

ОБ АКСИАЛЬНОМ ИНДЕКСЕ СОБСТВЕННЫХ МОД КВАЗИОПТИЧЕСКИХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ РЕЗОНАТОРОВ С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

И. А. Шипилова

*Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины,
12, ул. Ак. Проскуры, Харьков, 61085, Украина
E-mail: shipilova@ire.kharkov.ua*

Проведены численные исследования цилиндрического и радиально двухслойного цилиндрических диэлектрических резонаторов с аксиально неоднородными колебаниями. Получены значения частот и добротностей резонаторов с модами, отличающимися аксиальными индексами. Показано, что в резонаторах существуют моды, при которых величина добротности резонатора достигает максимального значения. Проанализирована связь между значениями аксиальных и азимутальных индексов собственных мод резонаторов, обладающих максимальной добротностью. Ил. 8. Табл. 1. Библиогр.: 10 назв.

Ключевые слова: цилиндрические диэлектрические резонаторы, радиально двухслойные резонаторы, собственные моды резонатора.

Квазиоптические диэлектрические резонаторы с цилиндрическими поверхностями используют при создании различной радиоэлектронной аппаратуры и проведении исследований фундаментальных явлений радиофизики. В работах [1-3] представлены экспериментальные исследования таких резонаторов. При проведении эксперимента возникает проблема определения аксиальных индексов собственных мод резонаторов. Для обоснования практического применения резонаторов и анализа результатов эксперимента необходимо провести их теоретическое исследование.

В работах [4-6] проведен строгий электродинамический анализ цилиндрического диэлектрического резонатора (ЦДР) с идеально проводящими поверхностями (рис. 1,а). Собственные частоты $\omega_p = \omega'_p - i\omega''_p$ резонатора определяются решениями характеристического уравнения $f(\omega_p, k_z) = 0$, в котором $k_z = \pi l / L$ – аксиальная компонента волнового числа, где L – высота резонатора; l – модовый аксиальный индекс. Аксиальные индексы l собственных мод ЦДР, ограниченного идеально проводящими торцевыми поверхностями, принимают только целые значения $l = 0, 1, 2, \dots$

Строгий электродинамический анализ ЦДР без идеально проводящих торцевых поверхностей (рис. 1,б) до сих пор не проведен. В работе [7] предложен приближенный метод анализа такого резонатора. Характеристическое уравнение ЦДР без проводящих поверхностей $f(\omega, k_z) = 0$, в котором $\omega = \omega' - i\omega''$ – собственная частота ЦДР, имеет тот же вид, что и уравнение $f(\omega_p, k_z) = 0$. Расчет частот ω проведен с учетом дополнительного приближенного условия для k_z . В работе [8] представлено решение характеристического уравнения $f(\omega, k_z) = 0$ отно-

сительно k_z ЦДР с идентифицированными типами колебаний. Для этого собственные частоты ω были определены экспериментально. Было показано, что модовые аксиальные индексы принимают нецелые значения δ ($k_z = \pi\delta / L$). Это обусловлено тем, что за пределами торцевых стенок ЦДР, не ограниченного проводящими плоскостями, также существует электромагнитное поле.

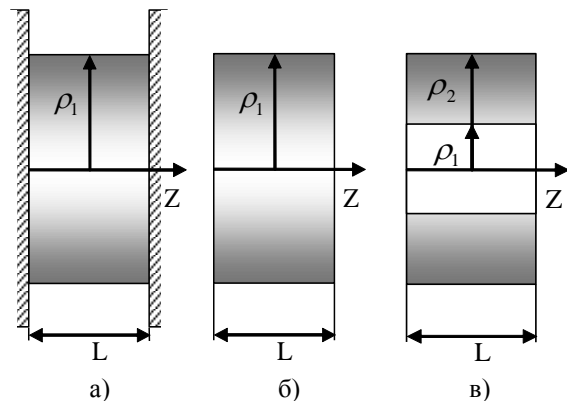


Рис. 1. Резонаторы с цилиндрическими поверхностями: а) - ЦДР с проводящими торцевыми поверхностями; б) - ЦДР; в) - радиально двухслойный ЦДР

Таким образом, теоретический анализ ЦДР (рис. 1,б) можно провести, используя теорию собственных колебаний ЦДР, ограниченного на торцах идеально проводящими плоскостями (рис. 1,а), и предполагая, что его моды обладают нецелочисленными аксиальными индексами. Аналогичный подход может быть использован для анализа собственных характеристик радиально двухслойного ЦДР (рис. 1,в).

С этой целью нами проведено определение собственных частот и добротностей ЦДР и радиально двухслойного ЦДР с различными собственными модами и исследование распределения полей в таких резонаторах.

Результаты исследований. Автором рассмотрены ЦДР и радиально двухслойный ЦДР с модами $HE_{nm\delta}$ и $EH_{nm\delta}$ где n, m, δ – азимутальный, радиальный и аксиальный индексы соответственно. Радиусы ЦДР ρ_1 и радиально двухслойного ЦДР ρ_2 равны 0,725 см. Радиус внутреннего слоя радиально двухслойного ЦДР $\rho_1 = 0,55$ см, внутренний слой заполнен воздухом. Высоты резонаторов $L = 1$ см. ЦДР и внешний слой радиально двухслойного ЦДР изготовлены из материала, диэлектрическая проницаемость которого в направлениях, параллельном и перпендикулярном оси анизотропии, характеризуется соответствующими компонентами тензора диэлектрической проницаемости: $\varepsilon_{||} = \varepsilon'_{||}(1 + itg\delta)$, $\varepsilon_{\perp} = \varepsilon'_{\perp}(1 + itg\delta)$. Здесь ε'_{\perp} , $\varepsilon'_{||}$ – действительные части диэлектрических проницаемостей в соответствующих направлениях, $tg\delta$ – тангенс угла диэлектрических потерь материала. Оси анизотропии материала направлены вдоль продольных осей резонаторов.

Численные исследования резонаторов проведены на основании теоретических данных [9, 10]. Характеристическое уравнение радиально двухслойного резонатора с идеально проводящими торцевыми плоскостями имеет вид

$$\psi_1^E \psi_1^H = \psi_2^E \psi_2^H, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \psi_1^j &= \chi_2 \chi_1 (\xi_{\alpha}^j - \xi_{\beta}^j) Z_j^j Z_N^j + \\ &+ \delta_{\beta}^j (\xi_{\alpha}^j \xi_{\beta}^j - \chi_1^2) Z_j^j Z_N^j + \\ &+ \delta_{\alpha}^j (\chi_1^2 - \xi_{\beta}^j \xi_{\beta}^j) Z_N^j Z_N^j; \\ \psi_2^j &= \chi_1 \delta_{\beta}^j (\xi_{\alpha}^j - \xi_{\beta}^j) Z_j^j Z_N^j + \\ &+ \chi_2 (\xi_{\alpha}^j \xi_{\beta}^j - \chi_1^2) Z_j^j Z_N^j + \\ &+ \chi_2 (\chi_1^2 - \xi_{\beta}^j \xi_{\beta}^j) Z_N^j Z_N^j; \end{aligned}$$

j и \bar{j} обозначают H и E или E и H соответственно; $\varsigma_v = \varepsilon_{||v}$ для $j = E$ и $\varsigma_v = \mu_v$ для $j = H$; $\chi_v = mk_z / (k_p \rho_v^2) (1/q_{Hv}^2 - 1/q_{Hv+1}^2)$; v – номер слоя резонатора, отсчитываемый от его центра ($v=1,2$), или окружающая среда ($v=3$);

$$\begin{aligned} q_{Hv} &= \sqrt{\varepsilon_{\perp v} \mu_v k_p^2 - k_z^2}; & q_{Ev} &= \sqrt{\varepsilon_{||v} / \varepsilon_{\perp v} q_{Hv}}; \\ \xi_{\beta}^j &= \varsigma_2 \beta_{21}^j - \varsigma_1 \alpha_{11}^j; & \xi_{\alpha}^j &= \varsigma_2 \alpha_{21}^j - \varsigma_1 \alpha_{11}^j; \\ \delta_{\alpha}^j &= \varsigma_2 \alpha_{22}^j - \varsigma_3 \alpha_{03}^j; & \delta_{\beta}^j &= \varsigma_2 \beta_{22}^j - \varsigma_3 \alpha_{03}^j; \\ x_{jv\tilde{v}} &= q_{jv} \rho_{j\tilde{v}}; & \alpha_{j\tilde{v}}^j &= \frac{J_n'(x_{jv\tilde{v}})}{x_{jv\tilde{v}} J_n(x_{jv\tilde{v}})}; \end{aligned}$$

$$\beta_{v\tilde{v}}^j = \frac{N_n'(x_{jv\tilde{v}})}{x_{jv\tilde{v}} N_n(x_{jv\tilde{v}})}; \quad \alpha_{03}^j = \frac{H_n^{(1)'}(x_{j32})}{x_{j32} H_n^{(1)}(x_{j32})};$$

$$Z_R^j = \frac{R_n(x_{j21})}{R_n(x_{j22})}. \text{ Здесь } R_n(u) \text{ обозначает одну из}$$

цилиндрических функций $J_n(u)$, $H_n^{(1)}(u)$, или $N_n(u)$.

Аксиальные компоненты электромагнитного поля радиально двухслойного ЦДР определяются выражениями

$$\begin{aligned} E_{zv} &= G_v^E(\rho) \cos(k_z z) \exp i(n\varphi - \omega_p t), \\ H_{zv} &= G_v^H(\rho) \sin(k_z z) \exp i(n\varphi - \omega_p t). \end{aligned} \quad (2)$$

Функции

$$G_v^j(\rho) = \begin{cases} A_1^j J_n(q_{j1}\rho) & \rho \leq \rho_1, \\ A_2^j J_n(q_{j2}\rho) + B_2^j N_n(q_{j2}\rho) & \rho_1 < \rho \leq \rho_2, \\ A_3^j H_n^{(1)}(q_{j3}\rho) & \rho > \rho_2 \end{cases}$$

описывают распределение поля в v -м слое резонатора и окружающей среде по радиальной координате ρ . Постоянные A_v^j и B_v^j связаны между собой граничными условиями на цилиндрических поверхностях $\rho = \rho_v$ и могут быть выражены через одну из них. Неопределённая константа может быть найдена из условия нормировки (или определена условием возбуждения электромагнитных колебаний в квазиоптическом диэлектрическом резонаторе).

Характеристическое уравнение ЦДР с идеально проводящими торцевыми поверхностями является частным случаем уравнения (1) ($\varepsilon_{||2} = \varepsilon_{||1}$, $\varepsilon_{\perp 2} = \varepsilon_{\perp 1}$, $\mu_2 = \mu_1$, $\rho_2 = \rho_1$) и имеет вид

$$\delta_{\alpha}^E \delta_{\alpha}^H = \chi_2^2,$$

где

$$\begin{aligned} \chi_2 &= mk_z / [k_p \rho_1^2 (1/q_{H1}^2 - 1/q_{H2}^2)]; \\ \delta_{\alpha}^j &= \varsigma_1 \alpha_{11}^j - \varsigma_2 \alpha_{02}^j; \\ \alpha_{02}^j &= H_n^{(1)'}(x_{j21}) / [x_{j21} H_n^{(1)}(x_{j21})]. \end{aligned}$$

Аксиальные компоненты такого ЦДР определяются выражениями (2), в которых

$$G_v^j(\rho) = \begin{cases} A_1^j J_n(q_{j1}\rho) & \rho \leq \rho_1, \\ A_2^j H_n^{(1)}(q_{j2}\rho) & \rho > \rho_1. \end{cases}$$

Азимутальные и радиальные компоненты ЦДР и радиально двухслойного ЦДР выражаются через аксиальные следующим образом:

$$q_{H_v}^2 E_{\varphi v} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial z} E_{z v} - ik_p \mu_v \frac{\partial}{\partial \rho} H_{z v};$$

$$q_{H_v}^2 H_{\varphi v} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial z} H_{z v} + ik_p \varepsilon_{\perp v} \frac{\partial}{\partial \rho} E_{z v};$$

$$q_{H_v}^2 E_{\rho v} = \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial}{\partial z} E_{z v} + \frac{ik_p \mu_v}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} H_{z v};$$

$$q_{H_v}^2 H_{\rho v} = \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial}{\partial z} H_{z v} - \frac{ik_p \varepsilon_{\perp v}}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} E_{z v}.$$

На рис. 2 представлены собственные частоты и добротности ЦДР с аксиально однородными колебаниями TM_{n10} , отличающимися величинами азимутальных индексов. Резонатор изготовлен из лейкосапфира ($\varepsilon_{\parallel} = 11,59(1 + 2,5 \times 10^{-5}i)$, $\varepsilon_{\perp} = 9,4(1 + 2,5 \times 10^{-5}i)$).

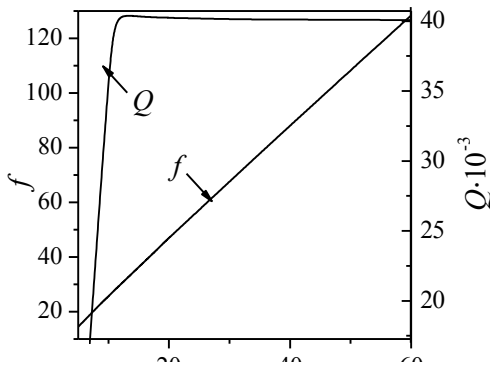


Рис. 2. Частоты f и добротности Q ЦДР, изготовленного из лейкосапфира, с TM_{n10}

Собственная частота резонатора с TM_{n10} модами изменяется по линейному закону относительно азимутального индекса. При изменении величины азимутального индекса на 1 частота изменяется примерно на 2,2 ГГц. При увеличении азимутального индекса до $n=11$ добротность резонатора увеличивается. При $n=11$ величина добротности максимальна ($Q_{\max} = 4,038 \times 10^4$). При дальнейшем увеличении n добротность незначительно уменьшается и выходит на уровень $\sim 1/\text{tg} \delta_1$.

Частоты и добротности ЦДР и радиально двухслойного ЦДР с модами $HE_{111\delta}$ представлены на рис. 3 и 4, а с модами $EH_{111\delta}$ – на рис. 5 и 6 соответственно. Различными числами отмечены кривые, соответствующие характеристикам ЦДР (сплошные линии), изготовленного из материалов с различными значениями ε'_{\parallel} и ε'_{\perp} , или радиально

двухслойного ЦДР (пунктирные линии), внешний слой которого изготовлен из этих же материалов.

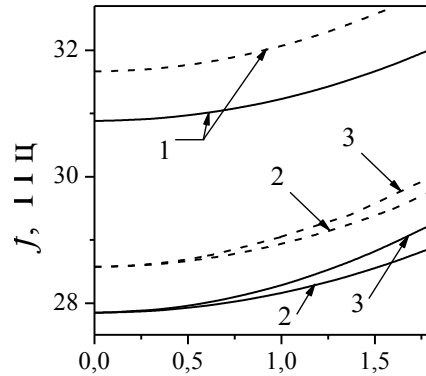


Рис. 3. Частоты резонаторов с $HE_{111\delta}$ колебаниями: 1 - $\varepsilon_{\parallel} = \varepsilon_{\perp} = 9,4(1 + 2,5 \times 10^{-5}i)$; 2 - $\varepsilon_{\parallel} = \varepsilon_{\perp} = 11,59(1 + 2,5 \times 10^{-5}i)$; 3 - $\varepsilon_{\parallel} = 11,59(1 + 2,5 \times 10^{-5}i)$, $\varepsilon_{\perp} = 9,4(1 + 2,5 \times 10^{-5}i)$

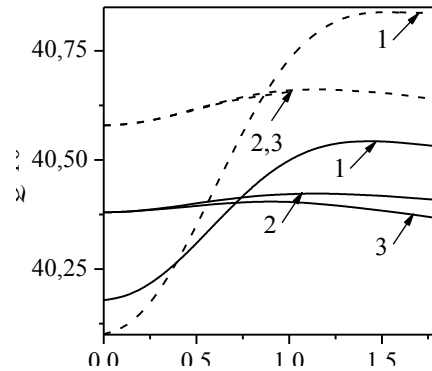


Рис. 4. Добротности резонаторов с $HE_{111\delta}$ колебаниями: 1 - $\varepsilon_{\parallel} = \varepsilon_{\perp} = 9,4(1 + 2,5 \times 10^{-5}i)$; 2 - $\varepsilon_{\parallel} = \varepsilon_{\perp} = 11,59(1 + 2,5 \times 10^{-5}i)$; 3 - $\varepsilon_{\parallel} = 11,59(1 + 2,5 \times 10^{-5}i)$, $\varepsilon_{\perp} = 9,4(1 + 2,5 \times 10^{-5}i)$

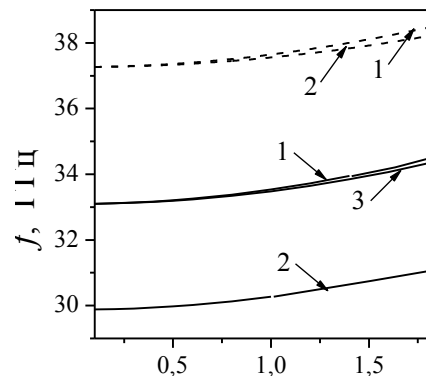


Рис. 5. Частоты резонаторов с $EH_{111\delta}$ колебаниями: 1 - $\varepsilon_{\parallel} = \varepsilon_{\perp} = 9,4(1 + 2,5 \times 10^{-5}i)$; 2 - $\varepsilon_{\parallel} = \varepsilon_{\perp} = 11,59(1 + 2,5 \times 10^{-5}i)$; 3 - $\varepsilon_{\parallel} = 11,59(1 + 2,5 \times 10^{-5}i)$, $\varepsilon_{\perp} = 9,4(1 + 2,5 \times 10^{-5}i)$

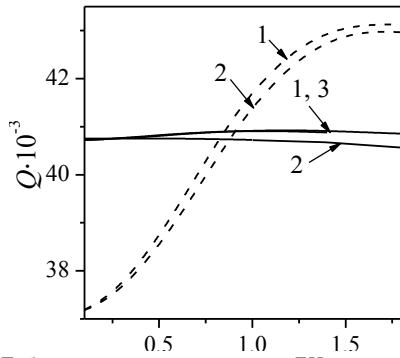


Рис. 6. Добротности резонаторов с $EH_{111\delta}$ колебаниями:
 1 - $\epsilon_{\parallel} = \epsilon_{\perp} = 9,4(1 + 2,5 \times 10^{-5}i)$; 2 - $\epsilon_{\parallel} = \epsilon_{\perp} = 11,59(1 + 2,5 \times 10^{-5}i)$;
 3 - $\epsilon_{\parallel} = 11,59(1 + 2,5 \times 10^{-5}i)$, $\epsilon_{\perp} = 9,4(1 + 2,5 \times 10^{-5}i)$

Частоты резонаторов с EH колебаниями выше, чем резонаторов с HE колебаниями. При увеличении аксиального индекса частоты резонаторов увеличиваются.

Из рис. 4 и 6 видно, что добротности резонаторов имеют максимальные значения при определенных величинах аксиальных и азимутальных индексов их собственных мод. Для различных резонаторов максимумы добротностей достигаются при модах с различными значениями аксиальных индексов

На рис. 7 представлено распределение нормированных величин плотности энергии и аксиальных компонент полей колебаний HE_{1111} и EH_{1112} в ЦДР, изготовленном из лейкосапфира.

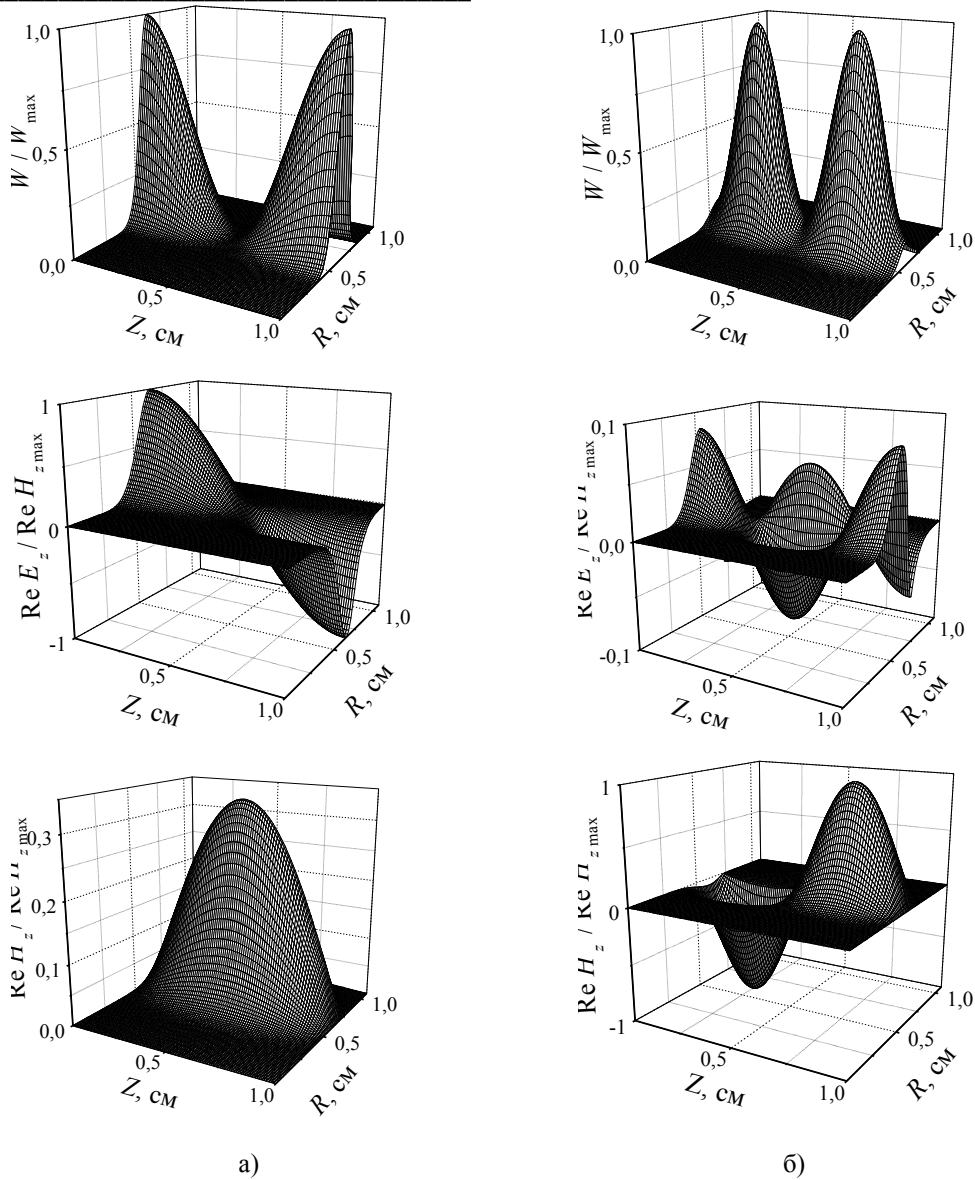


Рис. 7. Распределение нормированной плотности электромагнитной энергии W и аксиальных компонент E_z и H_z HE_{1111} и EH_{1112} колебаний ЦДР, изготовленного из лейкосапфира, с колебаниями: а) - HE_{1111} ; б) - EH_{1112}

Для резонаторов с модами, отличающимися азимутальными индексами n , величины аксиальных индексов, соответствующих максимуму добротности, также различны. На рис. 8 представлена связь аксиальных индексов δ_{\max} , соответствующих модам, при которых резонаторы обладают максимальными добротностями Q_{\max} , и азимутальных индексов $HE_{nm\delta}$ колебаний для ЦДР, изготовленных из веществ с различными диэлектрическими проницаемостями.

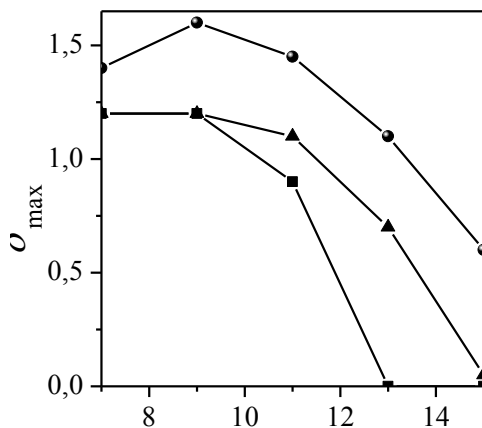


Рис. 8. Связь величины аксиального индекса моды, при которой резонатор имеет максимум добротности, и азимутального индекса для ЦДР, изготовленных из материалов:

- $\epsilon_{||} = \epsilon_{\perp} = 9,4(1 + 2,5 \times 10^{-5}i)$;
- ▲— $\epsilon_{||} = \epsilon_{\perp} = 11,59(1 + 2,5 \times 10^{-5}i)$;
- $\epsilon_{||} = 11,59(1 + 2,5 \times 10^{-5}i), \epsilon_{\perp} = 9,4(1 + 2,5 \times 10^{-5}i)$

Максимальные добротности ЦДР приведены в таблице.

Максимальная добротность резонаторов

$\epsilon_{ }$	ϵ_{\perp}	Мода	Q_{\max}
$9,4(1 + 2,5 \times 10^{-5}i)$	$9,4(1 + 2,5 \times 10^{-5}i)$	$HE_{711,4}$	40920
$11,59(1 + 2,5 \times 10^{-5}i)$	$11,59(1 + 2,5 \times 10^{-5}i)$	$HE_{711,2}$	40720
$11,59(1 + 2,5 \times 10^{-5}i)$	$9,4(1 + 2,5 \times 10^{-5}i)$	$HE_{711,2}$	40650

Выводы. Таким образом, в данной работе рассмотрена физическая модель ЦДР и радиально двухслойного ЦДР с собственными колебаниями, обладающими нецелочисленными аксиальными индексами. Численно исследованы ЦДР и радиально двухслойный ЦДР с аксиально неоднородными колебаниями, изготовленные из лейкосапфира или из некоторого гипотетического материала с диэлектрической проницаемостью, соответствующей одной из компонент тензора, который характеризует диэлектрическую проницаемость лейкосапфира. Приведены значения

частот и добротностей ЦДР, изготовленного из лейкосапфира, с модами, отличающимися азимутальными индексами. Показано, что максимальной добротностью данный резонатор обладает, если его колебания имеют азимутальный индекс $n = 11$. Для ЦДР и радиально двухслойных ЦДР с такими колебаниями, отличающимися аксиальными индексами, приведены значения частот и добротностей. Показано, что существует некоторый аксиальный индекс δ_{\max} собственных мод, при которых резонаторы также имеют максимальные значения добротностей. При рассмотрении аналогичных эффектов для резонаторов с колебаниями с различными азимутальными индексами обнаружена связь δ_{\max} и азимутальных индексов. Показано, что существуют некоторые моды, при которых добротность резонатора максимальна.

Автор выражает благодарность Прокопенко Ю. В. и Филиппову Ю. Ф. за консультации и внимание к работе.

1. Головащенко Р. В., Деркач В. Н., Прокопенко Ю. В. и др. О колебаниях в дисковых диэлектрических резонаторах // Радиофизика и электроника. - Харьков: Ин-т радиофизики и электрон. НАН Украины. - 2006. - 11, №3. - С.360-365.
2. Баранник А. А., Прокопенко Ю. В., Филиппов Ю. Ф., Черпак Н. Т. Квазиоптический диэлектрический резонатор с одноосной анизотропией. Измерение микроволновых характеристик диэлектриков и проводников // Радиофизика и электроника. - Харьков: Ин-т радиофизики и электрон. НАН Украины. - 2000. - 5, №3. - С.104-109.
3. Филиппов Ю. Ф., Харьковский С. Н. Спектр резонансных колебаний дискового диэлектрического резонатора // Изв. вузов. Радиофизика. - 1990. - 33, №11. - С.1304-1308.
4. Егоров В. Н., Мальцева И. Н. Колебания в анизотропном диэлектрическом резонаторе с торцевыми отражателями // Электронная техника. Сер. I. Электроника СВЧ. - 1984. - №1. - С.3-8.
5. Прокопенко Ю. В., Филиппов Ю. Ф., Черпак Н. Т. Квазиоптический диэлектрический резонатор с одноосной анизотропией и проводящими торцевыми стенками. Структура поля и добротность // Радиофизика и электроника. - Харьков: Ин-т радиофизики и электрон. НАН Украины. - 1999. - 4, №2. - С.50-54.
6. Егоров В. Н., Мальцева И. Н. Колебания в анизотропном резонаторе с торцевыми отражателями // Электронная техника. Сер. I. Электроника СВЧ. - 1984. - №1. - С.3-8.
7. Иванов Е. Н., Калинин В. И. Приближенный расчет характеристик азимутальных колебаний дисковых диэлектрических резонаторов // Радиотехника. - 1988. - №10. - С.86-89.
8. Баранник А. А., Прокопенко Ю. В. Аксиальный индекс колебаний "шепчущей галереи" дискового диэлектрического резонатора // Радиофизика и электроника. - Харьков: Ин-т радиофизики и электрон. НАН Украины. - 2001. - 6, №3. - С.286-288.
9. Прокопенко Ю. В., Филиппов Ю. Ф. Анизотропный дисковый диэлектрический резонатор с проводящими торцевыми стенками // Журнал техн. физики. - 2002. - 72, №6. - С.79-84.
10. Barannik A. A., Cherpak N. T., Prokopenko Yu. V. et. al. Two-layered disc quasi-optical dielectric resonators: electrodynamic and application perspectives for complex permittivity measurements of lossy liquids // Meas. Sci. Technol. - 2007. - N18. - P.2231-2238.

ABOUT AN AXIAL INDEX OF THE EIGEN
MODES IN QUASIOPTICAL DIELECTRIC
RESONATORS WITH CYLINDRICAL
SURFACES

I. A. Shipilova

The numerical investigations of cylindrical and radially two-layered cylindrical dielectric resonators with axially heterogeneous oscillations have been carried out. The frequencies and qualities values of the resonators with the modes different in their axial indexes were obtained. It is shown that the resonators have such modes where the quality factors are at the high. The relation between eigen modes axial and azimuth indexes of the resonators with maximums of quality factors has been analysed.

Key words: cylindrical dielectric resonators, radially two-layered resonators, eigen modes of a resonator.

ПРО АКСІАЛЬНИЙ ІНДЕКС ВЛАСНИХ МОД
КВАЗІОПТИЧНИХ ДІЕЛЕКТРИЧНИХ
РЕЗОНАТОРІВ З ЦИЛІНДРИЧНИМИ
ПОВЕРХНЯМИ

I. О. Шипілова

Проведено чисельні дослідження циліндричного і радіально двошарового циліндричного діелектричних резонаторів з аксіально неоднорідними коливаннями. Отримано значення частот і добротностей резонаторів з модами, які відрізняються аксіальними індексами. Показано, що в резонаторах існують моди, при яких величина добротності резонатора досягає максимального значення. Проаналізовано зв'язок між значеннями аксіальних і азимутальних індексів власних мод резонаторів, які мають максимальну добротність.

Ключові слова: циліндричні діелектричні резонатори, радіально двошарові резонатори, власні моди резонатора.

Рукопись поступила 10 января 2008 г.