УДК 621. 192:519.2

Е.С. ПЕРЕВЕРЗЕВ

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ В МОДЕЛЯХ «НАГРУЗКА-ПРОЧНОСТЬ»

Обсуждаются вопросы оценки показателей надежности на основе параметрических моделей «нагрузка – прочность». Получены выражения для определения гамма-процентной наработки до отказа для случая, когда нагрузка и прочность описываются гауссовскими стационарными процессами. Приведен алгоритм распределения коэффициентов запаса между элементами для обеспечения минимальной массы системы при заданном уровне надежности.

Обговорюються питання оцінки показників надійності на основі параметричних моделей «навантаження – міцність». Отримані вирази для визначення гамма-процентного наопрацювання до відмови для випадку, коли навантаження і міцність описуються гауссовскими стаціонарними процесами. Приведено алгоритм розподілення коефіцієнтів запасу між елементами для забезпечення мінімальної маси системи при заданому рівні надійності.

Problem of the assessment of reliability factors are discussed using parametric models of the load and the strength. Derived are expressions for defining a gamma-percent prefailure life when the load and the strength are described by the Gaussian stationary processes. An algorithm for distributing the store coefficients between elements to provide a minimal mass of the system under given conditions of the reliability is presented.

Среди параметрических моделей надежности наибольшее распространение получили модели «нагрузка – прочность». В таких моделях вероятность безотказной работы P, которая при вероятностных расчетах прочности называется вероятностью неразрушения, находится из соотношения [1, 2]

$$P = Вер\left[(R-Q)>0\right], \tag{1}$$

где R – несущая способность элемента конструкции; Q – нагрузка, действующая на элемент.

Наибольшее развитие получили методы оценки вероятности (1) для случая, когда R и Q представляют собой случайные величины. В общем случае для произвольных законов распределения нагрузки и прочности вероятность P находится из выражений

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} F(y) g(y) dy\,, \tag{2}$$

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \left[1-G(x)\right] f(x) dx\,, \tag{3}$$

где $G(...), g(...)$ – функция и плотность распределения несущей способности; $F(...), f(...)$ – функция и плотность распределения нагрузки.

Здесь через X обозначена нагрузка, через Y – несущая способность. Для произвольных распределений несущей способности и нагрузки получить аналитические выражения вида (1) из (2) и (3) не удается.

Рассмотрим случай, когда несущая способность R и нагрузка Q описываются случайными процессами. Вероятность неразрушения элемента конструкции в течение времени t в этом случае находится так:

$$P(t) = P\left[Y(\tau) - X(\tau) > 0, \in \overline{0,t}\right], \tag{4}$$

где $Y(t)$, $X(t)$ – соответственно случайные процессы, описывающие изменение во времени несущей способности $R(t)$ и нагрузки $Q(t)$.

Если процессы $Y(t)$ и $X(t)$ являются гауссовскими стационарными, получим следующие оценки [3]

$$P(t) \geq F\left(\frac{M_R - M_Q}{\sigma}\right) - n_0 t \exp\left[-\frac{(M_R - M_Q)^2}{2\sigma^2}\right], \tag{5}$$

$$P(t) \leq F\left(\frac{M_R - M_Q}{\sigma}\right) \exp\left\{-n_0 t \exp\left[-\frac{(M_R - M_Q)^2}{2\sigma^2}\right]\right\}, \tag{6}$$

где $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$ – стандартная нормальная функция распределения.

Параметры σ и n_0 вычисляются по формулам

$$\sigma^2 = \sigma_R^2 + \sigma_Q^2 - 2R(0)\sigma_R \sigma_Q, \tag{7}$$

$$n_0 = \frac{1}{2\pi}\left[-\sigma_R^2\, r_1''(0) - \sigma_Q^2\, r_2''(0) + 2R''(0)\sigma_R \sigma_Q\right], \tag{8}$$

где M_R, σ_R, M_Q, σ_Q – математические ожидания и средние квадратические отклонения соответственно несущей способности и нагрузки;
$r_1(\tau)$, $r_2(\tau)$ – нормированные корреляционные функции процессов $Y(t)$ и $X(t)$; $R(\tau)$ – взаимная нормированная корреляционная функция между процессами $Y(t)$ и $X(t)$;

$$r_1''(0) = \left.\frac{d^2 r_1(\tau)}{d\tau^2}\right|_{\tau=0}, \quad r_2''(0) = \left.\frac{d^2 r_2(\tau)}{d\tau^2}\right|_{\tau=0}, \quad R''(0) = \left.\frac{d^2 R(\tau)}{d\tau^2}\right|_{\tau=0}.$$

Выражение (5) дает нижнюю оценку для вероятности неразрушения, а выражение (6) – верхнюю оценку.

Для некоррелированных процессов получим

$$P \geq F\left(\frac{M_R - M_Q}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_Q^2}}\right) - n_0 t \exp\left[-\frac{(M_R - M_Q)^2}{2(\sigma_R^2 + \sigma_Q^2)}\right], \tag{9}$$

$$P(t) \leq F\left(\frac{M_R - M_Q}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_Q^2}}\right) \exp\left\{-n_0 t \exp\left[-\frac{(M_R - M_Q)^2}{2(\sigma_R^2 + \sigma_Q^2)}\right]\right\}, \tag{10}$$

$$n_0 = \frac{1}{2\pi}\left[-\sigma_R^2\, r_1''(0) - \sigma_Q^2\, r_2''(0)\right]. \tag{11}$$

Представим выражения (9) и (10) в следующем виде

$$P \geq F(h) - n_0 t \exp\left(-\frac{h^2}{2}\right), \tag{12}$$

$$P \leq F(h) \exp\left[-n_0 t \exp\left(-\frac{h^2}{2}\right)\right]. \tag{13}$$

Параметр h находим по формуле

$$h = \frac{\eta - 1}{\sqrt{\nu_Q^2 + \nu_R^2 \eta^2}}, \tag{14}$$

где $\eta = \dfrac{M_R}{M_Q}$ – коэффициент запаса; $\nu_R = \dfrac{\sigma_R}{M_R}$ – коэффициент вариации несущей способности; $\nu_Q = \dfrac{\sigma_Q}{M_R}$ – коэффициент вариации нагрузки.

Параметр η представляет собой отношение математических ожиданий несущей способности и нагрузки. В [2] этот коэффициент называется статистическим запасом прочности.

Задавшись вероятностью неразрушения P, из выражений (12), (13) с учетом (14) можно найти потребное значение η_{mp} для обеспечения требуемой вероятности неразрушения

$$P_{mp} = F\left(\frac{\eta_{mp} - 1}{\sqrt{\nu_Q^2 + \nu_R^2 \eta_{mp}^2}}\right) - n_0 t \exp\left[-\frac{(\eta_{mp} - 1)^2}{2(\nu_Q^2 + \nu_R^2)}\right], \tag{15}$$

$$P_{2p} = F\left(\frac{\eta_{2p} - 1}{\sqrt{\nu_Q^2 + \nu_R^2 \eta_{2p}^2}}\right) \exp\left\{-n_0 t \exp\left[-\frac{(\eta_{2p} - 1)^2}{2(\nu_Q^2 + \nu_R^2)}\right]\right\}. \tag{16}$$

Приведенные соотношения используются в теории надежности для оценки изменения вероятности безотказной работы во времени.

Среди показателей надежности технических систем одним из наиболее обобщенных является гамма-процентная наработка t_γ, которая находится из соотношения

$$P(t_\gamma) = \gamma, \tag{17}$$

где γ – вероятность безотказной работы в течение t_γ.

Если вероятность безотказной работы $P(t)$ находится по формуле (12), то имеет место равенство

$$\gamma = F(h) - n_0 t_\gamma \exp\left(-\frac{h^2}{2}\right). \tag{18}$$

Отсюда получим

$$t_{\gamma_r} = \frac{\left[F(h) - \gamma\right]}{n_0} \exp\left(\frac{h^2}{2}\right). \tag{19}$$

Для выражения (13) имеем

$$\gamma = F(h) \exp\left[-n_0 t_\gamma \exp\left(-\frac{h^2}{2}\right)\right]. \tag{20}$$

Соответственно

$$t_\gamma = -\frac{\ln \gamma^*}{n_0} \exp\left(\frac{h^2}{2}\right), \tag{21}$$

где $\gamma^* = \dfrac{\gamma}{F(h)}$.

Для логарифмически-нормального распределения нагрузки и прочности получим аналогичные соотношения. В этом случае только параметры h и η вычисляются по формулам

$$h = \frac{\mu_R - \mu_Q}{\sqrt{\eta^2 b_R^2 + b_Q^2}}, \tag{22}$$

$$\eta = \frac{\mu_R}{\mu_Q}, \tag{23}$$

где μ_R, μ_Q, b_R, b_Q – параметры логарифмически-нормального распределения соответственно R и Q.

Различные элементы имеют различные значения коэффициентов вариации прочности, различаются по степени сложности и важности и т.д. В связи с этим в общем случае значения вероятности безотказной работы элементов и соответствующие им значения коэффициентов запаса целесообразно распределять между элементами таким образом, чтобы затраченная стоимость на достижение заданного уровня надежности была минимальной. В частном случае, эта задача может быть сведена к тому, чтобы общая масса системы при заданном уровне надежности была минимальной. В связи с этим кратко обсудим вопрос о распределении коэффициентов запаса между элементами таким образом, чтобы обеспечить минимум массы всей системы при требуемом уровне надежности.

Рассмотрим решение этой задачи для случая, когда нагрузка и прочность описываются гауссовским стационарным процессом и массу всей системы, состоящей из n элементов, можно представить в виде

$$G = \sum_{i=1}^{n} \left[g_i + G_i(\eta_i)\right], \tag{24}$$

где g_i – часть массы элемента, не зависящая от коэффициента запаса; $G_i(\eta_i)$ – часть массы элемента, зависящая от коэффициента запаса.

Для выбора оптимальных значений коэффициентов запаса отдельных элементов могут быть использованы различные методы. Решим эту задачу методом неопределенных множителей Лагранжа.

Рассмотрим систему, состоящую из n независимых последовательно соединенных элементов. Для решения поставленной задачи составим следующую функцию:

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= \sum_{i=1}^{n}\left[g_i + G_i(\eta_i)\right] + \lambda \prod_{i=1}^{n} P_i, \\ &\prod_{i=1}^{n} P_i = P_{Tp}, \end{aligned}\right\}, \tag{25}$$

где λ – неопределенный множитель Лагранжа; P_i – вероятность безотказной работы i-го элемента; P_{Tp} – требуемое значение вероятности безотказной работы системы.

Условия выполнения экстремума функционала (24) имеют вид

$$\partial\Phi/\partial\eta_i = 0, \quad i = \overline{1,n}. \tag{26}$$

Из (26) с учетом (25) получим следующую систему уравнений для определения оптимальных значений коэффициентов η_i:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial G(\eta_i)}{\partial\eta_i} + \lambda \frac{P_{TP}}{P_i}\frac{\partial P_i}{\partial\eta_i} = 0, \\ &P_{Tp} = \prod_{i=1}^{n} P_i, \quad i = \overline{1,n}. \end{aligned}\right\}. \tag{27}$$

Если нагрузка и прочность описываются гауссовскими стационарными процессами, получим

$$\frac{\partial P_i}{\partial\eta_i} = \frac{\nu_{1i}^2\eta_i + \nu_{2i}^2}{\left(\nu_{1i}^2\eta_i^2 + \nu_{2i}^2\right)^{3/2}} \exp\left(-\frac{h_i^2}{2}\right)\left[n_0 t h + \frac{1}{\sqrt{2}}\right]. \tag{28}$$

Если нагрузка и прочность являются нормальными случайными величинами, то

$$\frac{\partial P_i}{\partial\eta_i} = \frac{\nu_{1i}^2\eta_i + \nu_{2i}^2}{\left(\nu_{1i}^2\eta_i^2 + \nu_{2i}^2\right)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\eta_i - 1)^2}{2\left(\nu_{1i}^2\eta_i^2 + \nu_{2i}^2\right)}\right], \tag{29}$$

где $\nu_{1i} = \sigma_{R_i}/m_{R_i}$, $\nu_{2i} = \sigma_{Q_i}/m_{Q_i}$.

Решив систему уравнений (27), найдем значения коэффициентов запаса, обеспечивающих минимальную массу системы при заданном уровне надежности.

Для зависимых элементов вместо равенства $P_{TP} = \prod_{i=1}^{n} P_i$ можно использовать следующее выражение [3]

$$P_{Tp} = (1-\mu)\prod_{i=1}^{n} P_i + P_{\min}, \tag{30}$$

где $P_{\min}$ – наименьшее значение из P_i, $i = \overline{1, n}$.

Параметр μ учитывает степень зависимости между показателями надежности элементов и изменяется от нуля до единицы. Для независимых элементов $\mu = 0$.

Если нагрузка и прочность являются нормальными случайными величинами, то параметр μ находится по формуле

$$\mu = \frac{2}{\pi N} \sum_{i \neq j}^{n}\sum \arcsin r_{ij}, \tag{31}$$

где $N = \frac{n(n-1)}{2}$; r_{ij} – коэффициенты корреляции.

Зависимость массы от вероятности безотказной работы можно описать выражением

$$G = a + b\ln(1-P), \tag{32}$$

где a и b – эмпирические коэффициенты.

Расчеты оптимальных значений показателей надежности составляющих элементов показывают, что массу некоторых систем можно снизить на 10 – 20 % при сохранении требуемого значения показателя надежности системы.

1. Прочность самолета (методы нормирования расчетных условий прочности самолета) / Под ред. акад. А. И. Макаревского. – М. : Машиностроение, 1975. – 280 с.
2. *Гладкий В. Ф.* Вероятностные методы проектирования конструкции летательного аппарата / *В. Ф. Гладкий* – М. : Наука, 1982. – 272 с.
3. *Переверзев Е.* Надежность технических систем / *Переверзев Е., Алпатов А., Даниев Ю., Новак П.* – Днепропетровск : Пороги, 2002. – 396 с.

Институт технической механики
НАН Украины и НКА Украины,
Днепропетровск

Получено 18. 06.09,
в окончательном варианте 22.06.09