

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ, КОТОРОЕ СОЗДАЕТСЯ ЗАРЯДАМИ, НАВОДИМЫМИ НА СТЕНКЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ КАМЕРЫ ДРЕЙФА НЕРЕЛЯТИВИСТСКИМ ДВИЖУЩИМСЯ ЗАРЯДОМ

К. Ильенко, Т. Ю. Яценко

Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины
12, ул. Ак. Проскуры, Харьков, 61085, Украина
E-mail: kost@ire.kharkov.ua

Получено аналитическое представление для электрического поля, которое создается распределением плотности заряда, наведенным нерелятивистским движущимся зарядом, на стенке заземленной идеально проводящей цилиндрической камеры дрейфа. Интегрирование по угловой переменной в исходном представлении сводится к двум известным квадратурам (полным эллиптическим интегралам первого и второго рода) и вычислению двух конечных сумм с коэффициентами, являющимися функциями от одной универсальной переменной. Доказывается рекуррентное соотношение, позволяющее выполнить интегрирование по угловой переменной. Вычисление конечных сумм, проводимое предварительно на известной сетке разбиения пространства дрейфа, позволяет резко сократить время, затрачиваемое на полностью трехмерный расчет транспортировки заряженного пучка в методе крупных частиц. В качестве примера найдено аналитическое представление для электрического поля на оси системы, создаваемого таким распределением плотности заряда, содержащее только быстро сходящиеся ряды. Ил. 2. Библиогр.: 8 назв.

Ключевые слова: скалярная формула Кирхгофа, метод функций Грина, аналитическое представление.

В электронно-вакуумных приборах типа виркатор, генератор с магнитной изоляцией (MILO), лазер/мазер на свободных электронах (ЛСЭ/МСЭ) в режиме, близком к магниторезонансному и др., когда динамика электронного пучка происходит в собственных электрических и магнитных полях без воздействия внешних полей и/или, в некоторых условиях, даже при наличии внешних полей, определенную роль может играть заряд, наведенный движущимся электронным потоком на стенках камеры дрейфа (см., например, [1]). В работе [2] показано, что учет плотности зарядов, наведенных на стенке цилиндрической заземленной камеры дрейфа движущимися в камере зарядами, может оказывать существенное влияние («самовоздействие») на время падения этих зарядов на стенку в условиях отсутствия (ведущего) внешнего магнитного поля (ситуация типичная для приборов типа виркатор). При наличии ведущего магнитного поля в приборах типа ЛСЭ/МСЭ в режиме, близком к магниторезонансному, на некотором участке камеры дрейфа средняя скорость продольного движения электронов в камере дрейфа может становиться близкой к нулю [3]. Для более корректного описания динамики электронов тогда также следует учитывать такое «самовоздействие». Таким образом, можно сделать вывод, что при теоретическом изучении, асимптотическом оценивании и компьютерном моделировании для получения более точных результатов необходимо учитывать эффекты «самовоздействия», которые определяются плотностью заряда, наводимой на стенках заземленной камеры дрейфа.

Целью данной работы является получение аналитического представления для электрического поля, создаваемого зарядами, наводимыми нерелятивистски движущимся зарядом, на стенке

заземленной цилиндрической камеры дрейфа, которое было бы удобным для проведения численных расчетов и асимптотических оценок.

1. Постановка задачи. Используя скалярную формулу Кирхгофа [4, с. 289], можно показать, что в кулоновской калибровке ($\operatorname{div} \vec{A} = 0$) скалярный потенциал, создаваемый нерелятивистским движущимся зарядом в заземленной цилиндрической камере дрейфа, имеет вид

$$\varphi(t, \vec{x}) = \varphi^{in}(t, \vec{x}) + \varphi^{sc}(t, \vec{x}) \equiv \int_V \frac{\rho(t, \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3 \vec{x}' + \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \left[\frac{\partial}{\partial n} \varphi(t, \vec{x}') \right]_{\vec{x}' \in S'} dS', \quad (1)$$

где $\rho(t, \vec{x}) = q\delta(\vec{x} - \vec{x}(t))$ – плотность заряда, создаваемая точечным зарядом q , имеющим мгновенную координату $\vec{x}(t)$; V – объем камеры дрейфа; S – поверхность цилиндрической камеры дрейфа; $\varphi^{in}(t, \vec{x})$ – потенциал, создаваемый движущимся зарядом в свободном пространстве, а $\varphi^{sc}(t, \vec{x})$ – потенциал, создаваемый зарядами, наведенными этим зарядом на стенке камеры дрейфа. Соотношение (1) является интегральным уравнением на $\varphi(t, \vec{x})$, но если из каких-либо соображений $\varphi(t, \vec{x})$ известно, то его можно использовать для нахождения $\varphi^{sc}(t, \vec{x})$.

В нерелятивистском приближении сила взаимодействия между движущимися точечными зарядами (на которые обычно разбивается электронный поток при компьютерном моделировании) может быть вычислена, если известно выражение для скалярного потенциала $\varphi(t, \vec{x})$; последний

можно получить, например, методом функции Грина при помощи свертки:

$$\varphi(t, \bar{x}) = \int_{V'} \rho(t, \bar{x}''') G(\bar{x}; \bar{x}''') d^3 \bar{x}'''. \quad (1)$$

$$G(\bar{x}, \bar{x}''') = \frac{4}{a} \left[\sum_{q=1}^{+\infty} e^{-\nu_{0q} |\zeta - \zeta'''} \frac{J_0(\nu_{0q} t) J_0(\nu_{0q} t''')}{2\nu_{0q} J_1^2(\nu_{0q})} + \sum_{n,q=1}^{+\infty} e^{-\nu_{nq} |\zeta - \zeta'''} \frac{J_n(\nu_{nq} t) J_n(\nu_{nq} t''')}{\nu_{nq} J_{n+1}^2(\nu_{nq})} \cos[n(\theta - \theta''')] \right], \quad (2)$$

где ν_{nq} – q -й корень уравнения $J_n(x) = 0$; a – радиус камеры дрейфа; $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; $t = r/a$, $\theta = \arcsin(y/r)$ и $\zeta = z/a$ – безразмерные цилиндрические координаты (см., например, [5, с. 70; 6]).

Зная функцию Грина (2), мы можем вычислить электрическое поле $\vec{E}^{sc}(t, \bar{x})$, создаваемое зарядами, наведенными на стенке камеры дрейфа:

$$\begin{aligned} \vec{E}^{sc}(t, \bar{x}) &\equiv -\vec{\nabla} \varphi^{sc}(t, \bar{x}) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{S'} \frac{\bar{x} - \bar{x}'}{|\bar{x} - \bar{x}'|^3} \left[\frac{\partial}{\partial n} \varphi(t, \bar{x}) \right]_{\bar{x}=\bar{x}' \in S'} dS'. \quad (3) \end{aligned}$$

Это поле и определяет силу со стороны заряда, наведенного на стенке камеры дрейфа нерелятивистски движущимся зарядом. Следует отметить, что именно формула Кирхгофа (1) позволяет последовательно учесть эту составляющую силы, действующую на нерелятивистски движущийся заряд в заземленной камере дрейфа [2].

В численных расчетах удобнее перейти к безразмерным величинам: $\vec{e}^{sc} = -(a^2/q)\vec{E}^{sc}$, $\tau = ct/a$. Это позволяет переписать (3) с учетом (2) в виде

$$\begin{aligned} \vec{e}^{sc}(t, \theta, \zeta; \tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta' d\theta' \alpha(\theta', \zeta') \times \\ &\times \frac{(t - \cos[\theta - \theta'], \sin[\theta - \theta'], \zeta - \zeta')}{[t^2 + 1 - 2t \cos[\theta - \theta'] + (\zeta - \zeta')^2]^{3/2}}. \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{e}^{sc}(t, \theta, \zeta; \tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{J_0(\nu_{0q} \tilde{t})}{J_1(\nu_{0q})} e^{-\nu_{0q} |\zeta - \zeta'|} (\vec{e}^{sc})_0 + 2 \sum_{n,q=1}^{+\infty} \frac{J_n(\nu_{nq} \tilde{t})}{J_{n+1}(\nu_{nq})} e^{-\nu_{nq} |\zeta - \zeta'|} (\vec{e}^{sc})_n \right\} d\zeta', \\ (\vec{e}^{sc})_n &\equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(t - \cos \theta', \sin \theta', \zeta')}{(t^2 + 1 - 2t \cos \theta' + \zeta'^2)^{3/2}} \cos[n(\theta - \tilde{\theta} - \theta')] d\theta'. \quad (5) \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} (\varepsilon_r^{sc})_n &= \frac{g^3}{8\pi t^{3/2}} [2t W_n(g) + \\ &- W_{n+1}(g) - W_{n-1}(g)] \cos[n(\theta - \tilde{\theta})], \end{aligned}$$

Здесь $G(\bar{x}; \bar{x}')$ – функция Грина уравнения Пуассона $\Delta \varphi = -4\pi \rho(t, \bar{x})$, $\varphi|_S = 0$ и $\varphi|_{|z-\tilde{z}| \rightarrow +\infty} = 0$, имеющая для неограниченной цилиндрической заземленной камеры дрейфа следующий вид:

Здесь $\alpha(\theta', \zeta') \equiv \alpha(\theta', \zeta'; \tilde{t}, \tilde{\theta}, \tilde{\zeta})$ – нормированная поверхностная плотность заряда, наведенного движущимся зарядом с мгновенными координатами $(\tilde{t}(\tau), \tilde{\theta}(\tau), \tilde{\zeta}(\tau))$, на стенке неограниченной цилиндрической заземленной камеры дрейфа, найденная в работе [6]:

$$\begin{aligned} \alpha(\theta', \zeta') &= \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{J_0(\nu_{0q} \tilde{t})}{J_1(\nu_{0q})} e^{-\nu_{0q} |\zeta' - \tilde{\zeta}|} - \sum_{n,q=1}^{+\infty} \frac{J_n(\nu_{nq} \tilde{t})}{J_{n+1}^2(\nu_{nq})} \times \\ &\times [J_{n-1}(\nu_{nq}) - J_{n+1}(\nu_{nq})] e^{-\nu_{nq} |\zeta' - \tilde{\zeta}|} \cos[n(\theta' - \tilde{\theta})]. \end{aligned}$$

В монографии [1, с. 123] получено выражение для потенциала поверхностного заряда, наведенного бесконечно тонким соосным заряженным кольцом, движущимся в неограниченной цилиндрической заземленной камере дрейфа. Чтобы ускорить расчет динамики осесимметричного пучка заряженных частиц, это выражение было аналитически проинтегрировано по углу. Для неосесимметричных задач о полностью трехмерной динамике заряженных частиц также имеет смысл получить проинтегрированное по углу представление для выражения (4).

2. Преобразования интегралов. Используя очевидные замены переменных интегрирования, тождество $J_{n-1}(\nu_{nq}) = -J_{n+1}(\nu_{nq})$ и периодичность подынтегральной функции по углу θ' , преобразуем выражение (4) к виду

$$\begin{aligned} (\varepsilon_\theta^{sc})_n &= \frac{g^3}{8\pi t^{3/2}} [W_{n-1}(g) - W_{n+1}(g)] \sin[n(\theta - \tilde{\theta})], \\ (\varepsilon_z^{sc})_n &= \frac{g^3}{4\pi t^{3/2}} W_n(g) \zeta' \cos[n(\theta - \tilde{\theta})], \quad \text{где} \end{aligned}$$

$$W_n(g) \equiv \int_0^{\pi/2} \frac{\cos[2n\theta']}{(1+g^2 \sin^2 \theta')^{3/2}} d\theta',$$

а $g \equiv (4l/[(1-l)^2 + \zeta'^2])^{1/2}$; $W_{-n}(g) = W_n(g)$. Не сложно убедиться, что $W_0(g) = I_0(g)$ и $W_1(g) = I_0(g) - 2I_2(g)$, где

$$I_{2l}(g) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2l} \theta'}{(1+g^2 \sin^2 \theta')^{3/2}} d\theta', \quad l = 0, 1, 2, \dots;$$

причем $I_0(g)$ и $I_2(g)$ выражаются через полные эллиптические интегралы первого, $K(k) = F(\pi/2, k)$, и второго, $E(k) = E(\pi/2, k)$, рода по формулам:

$$I_0(g) = \frac{E(g/\sqrt{1+g^2})}{\sqrt{1+g^2}},$$

$$I_2(g) = \frac{K(g/\sqrt{1+g^2}) - E(g/\sqrt{1+g^2})}{g^2 \sqrt{1+g^2}}. \quad (6)$$

Оказывается, что $W_n(g)$ и в общем случае при $n \geq 1$ выражается через $I_{2l}(g)$:

$$W_n(g) = I_0(g) + \sum_{l=1}^n \frac{(-1)^l 2^{2l}}{(2l)!} I_{2l}(g) \prod_{m=0}^{l-1} (n^2 - m^2)$$

(при выводе используется формула Муавра и известное представление из справочника [7, с. 600]), а $I_{2l}(g)$ при $l \geq 2$ можно выразить через $I_0(g)$ и $I_2(g)$ при помощи рекуррентных соотношений.

3. Рекуррентные соотношения. Представим $I_{2l}(g)$ при $l \geq 2$ в виде

$$I_{2l}(g) = \frac{(-1)^l}{g^{2l}} I_0(g) - \sum_{p=1}^l \frac{(-1)^p}{g^{2p}} I'_{2(l-p)}(g), \quad (7)$$

$$I'_{2l}(g) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2l} \theta'}{(1+g^2 \sin^2 \theta')^{1/2}} d\theta', \quad l = 0, 1, 2, \dots,$$

при $l=1$ и учете (8) получается тождество $I_2(g) = I_2(g)$. Используя известные соотношения для эллиптических интегралов [7, с. 200-201], имеем

$$I'_0(g) = I_0(g) + g^2 I_2(g),$$

$$I'_2(g) = I_0(g) - I_2(g). \quad (8)$$

При $p=1, 2, 3, \dots, l-2$ верно представление (сравните с [7, с. 201])

$$I'_{2(l-p)}(g) = A_1^{l-p} I'_{2(l-p-2)}(g) + A_2^{l-p} I'_{2(l-p-1)}(g),$$

где

$$A_1^s(g) = \frac{2(s-1)-1}{2s-1} \frac{1}{g^2}, \quad A_2^s(g) = -\frac{2(s-1)-1-g^2}{2s-1} \frac{1}{g^2},$$

$$l-1 \geq s \geq 2.$$

Отсюда следует, что $I'_{2(l-p)}(g)$ можно выразить через $I'_0(g)$ и $I'_2(g)$:

$$I'_{2(l-p)}(g) = C^{l-p} I'_0(g) + D^{l-p} I'_2(g), \quad l-2 \geq p \geq 1$$

с коэффициентами $C^{l-p}(g)$ и $D^{l-p}(g)$, получаемыми из рекуррентных соотношений

$$\begin{cases} C^{l-p}(g) \\ D^{l-p}(g) \end{cases} = A_1^{l-p}(g) \begin{cases} C^{l-p-2}(g) \\ D^{l-p-2}(g) \end{cases} +$$

$$+ A_2^{l-p}(g) \begin{cases} C^{l-p-1}(g) \\ D^{l-p-1}(g) \end{cases}, \quad l-2 \geq p \geq 1 \quad (9)$$

с начальными значениями $C^0(g) = 1$, $C^1(g) = 0$ и $D^0(g) = 0$, $D^1(g) = 1$. Тогда, используя (6), (7) и (8), окончательно получаем

$$I_{2l}(g) = \frac{E(g/\sqrt{1+g^2})}{\sqrt{1+g^2}} \left\{ \frac{(-1)^l}{g^{2l}} - \frac{(1+g^2)}{g^2} \sum_{p=1}^l \frac{(-1)^p}{g^{2p}} D^{l-p}(g) \right\} +$$

$$- \frac{K(g/\sqrt{1+g^2})}{\sqrt{1+g^2}} \left\{ \sum_{p=1}^l \frac{(-1)^p}{g^{2p}} C^{l-p}(g) - \frac{1}{g^2} \sum_{p=1}^l \frac{(-1)^p}{g^{2p}} D^{l-p}(g) \right\}, \quad l \geq 1. \quad (10)$$

Результат (10) сводит задачу об аналитическом интегрировании по углу в (4) к известным квадратурам и вычислению двух конечных сумм

$$\sum_{p=1}^l (-1)^p g^{-2p} C^{l-p}(g) \quad \text{и} \quad \sum_{p=1}^l (-1)^p g^{-2p} D^{l-p}(g)$$

с коэффициентами, задаваемыми рекуррентными соотношениями (9).

4. Представление электрического поля на оси системы. Следует отметить, что в (10) содержатся отрицательные степени параметра g , который обращается в нуль на оси системы (при

$l=0$). Однако можно показать, что для вычисляемого с помощью (10) электрического поля $\vec{\varepsilon}^{sc}$, создаваемого зарядами, наведенными на стенке камеры дрейфа, особенность при $l=0$ является устранимой. Единственными величинами, отличными от нуля в представлении (5), оказываются

$$(\varepsilon_r^{sc})_1 = -\frac{\cos[\theta - \tilde{\theta}]}{2(1 + \zeta'^2)^{3/2}}, \quad (\varepsilon_\theta^{sc})_1 = \frac{\sin[\theta - \tilde{\theta}]}{2(1 + \zeta'^2)^{3/2}},$$

$$(\varepsilon_z^{sc})_0 = \frac{\zeta'}{2(1 + \zeta'^2)^{3/2}}. \quad (11)$$

Это гарантирует, что при $\tilde{t} = 0$, $\theta = \tilde{\theta}$ и $\zeta = \tilde{\zeta}$ сила, действующая на нерелятивистски движущийся заряд со стороны наведенных ним самим зарядов на стенке неограниченной цилиндрической заземленной камеры дрейфа, обращается в нуль, как и ожидается в силу цилиндрической симметрии. В общем случае на оси системы ($t = 0$) поперечные компоненты вектора электрического поля, создаваемого распределением заряда, наведенным нерелятивистским движущимся зарядом, представлены графически на рис. 1 (показано сечение $z > \tilde{z}$; компонента ε_z^{sc} смотрит из плоскости рисунка в положительном направлении оси z ; проекция мгновенного положения ($a\tilde{t}(\tau)$, $\tilde{\theta}(\tau)$, $a\tilde{\zeta}(\tau)$) движущегося заряда $q < 0$ на рассматриваемое сечение обозначена звездочкой *).

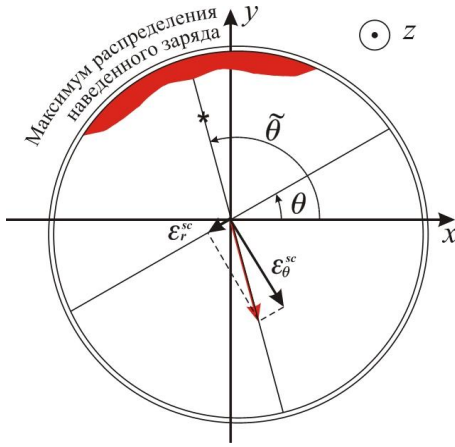


Рис. 1. Поперечные компоненты электрического поля, создаваемого распределением заряда, наведенным нерелятивистски движущимся зарядом, на оси системы. Проекция мгновенного положения движущегося заряда на рассматриваемое сечение обозначена звездочкой *

На рис. 2 представлена зависимость абсолютной величины z -компоненты электрического поля на оси системы, $\varepsilon_z^{sc}(0, \theta, \zeta)$, в функции мгновенного расстояния, $|\zeta - \tilde{\zeta}|$, от сечения, в котором находится заряд, наводящий распределение поверхностной плотности заряда, создающей соответствующее поле см. (12); \tilde{t} – мгновенная радиальная координата движущегося заряда.

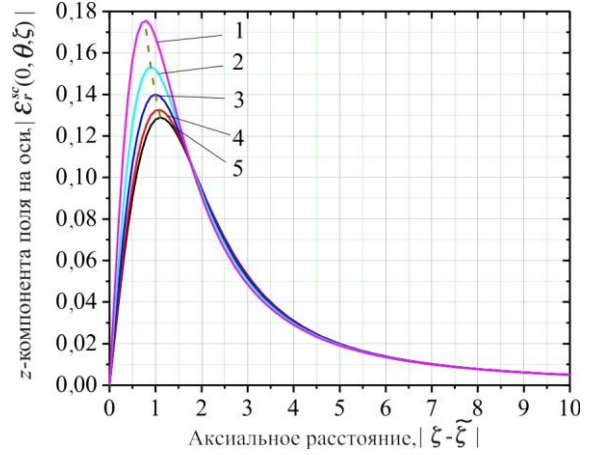


Рис. 2. График абсолютной величины z -компоненты электрического поля на оси системы в функции мгновенного расстояния от сечения, в котором находится заряд, наводящий распределение поверхностной плотности заряда, создающей соответствующее поле, см. (12): 1 – $\tilde{t} = 0,9$; 2 – $\tilde{t} = 0,7$; 3 – $\tilde{t} = 0,5$; 4 – $\tilde{t} = 0,3$; 5 – $\tilde{t} = 0$; \tilde{t} – мгновенная радиальная координата движущегося заряда

Подставляя (11) в (5), преобразуя интегралы по ζ' и интегрируя по частям (сравните с монографией [1, с. 123]), окончательно получаем:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_r^{sc}(0, \theta, \zeta) &= -\cos[\theta - \tilde{\theta}] \left[\frac{\tilde{t}}{(1 + |\zeta - \tilde{\zeta}|^2)^{3/2}} - 3 \int_0^{+\infty} \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{J_1(v_{1q}\tilde{t})}{v_{1q}J_2(v_{1q})} e^{-v_{1q}\zeta'} \times \right. \\
 &\times \left. \left\{ \frac{\zeta' + |\zeta - \tilde{\zeta}|}{[1 + (\zeta' + |\zeta - \tilde{\zeta}|)^2]^{5/2}} + \frac{\zeta' - |\zeta - \tilde{\zeta}|}{[1 + (\zeta' - |\zeta - \tilde{\zeta}|)^2]^{5/2}} \right\} d\zeta' \right], \\
 \varepsilon_\theta^{sc}(0, \theta, \zeta) &= \sin[\theta - \tilde{\theta}] \left[\frac{\tilde{t}}{(1 + |\zeta - \tilde{\zeta}|^2)^{3/2}} - 3 \int_0^{+\infty} \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{J_1(v_{1q}\tilde{t})}{v_{1q}J_2(v_{1q})} e^{-v_{1q}\zeta'} \times \right. \\
 &\times \left. \left\{ \frac{\zeta' + |\zeta - \tilde{\zeta}|}{[1 + (\zeta' + |\zeta - \tilde{\zeta}|)^2]^{5/2}} + \frac{\zeta' - |\zeta - \tilde{\zeta}|}{[1 + (\zeta' - |\zeta - \tilde{\zeta}|)^2]^{5/2}} \right\} d\zeta' \right], \\
 \varepsilon_z^{sc}(0, \theta, \zeta) &= \frac{1}{2} \operatorname{sgn}[\zeta - \tilde{\zeta}] \left[\frac{|\zeta - \tilde{\zeta}|}{(1 + |\zeta - \tilde{\zeta}|^2)^{3/2}} + \int_0^{+\infty} \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{J_0(v_{0q}\tilde{t})}{v_{0q}J_1(v_{0q})} e^{-v_{0q}\zeta'} \times \right. \\
 &\times \left. \left\{ \frac{1 - 2(\zeta' + |\zeta - \tilde{\zeta}|)^2}{[1 + (\zeta' + |\zeta - \tilde{\zeta}|)^2]^{5/2}} - \frac{1 - 2(\zeta' - |\zeta - \tilde{\zeta}|)^2}{[1 + (\zeta' - |\zeta - \tilde{\zeta}|)^2]^{5/2}} \right\} d\zeta' \right].
 \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь принято во внимание известное значение для суммы ряда, [8, с. 610],

$$\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{J_n(\nu_{nq}z)}{\nu_{nq}J_{n+1}(\nu_{nq})} = \frac{z^n}{2}.$$

Следует отметить, что выражения (12) содержат только быстро сходящиеся ряды, а использование замены $\zeta' = -\ln w$ позволяет эффективно выполнить интегрирование (см. [1, с. 124]).

Выводы. Таким образом, нами получены выражения, обобщающие известное представление из монографии [1, с. 123] на аксиально-несимметричный случай. Особый интерес представляет учет силы со стороны наведенного на стенке камеры дрейфа заряда на породивший его движущийся заряд («самовоздействие»), возможный при использовании представлений (1) и (3) (см., например, [2, 6]). Для бесконечно тонкого заряженного кольца, движущегося соосно в цилиндрической камере дрейфа, представление (5) следует усреднить по углу $\tilde{\theta}$, а для учета «самовоздействия» также положить $t = \tilde{t}$ и $\zeta = \tilde{\zeta}$. Тогда из (5) сохраняется только первое слагаемое, содержащее $(\epsilon_r^{sc})_0 = g^3 [\tilde{t} W_0(g) - W_1(g)] / (4\pi \tilde{t}^{3/2}) \equiv g^3 [I_0(g)(\tilde{t} - 1) + 2I_2(g)] / (4\pi \tilde{t}^{3/2})$, которое, как несложно проверить непосредственно, получается дифференцированием потенциала $P(r)$, полученного в монографии [1, с. 123], по r (в принятых обозначениях $r = a\tilde{t}$): $(\epsilon_r^{sc})_0 = -a^2 dP(r) / (\pi dr)$.

1. Кураев А. А. Теория и оптимизация электронных приборов СВЧ. – Минск: Наука и техника, 1979. – 336 с.
2. Яценко Т., Ильенко К., Коваленко А. Г. Расчет динамики нерелятивистских заряженных частиц, движущихся в цилиндрической камере дрейфа / 18th. Int. Crimean Conference “Microwave & Telecommunication Technology”: Book of Abstracts. – Sebastopol, 2008. – P. 175–176.
3. Горяшко В. О., Ильенко К. В. Мазер на вільних електронах: режим магнітостатичного резонансу // Наук. вісн. Ужгородського ун-ту. Сер. Фізика. – 2007. – Вип. 21. – С. 145–150.
4. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 376 с.
5. Джексон Дж. Классическая электродинамика. – М.: Мир, 1965. – 704 с.
6. Горбик Г. М., Ильенко К. В., Яценко Т. Ю. К расчету силы, действующей на движущийся заряд в цилиндрической камере дрейфа // Радиофизика и электроника. – Харьков: Ин-т радиофизики и электрон. НАН Украины. – 2004. – 9, № 3. – С. 556–561.
7. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. В 2-х т. Т. 1. Элементарные функции. – М.: Физматлит, 2002. – 632 с.

8. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. В 2-х т. Т. 2. Специальные функции. – М.: Физматлит, 2003. – 664 с.

ON ANALYTIC REPRESENTATION OF ELECTRIC FIELD CREATED BY CHARGES INDUCED BY NON-RELATIVISTICALLY MOVING CHARGES ON CYLINDRICAL WAVEGUIDE WALL

K. Ilyenko, T. Yu. Yatsenko

We obtain an analytic representation of the electric field, which is created by the charge density induced on the grounded ideally conducting cylindrical drift tube wall by a non-relativistically moving charge. The angle variable integration in the initial formulation is reduced to two known quadratures (complete elliptic integrals of the first and second kind) and to calculation of two finite sums with the coefficients that are functions of a single uniform variable. A recurrence relation, which allows one to perform the angle integration, is proved. The sums calculation, accomplished beforehand on the known space mesh of drift tube, can substantially reduce the computation time required for an essentially 3D calculation of transport of a charged beam by the particle-in-cell method. As an example of the proposed technique, we find a representation of electric field on the system axis induced by such a charge density distribution, which contains only fast convergent series.

Key words: the scalar Kirchhoff formula, Green's function method, an analytical representation.

ПРО АНАЛІТИЧНЕ УЯВЛЕННЯ ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛЯ, СТВОРЕНОГО ЗАРЯДАМИ, ЯКІ НАВОДЯТЬСЯ НА СТІНЦІ ЦИЛІНДРИЧНОЇ КАМЕРИ ДРЕЙФУ НЕРЕЛЯТИВІСТСЬКИМ ЗАРЯДОМ, ЩО РУХАЄТЬСЯ

К. Ільєнко, Т. Ю. Яценко

Отримано аналітичне уявлення для електричного поля, що утворюється розподілом густини заряду на стінці заземленої ідеально провідної циліндричної камери дрейфу, який утворюється зарядом, котрий рухається нерелятивістськи. Інтегрування за кутовою змінною у вихідному уявленні зводиться до двох відомих квадратур (повних еліптичних інтегралів першого та другого роду) та обчисленню двох скінчених сум з коефіцієнтами, які є функціями від однієї універсальної змінної. Доводиться рекурентне співвідношення, що дозволяє виконати інтегрування за кутовою змінною. Підрахування скінчених сум, якщо виконувати його на відомій сітці розбиття простору дрейфу, дозволяє різко скоротити час повністю тривимірного розрахунку транспортування зарядженого пучка в методі крупних частинок. Як приклад знайдено аналітичне уявлення для електричного поля на вісі системи, що утворюється таким розподілом, яке містить тільки швидкозбіжні ряди.

Ключові слова: скалярна формула Кірхгофа, метод функції Гріна, аналітичне уявлення.

Рукопись поступила 28 июля 2009 г.