

УДК 556+574.5+577.1

В. Б. Мокін

**МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ ПРОЦЕСІВ
БІОЛОГІЧНОГО САМООЧИЩЕННЯ ВОД З
УРАХУВАННЯМ ЇХ ПОСЛІДОВНО-ОДНОЧАСНОЇ
ВЗАЄМОДІЇ У ВОДНИХ СИСТЕМАХ**

Стаття присвячена моделюванню динаміки біологічного очищення водних систем. Охарактеризовано авторську модель динаміки показників якості води, побудовану на основі упорядкування груп гідробіологічних і фізико-хімічних самоочисних процесів з урахуванням їх послідовного та одночасного характеру взаємодії. Проведено узагальнення моделі з урахуванням положень, запропонованих В. І. Лавриком під час побудови аналогічної моделі для біологічного очищення стічних вод у реакторі. Це дозволить адекватно описувати більшу кількість процесів, які відбуваються у водних системах після надходження до них забруднених стічних вод.

Ключові слова: моделювання якості поверхневих вод, водна система, процеси біологічного очищення, взаємодія самоочисних процесів.

Моделюванню динаміки біологічного очищення водних систем (водойм або річок), особливо після надходження до них забруднених стічних вод, присвячена чимала кількість робіт. Однією з основних задач цієї проблематики є моделювання зміни концентрації речовини x після надходження до водойми такої ж речовини зі стічними водами з концентрацією u за відсутності інших впливів. Кожна модель будується на основі припущень і тверджень про ті чи інші особливості динаміки процесів та про фактори, якими можна нехтувати. Найбільше поширення отримали моделі, які адекватно враховують якнайбільше умов та особливостей. Урахування вдалих припущень, виразів і позначень дозволяє будувати узагальнені та більш адекватні моделі. Розглянемо дві такі моделі (авторську та В. І. Лаврика) та на їх основі побудуємо більш узагальнену.

Відома математична модель В. І. Лаврика для біологічного очищення стічних вод у реакторі має вигляд [2—5]:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \left[\gamma_{\max} + (\gamma_{\min} - \gamma_{\max}) \cdot e^{-\frac{t}{\mu}} \right] \cdot x(t), \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

© Мокін В. Б., 2012

де x — концентрація забруднювальної речовини у воді; t — час; μ — константа верифікації моделі відповідно до прийнятих одиниць вимірювання часу; γ_{\min} , γ_{\max} — відповідно мінімальне та максимальне значення коефіцієнта швидкості біологічного очищення стічних вод; x_0 — концентрація забруднювальної речовини, що надходить зі стічними водами.

Розв'язок рівняння (1) має вигляд [2—5]:

$$x(t) = x_0 e^{\left(\mu (\gamma_{\min} - \gamma_{\max}) \left(e^{-\frac{1}{\mu} t} - 1 \right) - \gamma_{\max} t \right)} \quad (2)$$

Очисні процеси у водних системах характеризуються тим, що на хімічну речовину одночасно діє їх чимала кількість. Автором запропоновано математичну модель упорядкування груп послідовно-одночасних процесів [6], побудовану за трьома основними вихідними передумовами.

На кожну хімічну речовину діє певний набір процесів. Під «набором процесів» мається на увазі низка процесів, в якій кожен наступний перетворює продукти попереднього і лише останній приводить саме до зменшення концентрації хімічної речовини у воді (абсорбція, випаровування, осадження, поглинання гідробіонтами тощо). Ці процеси перебігають з різною швидкістю, і через це їх взаємодію треба розглядати як послідовно-одночасну. Послідовно — тому, що, умовно кажучи, наступний процес починається лише тоді, коли вже почався попередній і з'явилися якісь результати його дії, а одночасно — тому, що наступний починається тоді, коли попередній ще не закінчився. Існування таких наборів послідовно-одночасних процесів для кожної хімічної речовини, яка надходить до водойми, і є першою вихідною передумовою методики побудови математичної моделі динаміки концентрації хімічної речовини у водній системі.

Другою вихідною передумовою є упорядкування наборів послідовно-одночасних процесів для кожної хімічної речовини за причинно-наслідковим взаємовпливом і поділ їх на ряд груп. До першої групи відносимо ті процеси, які починають діяти на хімічні речовини відразу після їх надходження до водної системи, до другої — ті процеси, що впливають на результати дії першої («попередньої») групи і т. д. Процеси кожної групи, крім останньої, або спричиняють перетворення хімічних речовин з одних форм в інші (хімічна трансформація), або розкладають складні речовини на більш прості (хімічне та біохімічне розкладання), або інше.

Можна припустити, що здебільшого варто обмежитись трьома групами послідовно-одночасних процесів, а іноді й двома. Фактично послідовно-одночасні (послідовно-паралельні) процеси, специфіка яких моделюється, за термінологією ідентичні процесам послідовно-рівнобіжної трансформації речовин [1].

Третьою передумовою є перенесення встановлених для хімічних показників закономірностей на бактеріологічні та біологічні показники. Підста-

вою для такої аналогії є те, що, з точки зору математичного опису, характер процесів, які впливають на вміст хімічних речовин, є подібним до характеру процесів, що впливають на вміст бактерій та мікроорганізмів. Наприклад, зменшення концентрацій у воді речовин внаслідок процесів осадження можна описати математично подібно до процесів відмирання мікроорганізмів, процеси біохімічної трансформації речовин — подібно до процесів звичайної життєдіяльності мікроорганізмів. Математичний опис процесів поглинання гідробіонтами речовин є подібним до опису процесів поглинання гідробіонтами мікроорганізмів. Звичайно, таке перенесення є коректним лише у тих випадках, коли іншими особливостями зміни показників можна знехтувати, а графік зменшення показника з часом є подібним до експоненціального.

Доведено, що математичний опис зміни значення показника якості води, його динаміка у водній системі, у тому числі в річці, задовольняє наведеним вище трьом передумовам та є наслідком дії першої — третьої груп послідовно-одночасних процесів, має такий вигляд [6]:

$$\frac{dx(t)}{dt} = G(t)x(t), \quad = 1 \vee 2 \vee 3, \quad x(0) = x_0, \quad (3)$$

$$G_1(t) = -k_1, \quad (4)$$

$$G_2(t) = -k_2(1 - e^{-k_1 t}), \quad (5)$$

$$G_3(t) = -k_3 \left[1 - e^{-k_2(1 - e^{-k_1 t})t} \right], \quad (6)$$

де $G_l(t)$ — функція, яка враховує вплив l -ї ($l = 1, 2$ чи 3) кількості груп послідовно-одночасних процесів на зміну значення показника x ; k_1 — коефіцієнт пропорційності між швидкістю перебігу процесів першої групи, за умови їх ізольованого перебігу, та значенням показника, на який вони діють; k_2 — коефіцієнт пропорційності між швидкістю перебігу процесів другої групи, за умови їх ізольованого перебігу, та значенням показника, на який вони діють; помноженням k_2 на коефіцієнт $(1 - e^{-k_1 t})$ враховується вплив процесів першої групи на процеси другої; k_3 — коефіцієнт пропорційності між швидкістю перебігу процесів третьої групи, за умови їх ізольованого перебігу, та значенням показника, на який вони діють; помноженням k_3 на додатковий коефіцієнт враховується вплив процесів першої та другої груп на процеси третьої; вираз $= 1 \vee 2 \vee 3$ означає «або 1, або 2, або 3», тобто для кожної речовини модель (3) записується з одним із виразів (4)—(6), а не з усіма одночасно.

Математичний опис (3)—(6) побудований виходячи з таких положень [6]:

1) в початковий момент часу $t = 0$, коли процеси першої групи лише починаються, процеси другої групи ще зовсім не почалися, оскільки вони діють на результати дії процесів першої групи, яких немає; коефіцієнт $(1 -$

$e^{-k_1 t}$) у функції (5) при $t = 0$ якраз дорівнює нулю, тому $dx_2(t)/dt = 0$, отже $x_2(t)$ дорівнює константі, яка за наших умов є нулем;

2) коли час прямує в нескінченність $t \rightarrow \infty$, процеси першої групи вже практично скінчилися і процеси другої групи, теж наближаючись до завершення, діють на ту концентрацію речовини чи вміст мікроорганізмів, які залишилися після дії процесів першої групи; коефіцієнт пропорційності між величиною x_2 та її похідною $dx_2(t)/dt$ вже не залежить від коефіцієнта k_1 , а дорівнює лише коефіцієнту k_2 . Коефіцієнт $(1 - e^{-k_1 t})$ у функції (5) при $t \rightarrow \infty$ дорівнює одиниці, отже $dx_2(t)/dt = -k_2 x_2$. Тобто значення коефіцієнта $k_2(1 - e^{-k_1 t})$ для часу t від 0 до ∞ змінюється від 0 до k_2 , правильно відображаючи динаміку процесів;

3) для трьох груп процесів аналогічно значення коефіцієнта швидкості перебігу процесів для часу t від 0 до ∞ змінюється від 0 до k_3 , правильно відображаючи динаміку процесів усіх трьох груп.

Розв'язком рівнянь математичної моделі (3)—(6) є такі рівняння [6]:

$$x(t) = x_0 e^{-k_1 t}, \quad (7)$$

$$x(t) = x_0 \cdot e^{-\frac{k_2}{k_1} [e^{-k_1 t} + k_1 t - 1]}, \quad (8)$$

$$x(t) = x_0 e^{-k_3 \left\{ t - \int_0^t e^{-k_2(1 - e^{-k_1 \tau})} d\tau \right\}}, \quad (9)$$

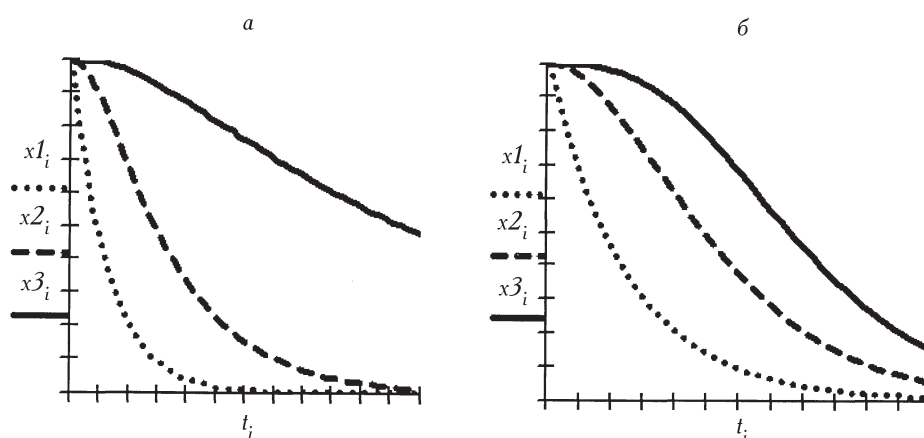
де τ — проміжна змінна інтегрування.

Як видно, математична модель (3)—(9) є лінійною відносно змінної стану x , має небагато параметрів та вимагає для їх ідентифікації порівняно мало експериментальних даних.

На рисунку 1 наведено приклади моделювання за допомогою моделі (3)—(9) процесів самоочищення вод після надходження до них певного забруднення, яке характеризується деяким показником якості води x .

Порівняння моделі упорядкування груп послідовно-одночасних самоочисних процесів з відомими моделями показало, що модель (3)—(9) при $l = 1$ перетворюється на найбільш просту динамічну модель у вигляді звичайного диференціального рівняння:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -kx(t), \quad x(0) = x_0. \quad (10)$$



1. Значення показника якості води x , розраховані за моделлю (7)—(9) упорядкування груп послідовно-одночасних самоочисних процесів для однієї (x_1), двох (x_2) та трьох (x_3) груп з параметрами ($t = [0, T]$, $T = 24$ год): а) $k_1 = 0,4$; $k_2 = 0,2$; $k_3 = 0,04$; б) $k_1 = 0,2$; $k_2 = 0,2$; $k_3 = 0,2$.

Для випадку $l = 2$ модель стає подібною математичній моделі В. І. Лаврика (1), (2). Доведемо це. Введемо заміну змінних:

$$k_1 = \frac{1}{m}, k_2 = \gamma_{\max}. \quad (11)$$

Врахуємо, що модель (3)—(9) була виведена виходячи з припущень про те, що у початковий момент часу ($t = 0$) коефіцієнт швидкості біологічного очищення стічних вод k_2 дорівнює нулю, отже:

$$\gamma_{\min} = 0. \quad (12)$$

Підставимо (11) у (8) та виконаємо перетворення:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 e^{-\frac{k_2}{k_1} [e^{-k_1 t} + k_1 t - 1]} = x_0 e^{\left(-\frac{k_2}{k_1} e^{-k_1 t} - k_2 t + \frac{k_2}{k_1} \right)} = \\ &= x_0 e^{\left(-\gamma_{\max} m e^{-\frac{t}{m}} - \gamma_{\max} t + \gamma_{\max} m \right)} = x_0 e^{\left(\gamma_{\max} \left(m \left(1 - e^{-\frac{t}{m}} \right) - t \right) \right)}. \end{aligned}$$

Як бачимо, отримана в результаті перетворень авторська математична модель (3)—(9) при $l = 2$, з урахуванням (12), є ідентичною математичній моделі (1), (2) В. І. Лаврика, що додатково підтверджує коректність авторської математичної моделі та правильність вихідних передумов і припущень, але

авторська математична модель при $l = 3$ може розв'язувати і ті задачі, які не охоплюються математичною моделлю В. І. Лаврика.

Однак варто узагальнити модель (3)—(9), врахувавши твердження, яке міститься у моделі В. І. Лаврика і ґрунтується на багаторічних практичних дослідженнях, тобто коефіцієнт швидкості процесів самоочищення вод при зміні t від 0 до ∞ приймає значення від мінімального до максимального. Пропонуємо такий математичний опис цього твердження:

$$\frac{dx(t)}{dt} = G_1(t)x(t), \quad = 1 \vee 2 \vee 3, \quad x(0) = x_0, \quad (12)$$

$$G_1(t) = -k_1, \quad (13)$$

$$G_2(t) = -\left(k_{2\max} + (k_{2\min} - k_{2\max}) \cdot e^{-k_1 t}\right), \quad (14)$$

$$G_3(t) = -\left[k_{3\max} + (k_{3\min} - k_{3\max}) \cdot e^{-\left(k_{2\max} + (k_{2\min} - k_{2\max}) \cdot e^{-k_1 t}\right)t}\right]. \quad (15)$$

де $k_{2\max}$, $k_{2\min}$ та $k_{3\max}$, $k_{3\min}$ — коефіцієнти максимальної та мінімальної швидкості послідовно-одночасних процесів відповідно другої та третьої груп за умови їх ізольованого перебігу.

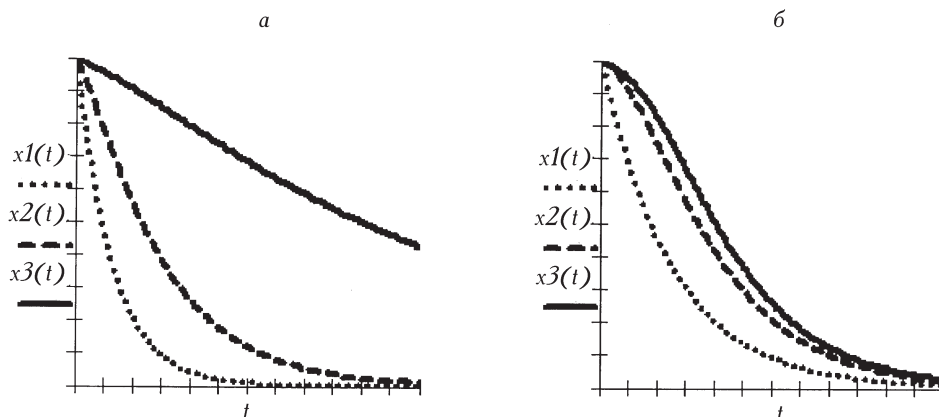
У моделі (12)—(15) враховано такі твердження та припущення:

1) в початковий момент часу $t = 0$, коли процеси першої групи лише починаються, одночасно починають дію процеси другої групи, але не з нульовим, а з мінімальним значенням $k_{2\min}$, коефіцієнт $(k_{2\max} + (k_{2\min} - k_{2\max}) \cdot e^{-k_1 t})$ у функції (14) при $t = 0$ якраз дорівнює $k_{2\min}$;

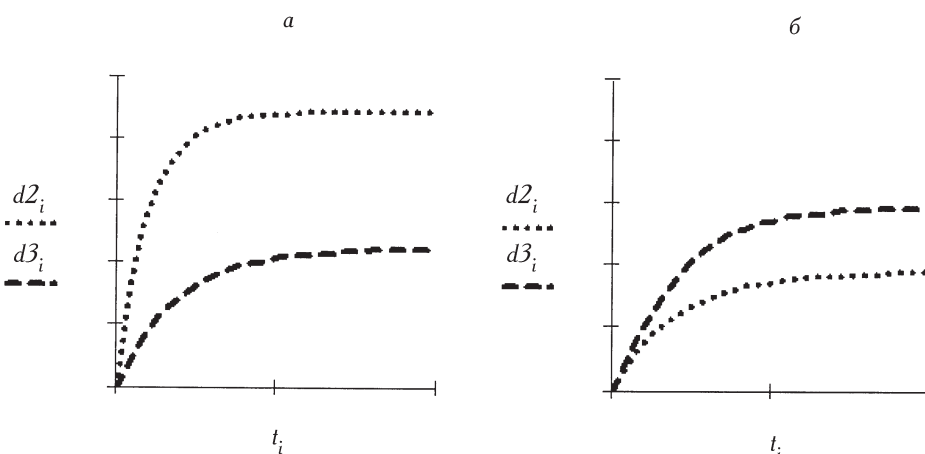
2) коли час прямує в нескінченність $t \rightarrow \infty$, процеси першої групи вже практично завершилися, як і процеси другої групи, що діють на ту концентрацію речовини чи вміст гідробіонтів, які залишились після дії процесів першої групи; коефіцієнт пропорційності між величиною x_2 та її похідною $dx_2(t)/dt$ вже не залежить від коефіцієнта k_1 , а дорівнює лише коефіцієнту $k_{2\max}$. Коефіцієнт $(k_{2\max} + (k_{2\min} - k_{2\max}) \cdot e^{-k_1 t})$ у функції (14) при $t \rightarrow \infty$ дорівнює $k_{2\max}$, отже рівняння має вигляд: $dx_2(t)/dt = -k_{2\max} x_2$. Тобто значення коефіцієнта $(k_{2\max} + (k_{2\min} - k_{2\max}) \cdot e^{-k_1 t})$ для часу t від 0 до ∞ коливається від $k_{2\min}$ до $k_{2\max}$, адекватно відображаючи динаміку процесів;

3) для трьох груп процесів аналогічно значення коефіцієнта швидкості перебігу процесів для часу t від 0 до ∞ змінюється від $k_{3\min}$ до $k_{3\max}$, адекватно відображаючи динаміку процесів усіх трьох груп.

На рисунку 2 наведено приклади моделювання за допомогою моделі (12)—(15) процесів самоочищення вод після надходження до них певного забруднення, яке характеризується деяким показником якості води x . Усі



2. Значення показника якості води x , розраховані за моделлю (12)—(15) упорядкування груп послідовно-одночасних самоочисних процесів для однієї (x_1), двох (x_2) та трьох (x_3) груп з параметрами ($t = [0, T]$, $T = 24$ год): а) $k_1 = 0,4$; $k_{2 \max} = 0,2$; $k_{2 \min} = 0,1 \cdot k_{2 \max}$; $k_{3 \max} = 0,04$; $k_{3 \min} = 0,5 \cdot k_{3 \max}$; б) $k_1 = 0,2$; $k_{2 \max} = 0,2$; $k_{2 \min} = 0,5 \cdot k_{2 \max}$; $k_{3 \max} = 0,2$; $k_{3 \min} = 0,1 \cdot k_{3 \max}$.



3. Відносне значення різниці між значеннями показника якості води x , розрахованими за моделлю (7)—(9) та моделлю (12)—(15) для двох (d_2) та трьох (d_3) груп послідовно-одночасних самоочисних процесів з параметрами ($t = [0, T]$, $T = 24$ год): а) $k_1 = 0,4$; $k_{2 \max} = 0,2$; $k_{2 \min} = 0,5 \cdot k_{2 \max}$; $k_{3 \max} = 0,04$; $k_{3 \min} = 0,5 \cdot k_{3 \max}$; б) $k_1 = 0,2$; $k_{2 \max} = 0,2$; $k_{2 \min} = 0,1 \cdot k_{2 \max}$; $k_{3 \max} = 0,2$; $k_{3 \min} = 0,1 \cdot k_{3 \max}$.

відповідні параметри ті ж самі, що і на рисунку 1. Проведено моделювання за різних мінімальних значень коефіцієнтів швидкості перебігу процесів другої та третьої груп. Аналіз результатів показує, що за мінімальних (менше 1% максимальних) значень коефіцієнтів пропорційності k_2 та k_3 ці графіки, як і очікувалось, перетворюються на попередні графіки (див. рис. 1), а за мінімальних значень коефіцієнтів швидкості, що наближаються до максимальних, усі їх значення, крім першого, є меншими, що також очікувалось.

На рисунку 3 наведено графіки відносних значень різниці d між графіками для двох і трьох груп процесів, розраховані за співвідношенням

$$d = \frac{|x(t, l, 0, 0) - x(t, k_{2 \min}, k_{3 \min})|}{|x(t, l, 0, 0)|} \cdot 100, \%$$

де $x(t, l, k_{2 \min}, k_{3 \min})$ — значення показника якості води x , розраховане за моделлю (12)—(15) при відповідних мінімальних значеннях коефіцієнтів швидкості перебігу процесів l -ї групи, за умови їх ізольованого протікання (зрозуміло, що вираз $x(t, l, 0, 0)$ відповідає моделі (7)—(9)).

Різниця спочатку суттєво наростає, а потім (при більших t , коли експонента у відповідному степені є близькою до нуля), стає постійною. Це додатково підтверджує, що модель (12)—(15) дозволяє описати значно більше процесів та особливостей динаміки показників якості води, ніж моделі (1)—(9).

Таким чином, побудована нова узагальнена модель динаміки значень показників якості води з упорядкуванням груп біологічних і фізико-хімічних процесів на основі їх послідовно-одночасної причинно-наслідкової взаємодії, яка може застосовуватись для моделювання процесів біологічного очищення стічних вод як у реакторі, так і, у першому наближенні, у природній водній системі. Вона дозволяє моделювати та прогнозувати значення показників якості води за даними моніторингу поверхневих вод, що необхідно для вироблення оптимальних рішень з управління водними ресурсами [7].

**

Статья посвящена моделированию динамики биологической очистки водных систем. Охарактеризована авторская модель динамики показателей качества воды, построенная на основе упорядочивания групп гидробиологических и физико-химических самоочистных процессов с учетом их последовательного и одновременного характера взаимодействия. Проведено обобщение модели с учетом положений, предложенных В. И. Лавриком во время построения аналогичной модели для биологической очистки сточных вод в реакторе. Это позволит адекватно описывать большее количество процессов, происходящих в водных системах после поступления в них загрязненных сточных вод.

**

The article is devoted to modeling the dynamics of biological treatment of river water. Characterized by the author's model of the dynamics of water quality indicators constructed on the basis of ordered groups of hydrobiological, physics and chemical autotreatment processes according to their sequential and simultaneous nature of the interaction. The generalization of the model, taking into account the thesis which are proposed by V. I. Lavrik during the construction of a similar model for biological wastewater treatment reactor. This will allow adequate to describe an even greater number of processes occurring in water systems after entering into them polluted wastewater.

**

1. *Еременко Е. В.* Определение в зоне смешения концентрации веществ с учетом их последовательной трансформации // Регулирование качества природных вод: Сб. науч. тр. — Харьков: ВНИИВО, 1984. — С. 3—12.
2. *Лаврик В.І.* Методи математичного моделювання в екології. — К.: Видавничий дім «КМ Академія», 2002. — 203 с.
3. *Лаврик В.И., Боголюбов В.Н.* Управление качеством поверхностного стока с помощью математического моделирования процессов самоочищения // Гидробиол. журн. — 2006. — Т. 42, № 1. — С. 108—119.
3. *Лаврик В. И., Никифорович Н. А.* Математическое моделирование в гидроэкологических процессах. — Киев: Фитосоциоцентр, 1998.— 287 с.
4. *Лаврик В.И.* Основы математического моделирования физико-химического и биологического самоочищения водных экосистем // Гидробиол. журн. — 1999. — Т. 35, № 3. — С. 15—39.
5. *Мокін В. Б.* Синтез моделі річки на основі упорядкування основних процесів // Вісн. Вінниц. політех. ін-ту. — 1997. — № 2. — С. 43—48.
6. *Mokin V. B.* Development of the geoinformation fsystem of the state ecological monitoring // Geographic uncertainty in environmental security / Ed. by A. Morris, S. Kokhan. — NATO Security through Science Series. — Dordrecht: Springer, 2007. — P. 153—165.