

СРАВНИТЕЛЬНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ЗОННЫХ СПЕКТРОВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУР, ОБРАЗОВАННЫХ СЛОЯМИ РАЗЛИЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

А. А. Булгаков, С. И. Ханкина, О. В. Шрамкова, В. М. Яковенко

*Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины,
12, ул. Ак. Проскуры, Харьков, 61085, Украина
E-mail: bulgakov@ire.kharkov.ua; O.Shramkova@gmail.com*

Проведен сравнительный анализ одномерных периодических структур, образованных двумя повторяющимися слоями: диэлектрик–диэлектрик, диэлектрик–полупроводник, диэлектрик–полупроводник в магнитном поле, феррит–феррит и повторяющаяся последовательность квантовых ям. Во всех случаях аналитически и численно проведено исследование физических особенностей перечисленных структур. Показано, что исследованные свойства могут быть применены на практике для широкого спектра частот от единиц гигагерц до сотен терагерц (от сантиметрового до рентгеновского диапазонов длин волн). Ил. 6. Библиогр.: 13 назв.

Ключевые слова: периодическая структура, передаточная матрица, дисперсионное соотношение, *TE*- и *TM*-волны, разрешенная и запрещенная зоны.

Освоение коротковолновых частотных диапазонов от десятков до сотен гигагерц (от миллиметрового до рентгеновского) в настоящее время связано с развитием нанoeлектроники. Одним из направлений этой области является создание тонкопленочных структур из различных материалов. Если свойства такой структуры обладают периодичностью, то можно говорить о создании нового материала с физическими параметрами, не существующими у естественных твердых тел. Электродинамические свойства отдельных слоев описываются уравнениями Максвелла и граничными условиями. Периодичность структуры накладывает дополнительные требования на поля на границах слоев. В результате возникает новое свойство – трансляционная симметрия. Оно, как известно, заключается в том, что свойства материала повторяются с определенным периодом. Минимальное значение периода повторения поля равно периоду структуры, а максимальное – может быть любым. В результате возникают зоны пропускания и непропускания электромагнитных волн. Эти зоны аналогичны энергетическим зонам для электронов в кристаллических проводящих твердых телах. Если периодическая структура состоит из ограниченного числа периодов, то компонента волнового вектора, перпендикулярная границам слоев, приобретает дискретные значения. Эта особенность соответствует квантованию энергии электронов проводимости в квантовой механике твердого тела.

Конфигурация зон пропускания определяется толщинами слоев и диэлектрической и магнитной проницаемостями. Если проницаемости обладают частотной или пространственной дисперсиями или зависят от внешних полей, то появляется воз-

можность эффективного управления спектральными свойствами периодических материалов.

Теоретический анализ связан с решениями уравнений Хилла и Матье, к которым приводятся уравнения Максвелла, и работами [1] и [2]. Для периодической системы квантовых ям задача Кронига–Пенни [3] была одной из первых. В дальнейшем интересные результаты были получены в работах [4–10]. Обзор работ до середины 1980-х гг. приведен в монографии [11]. В настоящее время это направление получило значительное развитие в нанoeлектронике, теории левых сред, фотонике.

Нами будут рассмотрены зонные спектры периодических структур, образованных повторением таких слоев: диэлектрик–диэлектрик, диэлектрик–полупроводник, диэлектрик–полупроводник в магнитном поле, феррит–феррит и периодическая система двухкоординатных квантовых ям.

1. Дисперсионное соотношение. Рассмотрим простую задачу для периодической структуры диэлектрик–диэлектрик. В дальнейшем мы будем пользоваться методикой, подробно описанной в работе [11].

Направим ось Oz вдоль направления периодичности, т. е. по нормали к границам слоев. Две других оси лежат в плоскости слоев, и их расположение может быть произвольным, так как слои диэлектриков предполагаются изотропными. Это позволяет пренебречь в решении уравнений Максвелла зависимостью, например, от координаты y . В результате, как известно, электромагнитное поле разделится на два типа волн: *TH* с компонентами E_x, E_z, H_y (*E* – волны) и *TE* с компонентами E_y, H_x, H_z (*H* – волны). Реше-

ние для каждого слоя будем искать в виде плоских волн, т. е. компоненты полей предполагаются пропорциональными $\exp(-i\omega t + ik_x x + ik_z z)$. Тогда из уравнений Максвелла получим значения для нормальных компонент волновых векторов

$$k_{z1,2} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{1,2} - k_x^2}. \quad (1)$$

Здесь индексы относятся к первому и второму слоям периода; c – скорость света; $\varepsilon_{1,2}$ – диэлектрическая проницаемость слоев. В данном случае это константы, т. е. диэлектрическая проницаемость слоев не имеет дисперсии.

Выражения для полей E волн в каждом слое представим в виде

$$\begin{aligned} E_x &= A_1 \cos k_z z + A_2 \sin k_z z; \\ H_y &= \frac{\omega \varepsilon}{k_z c} \left(A_1 \sin k_z z + A_2 \cos k_z z \right) \end{aligned} \quad (2)$$

Для дальнейшего удобно произвольные постоянные A_1 и A_2 выразить через значения полей при $z=0$, тогда

$$E_x \Big|_{z=0} = E_x \Big|_{z=0} \cos k_z z + \frac{k_z c}{\omega \varepsilon} H_y \Big|_{z=0} \sin k_z z;$$

$$H_y \Big|_{z=0} = -\frac{\omega \varepsilon}{k_z c} E_x \Big|_{z=0} \sin k_z z + H_y \Big|_{z=0} \cos k_z z.$$

Из этих уравнений определим $E_x \Big|_{z=0}$ и $H_y \Big|_{z=0}$ через $E_x \Big|_{z=0}$ и $H_y \Big|_{z=0}$ и введем так называемую передаточную матрицу

$$\begin{pmatrix} E_x \Big|_{z=d} \\ H_y \Big|_{z=d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos k_z d & -\frac{k_z c}{\omega \varepsilon} \sin k_z d \\ \frac{\omega \varepsilon}{k_z c} \sin k_z d & \cos k_z d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \Big|_{z=0} \\ H_y \Big|_{z=0} \end{pmatrix} = m^E \begin{pmatrix} E_x \Big|_{z=0} \\ H_y \Big|_{z=0} \end{pmatrix}.$$

Если толщины слоев обозначить через $d_{1,2}$, а период структуры – через $d = d_1 + d_2$, то, учитывая непрерывность полей на границе между первым и вторым слоями, получим

$$\begin{pmatrix} E_x \Big|_{z=d} \\ H_y \Big|_{z=d} \end{pmatrix} = m_1^E \begin{pmatrix} E_x \Big|_{z=d_1} \\ H_y \Big|_{z=d_1} \end{pmatrix} m_2^E \begin{pmatrix} E_x \Big|_{z=0} \\ H_y \Big|_{z=0} \end{pmatrix} = m^E \begin{pmatrix} E_x \Big|_{z=0} \\ H_y \Big|_{z=0} \end{pmatrix}.$$

Здесь m^E – передаточная матрица периода, а ее компоненты равны:

$$\begin{aligned} m_{11}^E &= \cos k_{z1} d_1 \cos k_{z2} d_2 - \frac{\varepsilon_1 k_{z2}}{\varepsilon_2 k_{z1}} \sin k_{z1} d_1 \sin k_{z2} d_2; \\ m_{22}^E &= \cos k_{z1} d_1 \cos k_{z2} d_2 - \frac{\varepsilon_2 k_{z1}}{\varepsilon_1 k_{z2}} \sin k_{z1} d_1 \sin k_{z2} d_2; \\ m_{12}^E &= -\frac{i\omega \varepsilon_1}{k_{z1} c} \sin k_{z1} d_1 \cos k_{z2} d_2 - \frac{i\omega \varepsilon_2}{k_{z2} c} \cos k_{z1} d_1 \sin k_{z2} d_2; \\ m_{21}^E &= -\frac{ik_{z1} c}{\omega \varepsilon_1} \sin k_{z1} d_1 \cos k_{z2} d_2 - \frac{ik_{z2} c}{\omega \varepsilon_2} \cos k_{z1} d_1 \sin k_{z2} d_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Аналогичным образом для H волн получим

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_y \Big|_{z=d} \\ H_x \Big|_{z=d} \end{pmatrix} &= m_1^H \begin{pmatrix} E_y \Big|_{z=d_1} \\ H_x \Big|_{z=d_1} \end{pmatrix} m_2^H \begin{pmatrix} E_y \Big|_{z=0} \\ H_x \Big|_{z=0} \end{pmatrix} = m^H \begin{pmatrix} E_y \Big|_{z=0} \\ H_x \Big|_{z=0} \end{pmatrix} \\ m_{11}^H &= \cos k_{z1} d_1 \cos k_{z2} d_2 - \frac{k_{z2}}{k_{z1}} \sin k_{z1} d_1 \sin k_{z2} d_2; \\ m_{22}^H &= \cos k_{z1} d_1 \cos k_{z2} d_2 - \frac{k_{z1}}{k_{z2}} \sin k_{z1} d_1 \sin k_{z2} d_2; \\ m_{12}^H &= \frac{i\omega}{k_{z1} c} \sin k_{z1} d_1 \cos k_{z2} d_2 + \frac{i\omega}{k_{z2} c} \cos k_{z1} d_1 \sin k_{z2} d_2; \\ m_{21}^H &= \frac{ik_{z1} c}{\omega} \sin k_{z1} d_1 \cos k_{z2} d_2 + \frac{ik_{z2} c}{\omega} \cos k_{z1} d_1 \sin k_{z2} d_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Учтем периодичность структуры. Для этого запишем условия повторяемости полей через период структуры. Как известно из теоремы Флоке (или теоремы Блоха), это означает, что поля через период могут отличаться только фазами:

$$\begin{pmatrix} E_x \\ H_y \end{pmatrix} = m^E \begin{pmatrix} E_x \exp(k^E d) \\ H_y \exp(k^E d) \end{pmatrix}; \quad (5, a)$$

$$\begin{pmatrix} E_y \\ H_x \end{pmatrix} = m^H \begin{pmatrix} E_y \exp(k^H d) \\ H_x \exp(k^H d) \end{pmatrix}. \quad (5, б)$$

Здесь введены новые поперечные волновые числа $k^{E,H}$, которые описывают периодичность структуры. Эти числа в дальнейшем будем называть, по аналогии с твердотельными кристаллами, блоховскими волновыми числами. С математической точки зрения соотношения (5) позволяют “выбрать” только те волны, соотношения между амплитудами которых удовлетворяют условиям периодичности. Если же такие условия не выполняются, то распространение волн с такой частотой и волновым числом $k^{E,H}$ невозможно, т. е. возникает запрещенная зона

Соотношения (5) представляют собой две системы однородных уравнений. Приравняв определители систем нулю, получим дисперсионные соотношения для E – и H – волн:

$$\cos k^E d = \frac{m_{11}^E + m_{22}^E}{2} = \cos k_{z1} d_1 \cos k_{z2} d_2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_1 k_{z2}}{\varepsilon_2 k_{z1}} + \frac{\varepsilon_2 k_{z1}}{\varepsilon_1 k_{z2}} \right) \sin k_{z1} d_1 \sin k_{z2} d_2; \quad (6, a)$$

$$\cos k^H d = \frac{m_{11}^H + m_{22}^H}{2} = \cos k_{z1} d_1 \cos k_{z2} d_2 - \frac{1}{2} \left(\frac{k_{z1}}{k_{z2}} + \frac{k_{z2}}{k_{z1}} \right) \sin k_{z1} d_1 \sin k_{z2} d_2. \quad (6, б)$$

Из этих соотношений следует, что волновые числа $k^{E,H}$ являются новыми усредненными волновыми числами вместо $k_{z1,2}$. По аналогии с твердым телом будем называть их блоховскими компонентами волнового вектора.

Оба уравнения содержат перед произведениями синусов множитель, величина которого больше единицы, за исключением случая, когда оба слоя имеют одинаковые параметры, т. е. среда однородна. Решение для распространяющихся волн имеет место, если значение правой части соотношений (6) по модулю меньше или равно единице. Отметим, что решение представляет собой не отдельную линию, а некоторую область – сплошную зону. Эти зоны разделены областями, в которых правая часть по модулю больше единицы. Это области непропускания, так как бло-

ховское число комплексно. Таким образом, данные дисперсионные соотношения описывают многочисленные зоны пропускания и непропускания (рис. 1, зоны пропускания заштрихованы).

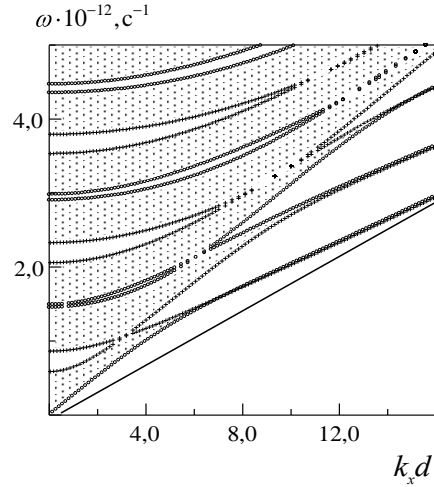


Рис. 1. Зонная структура спектра для структуры диэлектрик-диэлектрик: $d_1 = 0,03$ см, $d_2 = 0,05$ см, $\varepsilon_1 = 5$, $\varepsilon_2 = 1,5$. "+" - $k d = \pi$, "o" - $k d = 0$; прямая линия - световая линия первого диэлектрика $\omega = k_x c / \sqrt{\varepsilon_1}$; зоны пропускания затемнены

Отметим особенность рисунков для зонной структуры. В отличие от традиционного изображения зон в теории уравнений с периодическим коэффициентом мы строим зависимости $\omega = \omega(k_x d)$, а не $\omega = \omega(k^E d)$ или $\omega = \omega(k^H d)$. Так как в зоне пропускания блоховские волновые числа $k^{E,H}$ изменяются в пределах $\pi \dots \pi/d \pm 2\pi n/d, n = 1, 2, \dots$, то приведенные графики позволяют судить о характере распространения волн в плоскости xOz . В запрещенных зонах мнимая часть блоховских чисел не меняется и равна или 0, или π . В этом случае рисунки позволяют оценить глубину проникновения поля $2\pi / \text{Re } k^{E,H}$ в зависимости от значения $k_x d$ в задачах о распространении поверхностных волн вдоль границы периодического полупространства.

Рассмотрим случай распространения волн вдоль оси Oz , когда $k_x^2 \ll (\omega/c)^2 \varepsilon_{1,2}$. Тогда соотношения (6, а, б) совпадают. Это означает, что при распространении волн вдоль нормали к плоскостям слоев E и H моды имеют приблизительно одинаковые зонные структуры, которые начинаются при одних и тех же частотах.

Для определенности будем считать, что $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$. Тогда на частотах $\omega < k_x c / \sqrt{\varepsilon_2}$ k_{z2} становится мнимым, а поля во втором слое убывают по экспоненте от границ слоя. Правые части дисперсионных соотношений (6) остаются по модулю меньше единицы, поэтому распространение

волн в структуре оказывается возможным. Однако зоны пропускания сужаются. Наконец, если $k_{z1} \rightarrow 0$ и $\omega \rightarrow k_x c / \sqrt{\epsilon_1}$ (световая линия для первого слоя), то k_{z1} обращается в ноль на световой линии и становится мнимым ниже нее. Так как распространение поверхностных волн на границе двух однородных диэлектриков невозможно, то ниже световой линии нет зон пропускания. Отметим, что при больших значениях ω и k_x все зоны стремятся к этой световой линии. Этот вид зон можно назвать «диэлектрические зоны».

2. Периодическая структура полупроводник-диэлектрик. Отличительной особенностью в этом случае является частотная дисперсия диэлектрической проницаемости полупроводника. Пусть первые слои решетки будут полупроводниковыми. Тогда для диэлектрической проницаемости имеем

$$\epsilon_1 = \epsilon_0 - \frac{\omega_L^2}{\omega^2}, \quad (7)$$

где ω_L - ленгмюровская частота; ϵ_0 - диэлектрическая проницаемость решетки.

Дисперсионные уравнения в данном случае остаются такими же, как и раньше, т. е. (5) и (6). Однако на частотах $\omega < \omega_L / \sqrt{\epsilon_0}$ (частота $\omega_p = \omega_L / \sqrt{\epsilon_0}$ называется плазменной частотой) диэлектрическая проницаемость ϵ_1 отрицательна, а k_{z1} - мнимое число. В отличие от предыдущего случая на границах диэлектрика и полупроводника распространяются поверхностные плазмоны. По этой причине поля в слоях спадают от границ по экспоненте. Можно сказать, что поле просачивается через слои, а зона пропускания с ростом k_x асимптотически стремится к частоте поверхностного плазмона (рис. 2). Кроме того, имеются две зоны: одна на частотах ниже плазменной, вторая - выше. Особенность этих зон в том, что фазовая и групповая скорости волн в структуре стремятся к нулю. Разумеется, что при учете затухания минимальная скорость будет ограничена. Однако в периодической структуре часть энергии переносится в слои диэлектрика, а потери в диэлектрике могут

быть на один-два порядка меньше, чем в полупроводнике. В результате и минимальная скорость в периодической структуре ниже, чем в однородном полупроводнике на таких же частотах. Такая особенность спектра может быть интересной при создании активных полупроводниковых приборов для генерации и усиления в диапазонах коротких миллиметровых и субмиллиметровых волн.

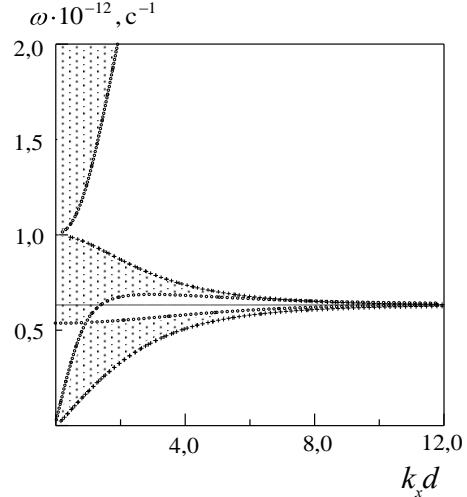


Рис. 2. Зонная структура спектра для структуры полупроводник-диэлектрик: $d_1 = 0,003$ см, $d_2 = 0,005$ см, $\epsilon_1 = 12$, $\epsilon_2 = 17$, $\omega_{p1} = 10^{12}$ с⁻¹, "+" - $\bar{k}d = \pi$, "o" - $\bar{k}d = 0$

Другая особенность верхней зоны заключается в том, что при некоторых значениях блоховского волнового числа наклон производной $\partial\omega/\partial k_x$ оказывается отрицательным. Это означает, что групповая скорость электромагнитной волны должна быть отрицательной, в результате возникает особенность в коэффициенте преломления, если волна падает на ограниченный слоистый образец [12]

Эта область спектра может быть названа «область плазменных поляритонов».

3. Зонная структура спектра в структуре диэлектрик-полупроводник в магнитном поле. Как известно, во внешнем магнитном поле диэлектрическая проницаемость полупроводника имеет тензорный характер. Если магнитное поле направлено вдоль оси Oz, то тензор имеет вид [13]

$$\epsilon_1 = \begin{pmatrix} \epsilon_{||} & 0 & \epsilon_{\perp} \\ 0 & \epsilon_{yy} & 0 \\ \epsilon_{\perp} & 0 & \epsilon_{||} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_0 \left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_H^2} \right] & 0 & -i\epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_H^2} \\ 0 & \epsilon_0 \left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right] & 0 \\ -i\epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_H^2} & 0 & \epsilon_0 \left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_H^2} \right] \end{pmatrix}, \quad (8)$$

а дисперсионное уравнение следующее:

$$\cos \bar{k}d = \cos k_{z1}d_1 \cos k_{z2}d_2 - \frac{\varepsilon_F \varepsilon_2}{2k_{z1}k_{z2}} \left(\left(\frac{k_{z1}}{\varepsilon_F} \right)^2 + \left(\frac{k_{z2}}{\varepsilon_2} \right)^2 - \left(\frac{k_x \varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_F \varepsilon_{\parallel}} \right)^2 \right) \sin k_{z1}d_1 \sin k_{z2}d_2. \quad (9)$$

Здесь $\varepsilon_F = \varepsilon_{\parallel} + \frac{\varepsilon_{\perp}^2}{\varepsilon_{\parallel}}$; $k_{z1} = \sqrt{\omega/c \varepsilon_F - k_x^2}$;

$k_{z2} = \sqrt{\omega/c \varepsilon_2 - k_x^2}$; ω_H – циклотронная частота.

Рассмотрим область, в которой волны имеют малую фазовую скорость, т. е. область электростатического приближения. Тогда $k_{z1,2} \approx ik_x$, а дисперсионное выражение принимает вид

$$\frac{\cos \bar{k}d - \text{ch } k_x (d_1 - d_2)}{\text{sh } k_x d_1 \text{ sh } k_x d_2} = \frac{\varepsilon_{\parallel} + \varepsilon_2 + i\varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel} + \varepsilon_2 - i\varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel}}{2\varepsilon_{\parallel} \varepsilon_2}. \quad (10)$$

Левая часть этого соотношения не зависит от частоты, а определяется только геометрическими параметрами. Правая же сторона зависит от частоты и приложенного магнитного поля. При больших значениях волнового числа k_x правая часть стремится к нулю. Правая часть обращается в нуль на частотах

$\omega_{01,02} = \pm \omega_H / 2 + \sqrt{\omega_H^2 / 4 + \omega_p^2}$. Следовательно, в магнитном поле появляются две асимптоты: $\omega = \omega_{01}$ и $\omega = \omega_{02}$, к которым будут стремиться зоны пропускания (рис. 3). Третья частота, так называемая гибридная частота $\omega_{\infty} = \sqrt{\omega_p^2 + \omega_H^2}$, на которой обращается в нуль знаменатель выражения (10) $\varepsilon_{\parallel} = 0$.

Характер зон в данном случае аналогичен рассмотренной ранее области поверхностных поляритонов. Однако расположение этих зон на оси частот различно. Так, при $\omega_H < \omega_p \sqrt{\varepsilon_2 / \varepsilon_0}$ одна зона расположена на частотах $\omega < \omega_{01}$, а вторая – выше ω_{02} . При $\omega_H > \omega_p \sqrt{\varepsilon_2 / \varepsilon_0}$ обе зоны располагаются ниже частот $\omega_{01,02}$. Все сказанное относится к поляризации *TM*.

4. Зоны пропускания периодической структуры феррит-феррит. Рассмотрим особенности зонного спектра структуры, образованной слоями двух различных ферритов. Свойства феррита описываются с помощью тензора магнитной проницаемости [11]. Для получения компонент тензора магнитной проницаемости необходимо воспользоваться уравнением Ландау–Лифшица:

$$\frac{d\vec{m}}{dt} + \gamma [\vec{H}_0 \vec{m} - \vec{M}_0 \vec{H}_0] = -\gamma [\vec{H}_0 \vec{H}_0 - \vec{M}_0 \vec{H}_0].$$

$\omega d / c$

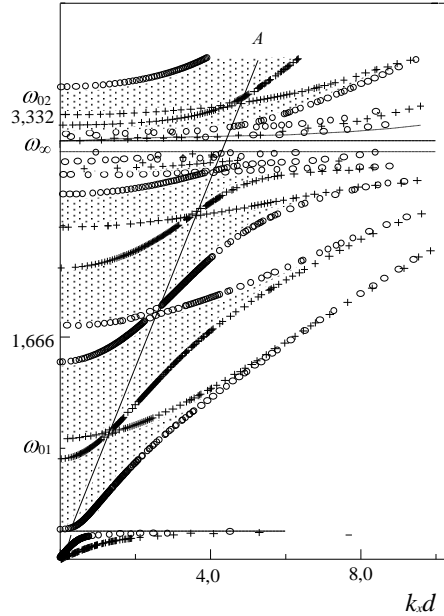


Рис. 3. Зонная структура спектра для структуры диэлектрик-полупроводник в магнитном поле: $d_1 = 0,02$ см, $d_2 = 0,005$ см, $\varepsilon_1 = 17,8$, $\varepsilon_2 = 2$, $\omega_{p1} = 10^{12}$ с⁻¹, $H_0 = 2000$ Е, "+" – $\bar{k}d = \pi$, "o" – $\bar{k}d = 0$, прямая линия *A* – световая линия для диэлектрического слоя

Здесь \vec{m} – вектор переменной намагниченности; \vec{H}_0 – постоянное магнитное поле; \vec{M}_0 – постоянная намагниченность. Предполагаем, что внешнее магнитное поле направлено вдоль оси Oy , т. е. $\vec{H}_0 = 0, H_0, 0$. Тогда для компонент переменной намагниченности получаем

$$m_x = \frac{M_0}{H_0} \frac{\omega_H^2}{\omega_H^2 - \omega^2} H_x + i \frac{M_0}{H_0} \frac{\omega \omega_H}{\omega_H^2 - \omega^2} H_z, \quad m_y = 0, \quad (11)$$

$$m_z = -i \frac{M_0}{H_0} \frac{\omega \omega_H}{\omega_H^2 - \omega^2} H_x + \frac{M_0}{H_0} \frac{\omega_H^2}{\omega_H^2 - \omega^2} H_z.$$

Отсюда следует, что переменная намагниченность не зависит от компоненты магнитного поля, направленной вдоль постоянного магнитного поля, а определяется только компонентами H_x и H_z поля волны. Поэтому в отличие от полупро-

водника в магнитном поле влияние внешнего постоянного поля следует рассматривать для TE – моды, а не TM – моды, как в полупроводнике.

Для тензора магнитной проницаемости $\hat{\mu}$ из соотношения для магнитной индукции $\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{m} = \hat{\mu}\vec{H}$ получаем

$$\hat{\mu} = \begin{pmatrix} \mu & 0 & -\mu_{\perp} \\ 0 & \mu_{\parallel} & 0 \\ \mu_{\perp} & 0 & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 4\pi \frac{M_0}{H_0} \frac{\omega_H^2}{\omega_H^2 - \omega^2} & 0 & i4\pi \frac{M_0}{H_0} \frac{\omega\omega_H}{\omega_H^2 - \omega^2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -i4\pi \frac{M_0}{H_0} \frac{\omega\omega_H}{\omega_H^2 - \omega^2} & 0 & 1 + 4\pi \frac{M_0}{H_0} \frac{\omega_H^2}{\omega_H^2 - \omega^2} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Для нахождения дисперсионного соотношения необходимо использовать методику, описанную выше. В результате имеем

$$\cos \bar{k}d = \cos k_{z1}d_1 \cos k_{z2}d_2 \frac{\mu_{F1}\mu_{F2}}{2k_{z1}k_{z2}} \left(\left(\frac{k_{z1}}{\mu_{F1}} \right)^2 + \left(\frac{k_{z2}}{\mu_{F2}} \right)^2 - k_x^2 \left(\frac{\mu_{11}}{\mu_1\mu_{F1}} - \frac{\mu_{12}}{\mu_2\mu_{F2}} \right)^2 \right) \sin k_{z1}d_1 \sin k_{z2}d_2. \quad (13)$$

Волновые числа $k_{z1,2}$ определяются из уравнений Максвелла

$$k_{z1,2} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \mu_{F1,2} - k_x^2}, \quad \mu_{F1,2} = \mu_{1,2} + \frac{\mu_{11,2}^2}{\mu_{1,2}}. \quad (14)$$

Решение уравнения (13) представлено на рис. 4. В данном случае имеется четыре асимптоты, к которым стремятся зоны пропускания. Происхождение этих асимптот различно. Так, на частоте $\omega = \omega^{02}$ обращается в нуль μ_{F1} , а при $\omega = \omega^{03}$ $\mu_{F2} = 0$. На частотах ниже указанных в одном из слоев распространяется волна, амплитуда которой убывает по экспоненте от границ слоя. В другом слое волны имеют волноводный характер. В результате вблизи характерных частот образуется значительное число относительно узких зон пропускания.

Для объяснения возникновения асимптот на частотах $\omega = \omega^{01,04}$ предположим, что $k_x^2 > \frac{\omega^2}{c^2} \mu_{F1,2}$. Тогда из (14) следует, что $k_{z1,2}^2 \approx -k_x^2$. Следовательно, в дисперсионном соотношении надо тригонометрические функции заменить на гиперболические. А так как аргументы этих функций большие величины, то $\text{ch } k_x d_{1,2} \approx \text{sh } k_x d_{1,2} \gg 1$. Возникновение зоны пропускания возможно, если выполняется соотношение

$$2 - \left[\sqrt{\frac{\mu_{F2}}{\mu_{F1}}} + \sqrt{\frac{\mu_{F1}}{\mu_{F2}}} + k_x^2 \left(\frac{\mu_{11}}{\mu_1} \sqrt{\frac{\mu_{F2}}{\mu_{F1}}} - \frac{\mu_{12}}{\mu_2} \sqrt{\frac{\mu_{F1}}{\mu_{F2}}} \right)^2 \right] = 0. \quad (15)$$

Из этого уравнения определяются частоты $\omega^{01,04}$. Зоны, которые стремятся к указанным асимптотам, обладают рядом особенностей. Они оказываются очень узкими, так как произведение гиперболических функций имеет большую величину. Волны в слоях в этом случае имеют поверхностный характер, т. е. энергия переносится вблизи границ слоев. Однако поле волн во всей структуре имеет обычный характер, так как блоховское волновое число \bar{k} действительно.

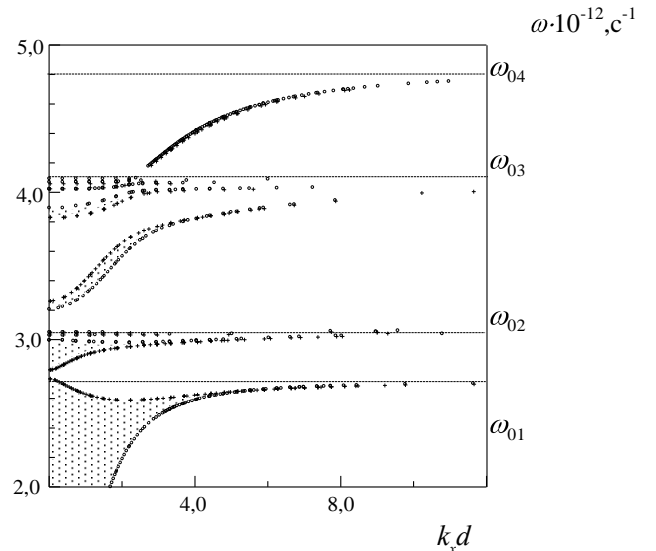


Рис. 4. Зонная структура спектра для структуры феррит-феррит: $d_1 = 0,6$ см, $d_2 = 0,45$ см, $\omega_H = 1,765 \cdot 10^{10}$ с⁻¹, "+" – $\bar{k}d = \pi$, "o" – $\bar{k}d = 0$

5. Особенности спектра периодической последовательности бесконечно тонких квантовых ям. В данном разделе будет проведено исследование периодической структуры бесконечно

тонких квантовых ям. Глубина ям предполагается достаточно большой, чтобы выполнялось условие, аналогичное задаче Кронига-Пенни [3]:

$$P = \lim_{\substack{b \rightarrow 0 \\ U_0 \rightarrow -\infty}} \frac{2m}{\hbar^2} \frac{\langle E + |U_0| \rangle}{2} d_1 d_2 = \text{const.} \quad (16)$$

Здесь d_1 - ширина ям, расстояние между которыми равно d_2 ; $U_0 < 0$ - потенциал дна ямы; E - энергия частицы. Последние две величины измеряются в электрон-вольтах. На рис. 5 представлена схема задачи. Ямы расположены вдоль направления Oz с периодом $d = d_1 + d_2$, а вдоль оси Ox частицы могут двигаться как свободные.

Уравнения Шредингера для волновых функций частиц внутри ямы имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi(x, z) + U_0 \psi(x, z) = E \psi(x, z) \quad (17, a)$$

вне ямы

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi(x, z) = E \psi(x, z) \quad (17, б)$$

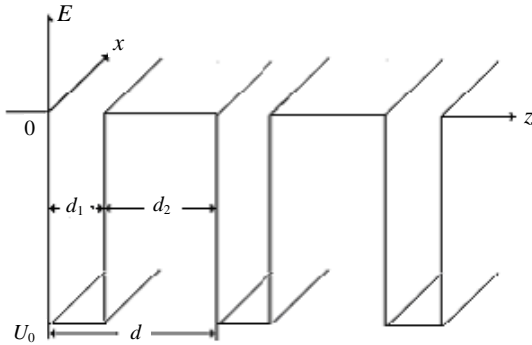


Рис. 5. Схема задачи

Решение этих уравнений будем искать в виде $\psi(x, z) \sim \exp(k_x x + ik_{z1,2} z)$. Тогда для z -компонент волнового вектора получим

$$k_{z1} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (E - U_0) - k_x^2}, k_{z2} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} E - k_x^2}, \quad (18)$$

где $k_{z1,2}$ - компоненты волнового числа в областях $0 \leq z \leq d_1$ и $d_1 \leq z \leq d$ соответственно (n - целое число). Так как $U_0 < 0$, а для уровней энергии, расположенных внутри ямы, и $E < 0$, то, учитывая соотношение энергий $|E| < |U_0|$, получим, что k_{z1} - действительная величина, если $k_x^2 - \frac{2m}{\hbar^2} E < -U_0$, т. е. внутри ямы.

Вне ямы $E > 0$ и k_{z2} - становится мнимым при тех значениях k_x , для которых $k_x^2 > \frac{2m}{\hbar^2} E$. Таким образом, при больших значениях волнового числа k_x оба значения $k_{z1,2}$ становятся мнимыми.

Предельное допустимое значение $k_x^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E$. Это соотношение определяет асимптоту в координатах (E, k_x) аналогично асимптоте для случая «диэлектрических зон». В дальнейшем рассматривается случай, когда k_{z2} - мнимое число.

Воспользуемся граничными условиями: непрерывностью волновых функций и их производных для получения передаточной матрицы периода структуры. Отметим, что эта матрица имеет такой же вид, как матрица для H - волн диэлектрической структуры (см. (4)). Теперь можно сразу записать дисперсионное соотношение

$$\cos \bar{k}d = \cos k_{z1}d_1 \operatorname{ch} |k_{z2}|d_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{k_{z2}}{k_{z1}} - \frac{k_{z1}}{k_{z2}} \right) \sin k_{z1}d_1 \operatorname{sh} |k_{z2}|d_2. \quad (19)$$

По своему характеру дисперсионные зоны будут похожи на зоны для E - моды. Но, разумеется, их физический смысл совершенно иной. Поскольку область локализации волновой функции превосходит ширину ямы, то перекрытие волновых функций для носителей из соседних ям будет существенно зависеть от соотношения между глубиной проникновения в барьер и шириной барьера, т. е. от величины $|k_{z2}|d_2$.

Если $|k_{z2}|d_2 \geq 1$, то можно считать, что $\operatorname{ch} |k_{z2}|d_2 \approx \operatorname{sh} |k_{z2}|d_2 \approx \exp |k_{z2}|d_2$. Тогда дисперсионное уравнение (19) принимает вид

$$\exp \left(|k_{z2}|d \right) \cos \bar{k}d = \cos k_{z1}d_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{|k_{z2}|}{k_{z1}} - \frac{k_{z1}}{|k_{z2}|} \right) \sin k_{z1}d_1 \approx 0. \quad (20)$$

Будем предполагать, что глубина проникновения волновых функций в барьер между ямами относительно мала и второе слагаемое в скобке больше первого

$$|k_{z2}| \approx 2k_{z1} \operatorname{tg} k_{z1}d_1, \quad (21, a)$$

если и ширина барьера мала, то из (20) имеем

$$|k_{z2}| \approx 2k_{z1}^2 d_1. \quad (21, б)$$

Для дальнейшего удобно формулы (18) записать следующим образом: $k_{z1}^2 = \frac{2m}{\hbar^2} |U_0| - |k_{z2}|^2$. Далее предположим, что $\frac{2m}{\hbar^2} |U_0| \gg |k_{z2}|$ и,

следовательно, $k_{z1}^2 \approx \langle m/\hbar^2 | \bar{U}_0 | \rangle$. С помощью соотношений (21) и используя приведенные приближения, получим

$$|k_{z1}|d_1/2 \gg 1. \quad (21, в)$$

Это соотношение означает, что область локализации поверхностных электронов превосходит ширину ямы d_1 . Отсюда следует, что при наличии соседних барьеров волновые функции будут перекрываться и возникнут электронные волны, бегущие под углом к оси Oz .

Таким образом, в рассматриваемой периодической структуре вдоль каждой ямы, т. е. вдоль области локализации носителей заряда, волны распространяются по оси Ox , причем в направлении поперек ямы (область $0 \dots d_1$) плотность носителей имеет осциллирующий характер, а их свойства определяются двумерным электронным газом. Это связано с тем, как указывалось ранее, что для на-

правления вдоль оси Ox волновая функция имеет вид как для свободной частицы. В направлении же Oz в областях слоев d_2 волны имеют поверхностный характер. Интересно отметить, что наличие блоховского волнового числа \bar{k} приводит к возникновению нового типа волн. Они распространяются под углом α к оси Oz и $\text{tg}\alpha = k_x/\bar{k}$. Если рассматривать уравнение (19) как условие усреднения волновых чисел $k_{z1,2}$ и замены их одним волновым числом \bar{k} , то распространение волн в такой структуре можно описывать только волновыми числами k_x и \bar{k} . Физические же свойства таких волн будут определяться двумерным электронным газом.

Дальнейшее исследование уравнения (19) удобно провести численным путем. На рис. 6 представлено численное решение уравнения (19).

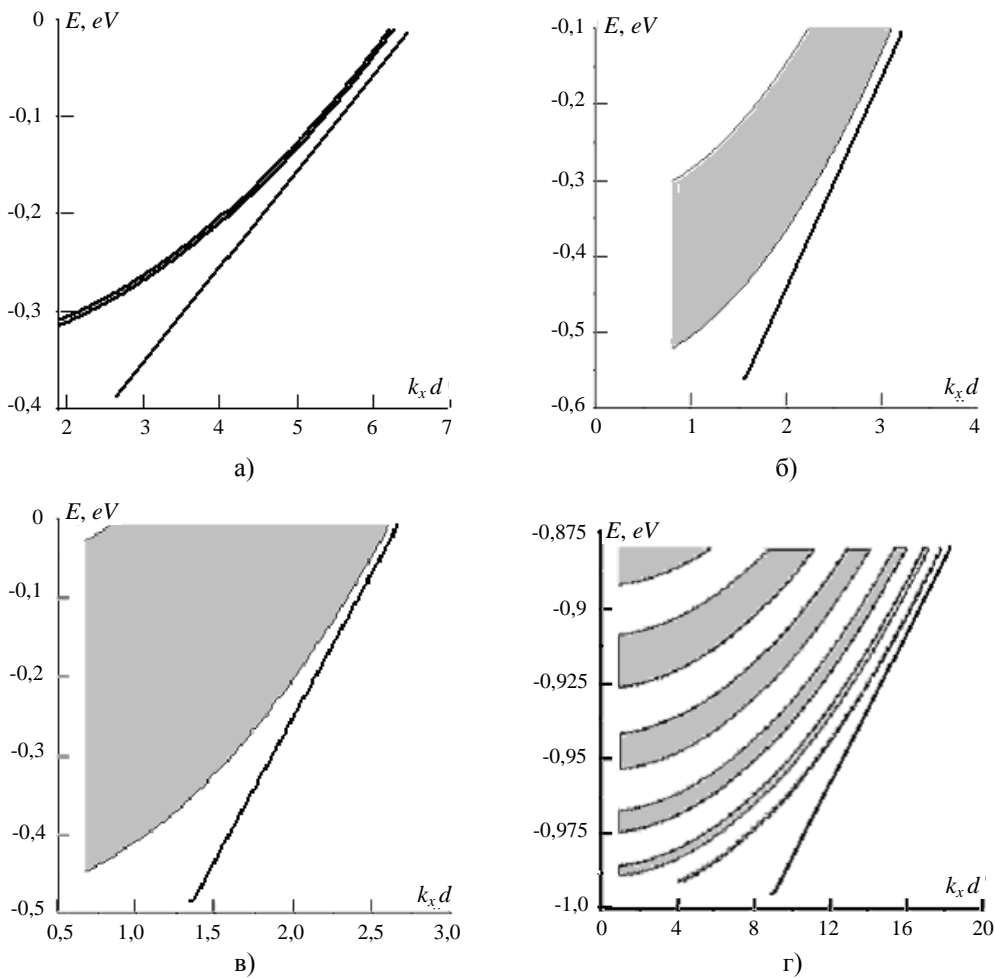


Рис. 6. Картина зон в периодической системе квантовых ям: прямая линия – асимптота $E = \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m}$

При решении предполагалось, что глубина ям равна $U_0 = -1eV = -1,6 \cdot 10^{-12}$ эрг. Зоны пропускания отмечены серым цветом. Нижний край каждой зоны соответствует значению $\bar{k}d = 2m\pi$, верхний - $\bar{k}d = \pi(2n+1)$ (см. рис. 6, г). Первая запрещенная зона ограничена линиями $\bar{k}d = \pi$ (π – зона), во второй запрещенной зоне – $\bar{k}d = 0$ (0 – зона).

На рис. 6, г относительное расстояние между ямами мало и равно $d_2/d = 0,01$, а $P \approx 3\pi/2$ (см. (16)). В результате имеем набор зон разрешенной энергии, ширина которых увеличивается с ростом E . Этот результат соответствует задаче Кронига–Пенни.

Если условие малости отношения d_2/d не выполняется, то картина меняется. На рис. 6, а отношение $d_2/d \cong 0,86$, имеется только одна зона разрешенных энергий, а ее ширина мала. На рис. 6, б $d_2/d \cong 0,55$ зона расширяется при малых значениях $k_x d$, но сужается вблизи линии асимптоты. Наконец, при $d_2/d \cong 0,4$ (рис. 6, в) зона становится широкой и почти не меняет ширины до верхнего края ямы.

Выводы. Таким образом, построена теория зонной структуры электромагнитных волн, распространяющихся в одномерной системе периодически повторяющихся слоев двух различных материалов: диэлектриков, полупроводников и ферритов. Рассмотрены следующие варианты структур: диэлектрик–диэлектрик, диэлектрик–полупроводник, диэлектрик–полупроводник в магнитном поле, феррит–феррит в насыщающем магнитном поле и периодически повторяющиеся тонкие квантовые ямы. Дисперсионные уравнения во всех приведенных задачах имеют общие черты. Это позволяет сравнить структуры с физической точки зрения.

Приведенные результаты показывают, что такие материалы могут быть использованы в различных диапазонах длин волн от сантиметров до нанометров как передающие системы, фильтры, покрытия зеркал, преобразователи поляризации и т. п. Одним из существенных свойств является возможность управления зонной структурой, а, следовательно, и физическими свойствами с помощью внешнего магнитного поля.

Характерной чертой материала диэлектрик–диэлектрик является наличие специфического спектра зон пропускания – диэлектрического спектра. Его особенность в том, что при больших значениях волнового числа (т. е. при малых длинах волн) фазовая скорость определяется

слоями с наибольшей проницаемостью, независимо от соотношения толщин слоев. Физическая причина этого явления связана с тем, что в слоях с меньшей проницаемостью распределение амплитуды электромагнитного поля волны имеет поверхностный характер.

В структуре полупроводник – диэлектрик наиболее интересной является область в районе плазменной частоты полупроводника. Частотная дисперсия позволяет “управлять” свойствами волн, меняя частоту. В этой области появляется две зоны пропускания: одна – “акустическая” – начинается при малых частотах и асимптотически стремится к плазменной частоте; вторая – “оптическая” – имеет спектр, лежащий выше плазменной частоты и также асимптотически стремящийся к этой частоте. Кроме того, оптические ветви имеют отрицательную групповую скорость. Это должно привести к интересным свойствам при отражении и прохождении волн [12].

При наличии внешнего магнитного поля полупроводник является двусосным материалом. Нами рассмотрен случай, когда направление магнитного поля перпендикулярно плоскости распространения волн. В этом случае дисперсионное соотношение имеет вид, аналогичный предыдущим двум задачам. Однако зависимость от магнитного поля и наличие анизотропии приводят к возникновению двух асимптот. Эти асимптоты связаны с тем, что на коротких волнах и частотах вблизи гибридной частоты фазовая скорость волны оказывается малой, т. е. имеет место случай статики. Если бы отсутствовала диссипация, то волна остановилась бы. В данном случае имеется возможность управления скоростью волны с помощью двух частот: плазменной и циклотронной, так как именно они определяют гибридную частоту.

Была рассмотрена также структура, состоящая из слоев двух ферритов. В этом случае, в отличие от предыдущих, интересные свойства оказываются у волн E - поляризации. Теперь уже имеется четыре асимптоты, и таким образом, расширяются возможности управления спектром волн.

В последнем разделе рассмотрена периодическая система квантовых ям, разделенных барьерами. Предполагается, что ямы достаточно глубокие и узкие. Тогда волновая функция в области барьера имеет поверхностный характер, а в области ямы – осциллирующий. Вдоль ямы носители могут распространяться как свободные частицы. Таким образом, носители заряда в яме образуют двумерный газ. В работе показано, что при определенных условиях область локализации надбарьерных электронов больше ширины ямы. Вследствие этого квантовые состояния в различных ямах оказываются связанными и возникают электронные волны, бегущие под углом к краям

ям. Угол определяется волновым числом для направления вдоль ямы и блоховским волновым числом поперек ям.

В заключение следует отметить относительную простоту технологии получения рассмотренных материалов, для сантиметровых, миллиметровых и субмиллиметровых волн – это просто наборы пленок или пластинок, для других диапазонов – напыление и выращивание тонких пленок.

1. Ляпунов А. М. Собрание сочинений. - Изд. АН СССР, 1956. - Т.2. - 474 с.
2. Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. - М.: Наука, 1972. - 720 с.
3. Kronig R. de L., Penney W. G. Quantum mechanics of electrons in crystals // Proc.Roy.Soc. - 1931. - A130. - P. 499-513.
4. Левин М. Л. Распространение плоской электромагнитной волны в периодической слоистой структуре // Журн. техн. физики. - 1948. - 18, № 11. - С. 1399-1404.
5. Лифшиц И. М., Розенцвейг Л. Н. Динамика кристаллической решетки, заполняющей полупространство // Журн. техн. физики. - 1948. - 18, № 11. - С. 1012-1021.
6. Файнберг Я. Б., Хижняк Н. А. Искусственно анизотропные среды // Журн. техн. физики. - 1955. - 25, № 4. - С. 711-719.
7. Файнберг Я. Б., Хижняк Н. А. Потери энергии заряженной частицы при прохождении через слоистый диэлектрик // ЖЭТФ.-1957.- 32, № 4. - С. 883-895.
8. Файнберг Я. Б., Блюх П. В. О волнах плотности заряда в электронных пучках с переменной скоростью // Журн. техн. физики.-1956.- 26, № 3. - С. 530-535.
9. Лифшиц И. М., Пикар С. И. Таммовские связанные состояния электронов на поверхности кристалла и поверхностные колебания атомов решетки // Успехи физ. науки.- 1955.- 56, № 4. - С. 531-568.
10. Рытов С. М. Электромагнитные свойства мелкослоистой среды // Журн. эксперим. и теорет. физики. - 1955. - 29, № 5. - С. 605-611.
11. Басс Ф. Г., Булгаков А. А., Тетервов А. П. Высокочастотные свойства полупроводников со сверхрешетками. - М.: Наука, 1989. - 288 с.
12. Пафомов В. Е. К теории излучения Вавилова-Черенкова в анизотропных средах и при наличии границ // Труды ФИАН. - 1961. - 16. - С. 94-139.
13. Ахиезер А. И., Ахиезер И. А., Половин Р. В. и др. Электродинамика плазмы. - М.: Наука, 1974. - 720 с.

COMPARATIVE CHARACTERISTIC OF BAND SPECTRUMS OF PERIODIC STRUCTURES, FORMED BY THE LAYERS OF DIFFERENT MATERIALS IN EXTERNAL MAGNETIC FIELD

A. A. Bulgakov, S. I. Khankina, O. V. Shramkova, V. M. Yakovenko

The comparative analysis of one-dimensional periodic structures formed by two recurring layers: dielectric-dielectric, dielectric-semiconductor, dielectric-semiconductor in a magnetic field, ferrite-ferrite and consecution of quantum wells is realized. For all cases the analytical and numerical investigation of physical peculiarities of enumerated structures is realized. It was shown that investigated peculiarities can be used in practice for the wide spectrum of frequencies from the units of GHz to hundreds of terahertz (from centimeter to X-ray wave length range).

Key words: periodic structure, transfer matrix, dispersion relation, *TE*- and *TM*-waves, allowed and forbidden bands.

ПОРІВНЯЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА ЗОННИХ СПЕКТРІВ ПЕРІОДИЧНИХ СТРУКТУР, УТВОРЕНИХ ШАРАМИ РІЗНИХ МАТЕРІАЛІВ У ЗОВНІШНЬОМУ МАГНІТНОМУ ПОЛІ

О. О. Булгаков, С. І. Ханкіна, О. В. Шрамкова, В. М. Яковенко

Проведено порівняльний аналіз одновимірних періодичних структур, що створені двома повторними шарами: діелектрик-діелектрик, діелектрик-напівпровідник, діелектрик-напівпровідник у магнітному полі, ферит-ферит та повторна послідовність квантових ям. У всіх випадках аналітично та чисельно проведено дослідження фізичних особливостей перелічених структур. Показано, що досліджені властивості можуть бути застосовані на практиці для широкого спектру частот від одиниць гігагерц до сотень терагерц (від сантиметрового до рентгенівського діапазонів довжин хвиль).

Ключові слова: періодична структура, передатна матриця, дисперсійне співвідношення, *TE*- та *TM*-хвилі, дозволена та заборонена зони.

Рукопись поступила 15 апреля 2008 г.