (размеры описывающего прямоугольника 24×12 мм).

Выводы. Подробно рассмотрена задача нахождения модового спектра «ортогонных» волноводов. Представлен обобщенный МЧО с учетом особенности поля на ребре. Подробно описаны наиболее сложные моменты реализации алгоритма на основе предлагаемого метода, даны рекомендации по выбору стратегии поиска нулей определителя. Универсальность алгоритма продемонстрирована на примере волноводов сложного поперечного сечения, возникающих в ходе анализа и синтеза различных устройств СВЧ-техники.

Реализованный на базе предлагаемого метода алгоритм позволяет подготовить модовый базис, который можно использовать для решения задач дифракции на волноводных неоднородностях сложной формы поперечного сечения. Произвольность поперечного сечения таких объектов ограничивается только условием ее «ортогонности».

1. *Electromagnetic Modeling of Multi-Layer Microwave Circuits by the Longitudinal Decomposition Approach* / A. A. Kirilenko, D. Y. Kulik, L. A. Rud et al. // IEEE MTT-S International Microwave Symposium Digest. – Phoenix, 2001. – Vol. 2. – P. 1257–1260.
2. *Electromagnetic Modeling and Design of Dual-Band Septum Polarizers* / A. A. Kirilenko, D. Y. Kulik, L. A. Rud, V. I. Tkachenko, N. Herscovici // Applied Computational Electromagnetics Society Journal. – 2006. – 21, N 2. – P. 155–163
3. *Natarov M. P. Orthomode transducer for mm-wave range* / M. P. Natarov, L. A. Rud, V. I. Tkachenko // International Kharkov Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves. – Kharkov, 2004. – Vol. 2. – P. 641–643.
4. *Amdt F. Direct EM Based Optimization of Advanced Waffle-Iron and Rectangular Combline Filters* / F. Amdt, J. Brandt // IEEE MTT-S International Microwave Symposium Digest. – Seattle, 2002. – P. 2053–2056.
5. *Calculation of waveguide discontinuities with smooth boundaries using mode matching technique* / A. A. Kirilenko, S. F. Kulishenko, V. I. Tkachenko, D. Y. Kulik / Mathematical Methods in Electromagnetic Theory. – Dnepropetrovsk, 2004. – P. 139–141.
6. *Веселов Г. И. Об учете особенностей электромагнитных полей в методе частичных областей* / Г. И. Веселов, Н. И. Платонов, Е. С. Слесарев // Радиотехника. – 1980. – 35, № 5. – P. 27–34
7. *Волноводы сложных сечений* / Г. Ф. Заргано, В. П. Ляпин, В. С. Михалевский и др. – М.: Радио и связь, 1986. – 124 с.
8. *Itoh T. Numerical Techniques for Microwave and Millimeter-Wave Passive Structures* / T. Itoh. – New York: Wiley-Interscience, 1989. – 707 с.
9. *Amari S. Coupled-Integral-Equations Technique to Ridged Waveguides* / S. Amari, J. Bornemann, R. Vahldieck // Application of a IEEE Transactions on Microwave Theory Techniques. – 1996. – 44, N 12. – P. 2256–2264.
10. *Labay V. A. Matrix Singular Value Decomposition for Pole-Free Solutions of Homogeneous Matrix Equations as Applied to Numerical Modeling Methods* / V. A. Labay, J. Bornemann //

- IEEE Microwave and Guided Wave Letters. – 1992. – 2, N 2. – P. 49–51.
11. *Amari S. A Pole-Free Modal Field-Matching Technique for Eigenvalue Problems in Electromagnetics* / S. Amari, J. Bornemann // IEEE Transactions on Microwave Theory Techniques. – 1997. – 45, N 9. – P. 1649–1653.
 12. *Zhou X. Approximate formula for cutoff wavenumber of lowest-order TM mode of a hollow metallic waveguide of arbitrary cross-section* / X. Zhou, X. Y. Wang // IEE Proceedings: Microwaves, Antennas and Propagation. – 1996. – 143, N 5. – P. 454–456.
 13. *Marcuvitz N. Waveguide Handbook* / N. Marcuvitz. – London: The Institution of Engineering and Technology, 1986. – 446 с.
 14. *Hofer W. J. R. Closed Form Expressions for Parameters of Finned and Ridge Waveguide* / W. J. R. Hofer, M. N. Burton // IEEE Transactions on Microwave Theory Techniques. – 1982. – 30, N 12. – P. 2190–2194.
 15. *Helszajn J. Ridge Waveguides and Passive Microwave Components* / J. Helszajn. – London: The Institution of Engineering and Technology, 2000. – 327 с.
 16. *Fast and accurate predetermination of the cutoff frequency of the TE₁₀ mode in a ridged waveguide* / L. Guendouz, H. Massamba-Sita, M.-L. Gaulard, A. J. Tosser // International Journal of Electronics. – 1985. – 58, N 1. – P. 439–443.
 17. *Kshetrimayum R. S. Guided-Wave Characteristics of Waveguide Based Periodic Structures Loaded With Various FSS Strip Layers* / R. S. Kshetrimayum, L. Zhu // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 2005. – 53, N 1. – P. 120–124.
 18. *Gay-Balmaz P. Electromagnetic Resonances in Individual and Coupled Split-Ring Resonators* / P. Gay-Balmaz, O. J. F. Martin // Journal of Applied Physics. – 2002. – 92, N 5. – P. 2929–2936.
 19. *Labay V. A. A New Evanescent-Mode Filter for Densely Packaged Waveguide Applications* / V. A. Labay, J. Bornemann // IEEE MTT-S International Microwave Symposium Digest. – Albuquerque, 1992. – Vol. 2. – P. 901–904.
 20. *Salehi H. Lumped-Element Conductor-loaded Cavity Resonators* / H. Salehi, R. R. Mansour, V. Dokas // IEEE MTT-S International Microwave Symposium Digest. – Seattle, 2002. – Vol. 3. – P. 1601–1604.

THE MODE MATCHING TECHNIQUE TAKING INTO ACCOUNT FIELD SINGULARITIES APPLIED TO THE INNER PROBLEMS WITH ARBITRARY PIECEWISE-COORDINATE BOUNDARIES PART 1 EIGENMODE SPECTRUM OF ORTHOGONIC WAVEGUIDES

S. A. Prikolotin, A. A. Kirilenko

We describe a generalized method of finding the eigenmode spectrum of hollow waveguides with complicated cross-section and arbitrary piecewise coordinate boundaries. This method is based on taking into account the field singularities near the edges of boundary. Ridged, T-septum, cross-shaped, coaxial, split-ring-shaped waveguides, waveguides with multiple grooves etc. are considered. Such waveguides are the structural units of many microwave devices. All stages of implementing the algorithm of the mode matching technique accounting for field singularities are given. That ensures consideration of complicated waveguide and perforated screens vector scattering problems. Distributions of the transverse electric fields for the lower and higher modes of some exotic cross-section waveguides are shown. This demonstrates the effectiveness of final computer code.

Key words: complicated waveguide, mode basis, mode matching technique.

МЕТОД ЧАСТКОВИХ ОБЛАСТЕЙ
З УРАХУВАННЯМ ОСОБЛИВОСТЕЙ
У ВНУТРІШНІХ ЗАДАЧАХ ІЗ ДОВІЛЬНИМИ
КУСКОВО-КООРДИНАТНИМИ МЕЖАМИ
ЧАСТИНА I
СПЕКТРИ ВЛАСНИХ ХВИЛЬ
ОРТОГОННИХ ХВИЛЕВОДІВ

С. А. Приколотин, А. О. Кириленко

Описано узагальнений метод знаходження модового базису порожніх хвилеводів складного поперечного розрізу з довільними кусково-координатними межами, що ґрунтується на врахуванні особливостей поля поблизу сингулярностей меж. Серед розглянутих об'єктів: П- і Н-хвилеводи, із Т-об-

разною пластиною і багатоканавчати, прості та складні хрестообразні, прямокутні коаксіальні і з перерізом у вигляді півкільця та інші, що є структурними елементами багатьох ефектродинамічних об'єктів. Описано всі етапи алгоритму реалізації узагальненого методу часткових областей з урахуванням особливостей поля від пошуку повного спектру критичних частот до поперечних полів власних хвиль, що робить можливим розгляд складних векторних задач розсіяння в хвилеводах і перфорованих екранах. Наведено розподіли поперечних електричних полів для нижчих і вищих мод деяких «екзотичних» хвилеводів, що демонструють ефективність створених обчислювальних процедур.

Ключові слова: хвилевод складного розрізу, модовий базис, метод часткових областей.

Рукопись поступила 24 декабря 2009 г.