

## Операторный метод в задаче дифракции электромагнитных волн на полубесконечных ленточных решетках

С. Н. Воробьев, Л. Н. Литвиненко, С. Л. Просвирнин

*Радиоастрономический институт НАН Украины,  
ул. Краснознаменная, 4, г. Харьков, 61002, Украина  
E-mail: vorobyov@rian.kharkov.ua*

*Статья поступила в редакцию 20 января 2005 г.*

Операторный метод, использующий свойство трансляционной симметрии полубесконечной периодической структуры, обобщен для рассеивателей в виде металлических лент. Задача дифракции электромагнитной волны на полуограниченных ленточных решетках в строгой постановке сведена к решению нелинейного уравнения относительно искомого оператора отражения полубесконечной решетки. Найдено приближенное аналитическое решение уравнения в случае плоской решетки из узких редко расположенных лент. Получено асимптотическое представление поля, рассеянного плоской полуограниченной ленточной решеткой, которое может служить начальным приближением для итерационной процедуры численного решения.

### Введение

Решение задачи дифракции волн на полуограниченной ленточной решетке (периодической решетке, обрывающейся на одной из лент) представляет интерес вследствие того, что такая структура занимает промежуточное положение между бесконечными периодическими и ограниченными структурами. С одной стороны, над и под такой решеткой достаточно далеко от ее края рассеянное поле должно обладать свойствами, присущими периодическим решеткам, а именно представлять собой суперпозицию дифракционных лучей, иметь аномалии Рэлея–Вуда в частотной характеристике. С другой стороны, связанное с краем структуры рассеянное поле должно иметь непрерывный пространственный спектр.

Дифракция волн на плоских полубесконечных решетках уже давно привлекает внимание исследователей (см., например, [1-4]). В [1] рассмотрена полубесконечная решет-

ка из прямолинейных круглых проводов. Исходная дифракционная задача сведена к неоднородной задаче Гильберта с последующим применением вариационного подхода для ее решения. В результате для четырех крайних проводов найдены поправки к току, текущему по проводам соответствующей периодической решетки. В [2, 3] также исследуется дифракция плоской волны на решетке из круговых цилиндров в предположении, что радиус цилиндров мал, а период решетки велик по сравнению с длиной волны. Дифракционные поля найдены дискретным методом Винера–Хопфа и представляют собой суперпозицию цилиндрической волны и конечной суммы распространяющихся пространственных гармоник. В [4] с помощью функции Хевисайда получена формула для преобразования суммы полубесконечного числа фурье-изображений некоторых функций в бесконечную сумму для оригиналов Фурье тех же функций. Эта формула подобна

формуле суммирования Пуассона и применяется для анализа излучения полубесконечной решетки линейных токов, поле каждого из которых задается функцией Ханкеля с фазовым множителем, удовлетворяющим теореме Флоке. Рассеянное поле получено в виде бесконечной суммы распространяющихся и затухающих пространственных гармоник и интегрального слагаемого, которое затем оценивается асимптотически методом перевала.

Однако до сих пор при строгой постановке задачи дифракции электромагнитных волн на полубесконечной периодической решетке не удалось получить ее аналитического решения или разработать соответствующий эффективный аналитически-численный метод. Математические трудности, возникающие при этом, связаны с необходимостью анализа суперпозиции полей с дискретным и непрерывным пространственными спектрами.

В [5] был предложен операторный метод для решения задачи дифракции волн на полубесконечной последовательности полупрозрачных экранов, расположенных эквидистантно в параллельных плоскостях. Существенным в этом методе является использование специфической трансляционной симметрии структуры, заключающейся в том, что свойства полубесконечной решетки не изменяются, если убрать крайнюю ленту.

Целью настоящей работы является обобщение этого метода на другой вид рассеивателей. Здесь ищется решение задачи рассеяния волн на полубесконечных решетках из металлических лент. Результатом решения является нелинейное операторное уравнение относительно искомого интегрального оператора рассеяния полубесконечной решетки. Это уравнение можно решать приближенно численными методами. Для плоской полубесконечной решетки из узких редко расположенных лент получено асимптотическое выражение для отраженного поля, которое может служить начальным приближением для итерационной процедуры численного решения.

### 1. Постановка задачи

На рис. 1 представлена плоская полубесконечная решетка, состоящая из одинаковых идеально проводящих лент шириной  $2d$ . Середина первой ленты находится в начале декартовой системы координат  $(y, z)$ . Период решетки  $l$ . В дальнейшем удобно использовать безразмерные величины  $u = y/d$ ,  $v = z/d$ ,  $u_0 = l/d$ . Представим  $H$ -поляризованное (имеющее единственную отличную от нуля компоненту  $H_x$ ) электромагнитное поле, падающее на структуру из полупространства  $z > 0$ , в виде интеграла Фурье с известной спектральной плотностью  $q(\xi)$ :

$$H_i(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} q(\xi) \exp(i\xi u - i\gamma(\xi)v) d\xi, \quad (1)$$

где  $\gamma(\xi) = \sqrt{\eta^2 - \xi^2}$ , а  $\eta = kd$  – относительная ширина ленты. Зависимость от времени в виде  $\exp(-i\omega t)$  здесь и в последующих формулах опускается.

Рассеянное полубесконечной решеткой поле  $H_s$  будем искать в виде интеграла Фурье с некоторой неизвестной спектральной плотностью  $a_s(\xi)$ :

$$H_s(u, v) = \text{sign}(v) \int_{-\infty}^{\infty} a_s(\xi) \exp(i\xi u + i\gamma(\xi)|v|) d\xi. \quad (2)$$

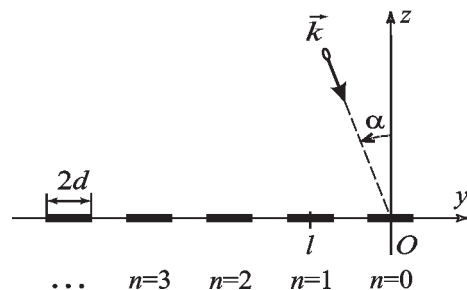


Рис. 1. Геометрия задачи дифракции на плоской решетке

Амплитуду Фурье отраженного полубесконечной решеткой поля можно записать следующим образом:

$$a_s(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\xi, \zeta) q(\zeta) d\zeta. \quad (3a)$$

Формула (3a) определяет интегральный оператор, который ставит в соответствие фурье-амплитуде  $q(\xi)$  падающего на полубесконечную решетку поля (1) амплитуду Фурье  $a_s(\xi)$  отраженного поля. Функция  $R(\xi, \zeta)$  является ядром интегрального оператора (3a). В краткой символической записи операторное соотношение (3a) может быть переписано в виде:

$$a_s = \mathbf{R}q, \quad (3б)$$

здесь  $\mathbf{R}$  – искомый оператор отражения от полубесконечной плоской ленточной решетки.

## 2. Операторный метод решения задачи

Решение задачи дифракции операторным методом основывается на использовании операторов отражения от отдельных элементов, составляющих сложную структуру. Аналогично (3a) можно написать выражение для фурье-амплитуды поля, отраженного только одной лентой, если на нее падает поле (1) с амплитудой Фурье  $q(\xi)$ :

$$a(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\xi, \zeta) q(\zeta) d\zeta, \quad (4a)$$

или

$$a = \mathbf{r}q, \quad (4б)$$

где  $\mathbf{r}$  – оператор отражения от одной ленты.

Нахождение этого оператора, т. е. решение задачи дифракции на одной ленте

в обозначениях (1) и (2), сводится к решению парных интегральных уравнений относительно фурье-амплитуды  $a(\xi)$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(\xi) \exp(i\xi u) d\xi = 0, \quad |u| > 1, \quad (5a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(\xi) \gamma(\xi) \exp(i\xi u) d\xi = i \frac{\partial H_i}{\partial v} \Big|_{v=0}, \quad |u| \leq 1, \quad (5б)$$

которые легко получить из граничных условий. Правая часть уравнений определяется падающим полем (1) и имеет вид:

$$i \frac{\partial H_i}{\partial v} \Big|_{v=0} = \int_{-\infty}^{\infty} q(\xi) \gamma(\xi) \exp(i\xi u) d\xi. \quad (6)$$

Эффективное решение задачи рассеяния волн на одной металлической ленте получено в [6-8] спектральным методом. На основании этого решения можно построить ядро оператора отражения от ленты:

$$r(\xi, \zeta) = i\gamma(\zeta) \sum_{p=1}^{\infty} \sqrt{p} \frac{J_p(\xi)}{\xi} \sum_{s=1}^{\infty} Q_{ps} \sqrt{s} \frac{J_s(\zeta)}{\zeta}, \quad (7)$$

здесь  $J_p(\cdot)$  – функция Бесселя, коэффициенты  $Q_{ps}$  являются матричными элементами матрицы, обратной относительно матрицы  $\|I - A_{ps}\|_1^{\infty}$ , где

$$A_{ps} = \sqrt{ps} (1 + (-1)^{p+s}) \int_0^{\infty} J_p(\zeta) J_s(\zeta) \left(1 + \frac{i}{\zeta} \gamma(\zeta)\right) \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Если лента находится в составе решетки, то в силу линейности задачи возбуждающее ее поле является суперпозицией падающего поля и поля излучения токов других лент решетки. Поле излучения тока на ленте с номером  $n$  можно представить в виде

$$H_s^{(n)}(u_n, v) = \text{sign}(v) \int_{-\infty}^{\infty} a_n(\xi) \exp(i\xi u_n + i\gamma(\xi)|v|) d\xi,$$

где  $u_n = u + nu_0$ . Тогда для случая возбуждения крайней ( $n=0$ ) ленты решетки полем тока, текущего по ленте с номером  $n$ , получаем аналогично (6):

$$i \frac{\partial H_i}{\partial v} \Big|_{v=0} = - \int_{-\infty}^{\infty} a_n(\xi) \exp(i\xi nu_0) \gamma(\xi) \exp(i\xi u) d\xi, \\ |u| \leq 1.$$

Таким образом, чтобы найти поле, переизлученное лентой с номером  $n=0$ , если она возбуждается полем тока, текущего на  $n$ -й ленте, следует воспользоваться соотношением вида (4б), но применить оператор  $\mathbf{r}$  к функции  $-a_n(\xi) \exp(i\xi nu_0)$ . В показатель экспоненты этой функции входит расстояние между лентами. Удобно ввести оператор  $\mathbf{S}^{\pm}$ , описывающий изменение фазы поля при смещении точки наблюдения на один период решетки  $l$  вдоль оси  $Oy$  в положительном (знак плюс) и отрицательном (минус) направлениях. Результат действия  $\mathbf{S}^{\pm}$  на функцию  $g$  сводится к ее умножению на экспоненту  $(\mathbf{S}^{\pm} g)(\xi) = \exp(\pm i\xi u_0) g(\xi)$ . Нетрудно убедиться, что оператор  $(\mathbf{S}^{\pm})^n$  действует на функцию  $g$  аналогичным образом:

$$((\mathbf{S}^{\pm})^n g)(\xi) = \exp(\pm in\xi u_0) g(\xi). \quad (8)$$

Получить операторное уравнение для отыскания оператора  $\mathbf{R}$  можно воспользовавшись уже упоминавшимся нами свойством трансляционной симметрии, которое позволяет рассматривать полубесконечную структуру, с одной стороны, как полубесконечную решетку, начинающуюся с ленты с номером  $n=0$ , а с другой стороны, как идентичную, но начинающуюся с ленты с номером  $n=1$  полубесконечную решетку, взаимодействующую с одной лентой с номером  $n=0$ . Принимая во внимание взаим-

ное влияние полей крайней ленты и полубесконечной решетки, начинающейся с ленты  $n=1$ , учитывая (3б) и (4б), можно получить операторное равенство:

$$\mathbf{r}(q - \mathbf{S}^+ a_s) + \mathbf{S}^+ \mathbf{R} \mathbf{S}^- (q - \mathbf{r}(q - \mathbf{S}^+ a_s)) = a_s. \quad (9)$$

Первое слагаемое в (9) означает, что возбуждение крайней ленты происходит как падающим полем, так и полем токов, текущих на лентах полубесконечной решетки, начинающейся с ленты с номером  $n=1$ , а второе слагаемое в (9) описывает отражение падающего поля (1) от этой же полубесконечной решетки с учетом влияния на нее поля тока, текущего на ленте с номером  $n=0$ .

Заменим функцию  $a_s$  в (9) ее выражением из (3б) и, после несложных преобразований, получим уравнение относительно неизвестного оператора  $\mathbf{R}$ :

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{S}^+ \mathbf{R} \mathbf{S}^- (\mathbf{I} - \mathbf{r}) + (\mathbf{S}^+ \mathbf{R} \mathbf{S}^- - \mathbf{I}) \mathbf{r} \mathbf{S}^+ \mathbf{R}, \quad (10)$$

где  $\mathbf{I}$  – единичный оператор.

### 3. Редкая решетка из узких лент

Нелинейное операторное уравнение (10) можно решать численно методом последовательных приближений. При этом важен правильный выбор начального приближения, в качестве которого целесообразно использовать приближенное решение задачи для структуры из узких лент, расположенных настолько далеко друг от друга, чтобы взаимодействием между ними можно было пренебречь.

В этом случае уравнение (10) существенно упрощается. Если в выражении (9) не учитывать взаимодействия, тогда операторы  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{R}$  действуют только на фурье-амплитуду падающего поля  $q(\xi)$ . Поэтому (10) преобразуется к виду:

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{S}^+ \mathbf{R} \mathbf{S}^-. \quad (11)$$

Методом последовательных приближений из (11) легко получить операторный ряд относительно  $\mathbf{R}$ , если выбрать в качестве нулевого приближения оператор отражения от одной ленты  $\mathbf{r}$ :

$$\mathbf{R} = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbf{S}^+)^n \mathbf{r} (\mathbf{S}^-)^n. \quad (12)$$

Ряд в выражении (12) описывает суперпозицию полей, отраженных от всех лент решетки.

Учитывая (8), находим  $(\mathbf{S}^{\pm})^n = \mathbf{r} \exp(\pm i n \xi u_0) \times \mathbf{r}(\xi, \zeta)$  и  $\mathbf{r}(\mathbf{S}^{\pm})^n = \mathbf{r}(\xi, \zeta) \exp(\pm i n u_0 \zeta)$ , в результате чего ядро оператора  $\mathbf{R}$  в (12) преобразуется к виду:

$$R(\xi, \zeta) = r(\xi, \zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-i n u_0 (\xi - \zeta)). \quad (13)$$

Воспользуемся принципом предельного поглощения [10]. Предположим наличие у величины  $k$  (или  $\eta$ ) малой положительной мнимой части. Тогда во всех интегральных операторах можно выбрать путь интегрирования, смещенный с вещественной оси в верхнюю полуплоскость комплексной плоскости  $\zeta$ , и ряд в (13) удастся просуммировать как бесконечную геометрическую прогрессию

$$R(\xi, \zeta) = -\frac{i \exp(i u_0 (\xi - \zeta)/2)}{2 \sin(u_0 (\xi - \zeta)/2)} r(\xi, \zeta). \quad (14)$$

Если ленты узкие, то выражение (7) можно значительно упростить, оставив в суммах только первый член с индексами

$s = 1$  и  $p = 1$ , причем  $Q_{11} = \frac{1}{1 - A_{11}}$ . В результате (14) приобретает следующий вид:

$$R(\xi, \zeta) = \frac{1}{2} \frac{\gamma(\zeta)}{A_{11} - 1} \frac{J_1(\xi)}{\xi} \frac{\exp(i u_0 (\xi - \zeta)/2)}{\sin(u_0 (\xi - \zeta)/2)} \frac{J_1(\zeta)}{\zeta}. \quad (15)$$

Пусть на полубесконечную решетку падает плоская волна. Тогда  $q(\xi) = \delta(\xi - \eta \sin \alpha)$ , где  $\alpha$  – угол падения волны (см. рис. 1). Учитывая (3а), нетрудно получить выражение для амплитуды Фурье отраженной волны,  $a_s(\xi) = R(\xi, \eta \sin \alpha)$ . Функция  $R(\xi, \eta \sin \alpha)$  легко находится из выражения (15) подстановкой в него  $\zeta = \eta \sin \alpha$ . Кроме того, при условии  $\eta \ll 1$  можно воспользоваться известным разложением функции Бесселя для малых аргументов  $J_1(\eta \sin \alpha) = \frac{\eta \sin \alpha}{2} + O((\eta \sin \alpha)^3)$ .

Окончательно (15) преобразуется к виду:

$$R(\xi, \eta \sin \alpha) = Q \frac{J_1(\xi)}{\xi} \frac{\exp(i u_0 (\xi - \eta \sin \alpha)/2)}{\sin(u_0 (\xi - \eta \sin \alpha)/2)}, \quad (16)$$

где  $Q = \frac{\eta \cos \alpha}{4 A_{11} - 1}$ . Принимая во внимание (16), отраженное от редкой полубесконечной решетки поле (2) можно представить в виде:

$$H_s(u, v) = Q \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_1(\xi)}{\xi} \frac{\exp(i u_0 (\xi - \eta \sin \alpha)/2)}{\sin(u_0 (\xi - \eta \sin \alpha)/2)} \times \exp(i \xi u + i \gamma(\xi) v) d\xi. \quad (17)$$

Подынтегральная функция в (17) имеет полюса, лежащие на действительной оси в точках

$$\xi_m = \frac{2\pi m}{u_0} + \eta \sin \alpha, \quad (18)$$

причем целые числа  $m$ , которые соответствуют этим полюсам, находятся в интервале  $m^- \leq m \leq m^+$ , где  $m^- = \left\lceil \frac{\eta u_0}{2\pi} (1 + \sin \alpha) \right\rceil$  и  $m^+ = \left\lfloor \frac{\eta u_0}{2\pi} (1 - \sin \alpha) \right\rfloor$ , а  $[b]$  означает целую часть величины  $b$ . Разложим знаменатель

второго множителя в подынтегральном выражении в (17) в ряд Тейлора в окрестности точки  $\xi = \xi_m$  и ограничимся слагаемым, пропорциональным  $(\xi - \xi_m)$ :

$$\sin\left(\frac{u_0}{2}(\xi - \eta \sin \alpha)\right) \Big|_{\xi \rightarrow \xi_m} \approx (-1)^m \frac{u_0}{2} (\xi - \xi_m). \quad (19)$$

Используя (19), вычислим оставшуюся часть подынтегрального выражения в формуле (17) в точках (18) и просуммируем полученные значения по всем  $m^- \leq m \leq m^+$ . После этого вычтем и прибавим полученную сумму к подынтегральному выражению в (17). Тогда разность первого и второго слагаемых образует функцию, не имеющую полюсов на вещественной оси, а интеграл от третьего слагаемого можно вычислить, воспользовавшись теоремой о вычетах [11]. После указанных преобразований (17) окончательно примет вид:

$$H_s(u, v) = Q \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{F(\xi) \exp(i\xi u + i\gamma(\xi)v)}{\sin(u_0(\xi - \eta \sin \alpha)/2)} - \frac{2}{u_0} \sum_{m=-m^-}^{m^+} \frac{F_m}{\xi - \xi_m} \exp(i\xi_m u + i\gamma_m v) \right) d\xi + \frac{2\pi i}{u_0} Q \sum_{m=-m^-}^{m^+} F_m \exp(i\xi_m u + i\gamma_m v), \quad (20)$$

где 
$$F(\xi) = \frac{J_1(\xi)}{\xi} \exp\left(i \frac{u_0}{2} (\xi - \eta \sin \alpha)\right),$$
  

$$F_m = (-1)^m F(\xi_m) = \frac{J_1(\xi_m)}{\xi_m} \quad \text{и} \quad \gamma_m = \sqrt{\eta^2 - \xi_m^2}.$$

Интегральный член в выражении (20) представляет собой часть поля с непрерывным пространственным спектром, соответствующую рассеянию от края решетки. Второе слагаемое в (20) является суммой распространяющихся плоских волн с компонентами волновых векторов  $\xi_m$  и  $\gamma_m$ , аналогичными гармоникам в бесконечной периодической структуре.

#### 4. Асимптотическое выражение для отраженного поля

Выражение (20) позволяет найти рассеянное поле в любой точке пространства над решеткой, но требует численного интегрирования медленно убывающей осциллирующей функции. Однако в случае, когда расстояние до точки наблюдения велико по сравнению с длиной волны, интеграл в формуле (17) может быть вычислен асимптотически методом перевала. Такое аналитическое решение полезно для изучения физических особенностей рассеянного поля в волновой зоне.

Введем полярную систему координат  $(\rho, \theta)$ , где угол  $\theta$  отсчитывается от оси  $Oz$  против часовой стрелки. Тогда  $u = -\rho \sin \theta$ ,  $v = \rho \cos \theta$ , где  $\rho = r/d$  безразмерное расстояние. Кроме того, чтобы исключить точки ветвления функции  $\gamma(\xi)$  сделаем замену переменной  $\xi = \eta \sin w$ , где  $w$  – комплексная величина. В результате интеграл в (17) преобразуется к виду:

$$H_s(\rho, \theta) = Q\eta \int_{-\frac{\pi}{2} + i\infty}^{\frac{\pi}{2} - i\infty} \frac{F(\eta \sin w) \cos w}{\sin\left(\frac{u_0 \eta}{2} (\sin w - \sin \alpha)\right)} \times \exp(i\rho \eta \cos(w + \theta)) dw. \quad (21)$$

Анализ показателя экспоненты в (21) при  $\eta\rho \rightarrow \infty$  [12] приводит к выражению для седловой точки  $w_s = -\theta$  и уравнению перевального пути  $\cos(\text{Re } w + w_s) \text{ch}(\text{Im } w) = 1$ . Угол пересечения линии наибоыстрейшего спуска с осью  $\text{Re } w$  равен  $-\pi/4$ .

Следует отметить, что (21) отличается от классического случая гладкой подынтегральной функции наличием полюсов в точках

$$w_m = \arcsin\left(\sin \alpha + \frac{2\pi m}{u_0 \eta}\right), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Учет этого обстоятельства рассмотрен в [12, 13]. Но метод, изложенный в [13], отличается от использованного в [12], в частности, тем, что в асимптотическом раз-

ложении интеграла учитываются как первый, так и второй члены. Это приводит к практически гладкой зависимости вычисленного значения интеграла от угла наблюдения  $\theta$  вблизи полюсов подынтегрального выражения. Значения углов, отвечающих этим полюсам, соответствуют направлениям распространения пространственных гармоник. Не вдаваясь в детали вычислений, достаточно подробно изложенных в [13], приведем результат применения модифицированного метода перевала для выражения (21):

$$H_s(\rho, \theta) = \sqrt{2\pi} \eta Q \sum_{m=-m^-}^{m^+} \left\{ \frac{\exp(i\eta\rho - i\pi/4)}{\sqrt{\eta\rho}} \times \left[ \left( A_0 + \frac{1}{\eta u_0} \frac{F_m}{a_m} \right) + \frac{1}{\eta\rho} \left( A_2 + \frac{i}{4\eta u_0} \frac{F_m}{a_m^3} \right) \right] + i \frac{2\sqrt{2}}{\eta u_0} F_m \exp(i\eta\rho \cos(w_m + \theta)) \times \operatorname{erfc}(\sqrt{2\eta\rho} \exp(-i\pi/4) a_m) \right\}, \quad (22)$$

где

$$a_m = \sin\left(\frac{w_m + \theta}{2}\right), \quad A(w) = \frac{F(\eta \sin w) \cos w}{\sin\left(\frac{u_0 \eta}{2} (\sin w - \sin \alpha)\right)},$$

$$A_0 = A(w)|_{w=-\theta} = - \frac{J_1(\eta \sin \theta)}{\eta \sin \theta} \times \exp\left(-i \frac{u_0 \eta}{2} (\sin \theta + \sin \alpha)\right) \frac{\cos \theta}{\sin\left(\frac{u_0 \eta}{2} (\sin \theta + \sin \alpha)\right)},$$

$$A_2 = -\frac{i}{2} \left( \frac{d^2 A(w)}{dw^2} \Big|_{w=-\theta} + \frac{A_0}{4} \right),$$

а  $\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty \exp(-x^2) dx$  – дополнительный интеграл вероятности [14]. Если интеграл вероятности содержит в аргументе сомножитель  $\exp(-i\pi/4)$ , то он легко преобразуется в интегралы Френеля  $C(z)$  и  $S(z)$  [14]. После указанных преобразований отраженное редкой полубесконечной решеткой поле (22) в дальней зоне принимает вид:

$$H_s(\rho, \theta) = \tilde{Q} \left\{ \frac{\exp(i\eta\rho)}{\sqrt{\eta\rho}} \left[ \left( A_0 + \frac{1}{\eta u_0} \sum_{m=-m^-}^{m^+} \frac{F_m}{a_m} \right) + \frac{1}{\eta\rho} \left( A_2 + \frac{i}{4\eta u_0} \sum_{m=-m^-}^{m^+} \frac{F_m}{a_m^3} \right) \right] + i \frac{2}{\eta u_0} \sum_{m=-m^-}^{m^+} F_m \exp(i\eta\rho \cos(w_m + \theta)) \times \left[ \frac{\exp(i\pi/4)}{\sqrt{2}} - C(\sqrt{2\eta\rho} a_m) - iS(\sqrt{2\eta\rho} a_m) \right] \right\}, \quad (23a)$$

где  $\tilde{Q} = \sqrt{2\pi} \eta Q \exp(-i\pi/4)$ .

### 5. Анализ полученных результатов

Как правило дальняя зона для дифрагированных на экранах полей определяется выражением  $\eta\rho = kr \rightarrow \infty$  [12, 15], что физически означает  $\eta\rho \gg 1$  (т. е. расстояние в длинах волн велико). Поскольку формула (23a) получена на основе методики, изложенной в [13], и в ней учитываются два члена асимптотического ряда, то в дальней зоне граница области ее применимости существенно ближе к краю экрана, чем граница традиционного асимптотического приближения. Таким образом, появляется возможность использовать аналитические формулы для изучения полей на “средних” расстояниях от края полубесконечной решетки. Заметим, что численные расчеты с использованием (20), позволяющие находить отра-

женное поле в любой точке верхнего полупространства, требуют значительных затрат компьютерного времени.

Первое слагаемое в выражении (23а) является цилиндрической волной, уходящей от края полубесконечной решетки, а второе слагаемое представляет собой суперпозицию распространяющихся гармоник. Пространственные гармоники, т. е. плоские волны, распространяются в тех же направлениях, что и при дифракции на бесконечной решетке.

Если  $\theta = -w_m$ , то выражение в квадратных скобках в первом слагаемом (23а) равно нулю. Скачок поля при переходе через полюс в точности равен вычету подынтегральной функции в точке  $\theta = -w_m$  (см. [12]) и представляет собой пространственную гармонику с номером  $m$ , уходящую от решетки.

В случае, когда аргумент интегралов Френеля имеет большую величину, т. е.  $\sqrt{2\eta\rho} a_m \gg 1$  (а это означает, что угол наблюдения  $\theta$  не близок к величине  $-w_m$ ), можно пользоваться разложением интегралов Френеля для больших аргументов:

$$C(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \sin x^2 + O(x^{-2}) \quad \text{и}$$

$$S(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \cos x^2 + O(x^{-2}).$$

Как показано в [12], эти формулы справедливы при условии  $\theta + w_m \geq 6/\sqrt{2\eta\rho}$ .

Тогда второе слагаемое в (23а) выглядит следующим образом:

$$i \frac{2}{\eta u_0} \sum_{m=-m^-}^{m^+} F_m \exp(i\eta\rho \cos(w_m + \theta)) [\dots] =$$

$$= -\frac{1}{\eta u_0} \frac{\exp(i\eta\rho)}{\sqrt{\eta\rho}} \sum_{m=-m^-}^{m^+} \frac{F_m}{a_m}. \text{ Приведем подобные члены в (23а) и ограничимся одним главным членом асимптотического ряда. Нетрудно видеть, что выражение (23а) преобразуется в традиционную асимптотическую формулу оценки интеграла, не имеющего особенностей на пути интегрирования.}$$

Если  $\frac{\eta u_0}{2\pi} (1 + \sin \alpha) < 1$ , т. е. в суммах остается только одно слагаемое с  $m = 0$ , то в поле (23а) нет распространяющихся гармоник, кроме основной отраженной волны. Тогда выражение (23а) упрощается:

$$H_s(\rho, \theta) = \tilde{Q} \left\{ \frac{\exp(i\eta\rho)}{\sqrt{\eta\rho}} \left[ \left( A_0 + \frac{1}{\eta u_0} \frac{F_0}{\sin(\theta + \alpha)/2} \right) + \right. \right.$$

$$+ \frac{1}{\eta\rho} \left( A_2 + \frac{i}{4\eta u_0} \frac{F_0}{\sin^3(\theta + \alpha)/2} \right) \left. \right] +$$

$$+ \frac{2iF_0}{\eta u_0} \exp(i\eta\rho \cos(\theta + \alpha)) \times$$

$$\times \left[ \frac{1+i}{2} - C(\sqrt{2\eta\rho} \sin(\theta + \alpha)/2) - \right.$$

$$\left. - iS(\sqrt{2\eta\rho} \sin(\theta + \alpha)/2) \right\}, \quad (23б)$$

где  $F_0 = \frac{J_1(\eta \sin \alpha)}{\eta \sin \alpha}$ . Первое слагаемое в (23б) по-прежнему описывает поле, связанное с рассеянием от края структуры. Следовательно, при отсутствии распространяющихся пространственных гармоник полубесконечная решетка из узких редко расположенных лент может интерпретироваться как полупрозрачная полуплоскость.

В заключение заметим, что полученные результаты легко переносятся на случай  $E$ -поляризации (с ненулевыми компонентами поля  $E_x$ ,  $H_y$  и  $H_z$ ). Кроме того, полученное в работе операторное уравнение (10) пригодно для решения задачи о дифракции на многоэлементной (с лентами различной ширины) полубесконечной решетке. В этом случае нужно сначала найти оператор отражения для группы разных по ширине лент, составляющих период многоэлементной решетки (см. [16]), а затем заменить им оператор  $\mathbf{r}$  в полученном уравнении.



### 6. Дифракция электромагнитных волн на полубесконечной решетке типа “жалюзи”

В задаче о плоской полубесконечной решетке удобно оперировать фурье-амплитудами токов, текущих по лентам. По-видимому, это единственно возможный способ учесть взаимное влияние лент в планарной структуре в рамках операторного метода. Если же решетка неплоская (решетка типа “жалюзи”), то существует иной способ построения операторного уравнения. В этом случае можно воспользоваться амплитудами Фурье полей, существующих в областях между плоскостями, в которых лежат ленты, для вывода уравнения относительно оператора отражения от полубесконечной решетки. Именно так строилось решение в [5]. В процессе решения также используется свойство трансляционной симметрии структуры, однако техника применения операторного метода другая.

Рассмотрим решетку, состоящую из тонких идеально проводящих лент, расположенных периодически в магнито-диэлектрическом полупространстве ( $z < 0$ ), начиная с некоторого расстояния  $h \cos \psi$  от ее поверхности (см. рис. 2). Падающая волна с полем (1) приходит из верхнего

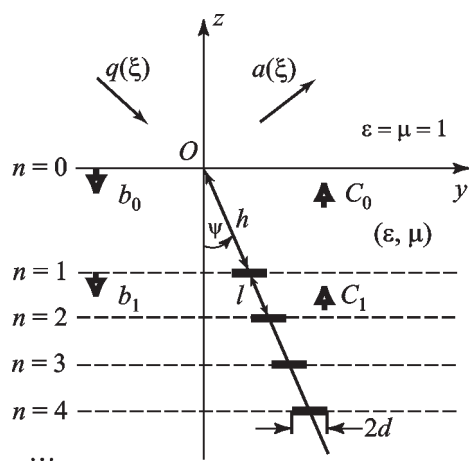


Рис. 2. Геометрия задачи дифракции на решетке “жалюзи”

полупространства и облучает структуру. Будем использовать амплитуды Фурье полей в областях, ограниченных плоскостями, в которых расположены ленты, и строить операторные соотношения, связывающие эти амплитуды. Операторы, необходимые для записи соотношений на границе магнитодиэлектрика (т. е. в плоскости  $z = 0$ ) и между соседними лентами:

- $\mathbf{r}_0^\pm$  и  $\mathbf{t}_0^\pm$  – операторы отражения и прохождения границы  $z = 0$  (знак плюс соответствует случаю распространения волн в направлении возрастания координаты  $z$  и знак минус – противоположному направлению);

- $\mathbf{e}_{zh}$  и  $\mathbf{e}_{zl}$  – операторы, описывающие изменение фазы поля при смещении точки наблюдения вдоль оси  $Oz$  в направлении распространения волны ( $\mathbf{e}_{zh}$  – в области, начинающейся от поверхности магнитодиэлектрика вплоть до плоскости, в которой лежит первая лента решетки, а  $\mathbf{e}_{zl}$  – в областях между плоскостями, в которых расположены соседние ленты решетки);

- $\mathbf{e}_{yh}^\pm$  и  $\mathbf{e}_{yl}^\pm$  – операторы, описывающие изменение фазы поля при смещении точки наблюдения вдоль оси  $Oy$  (знак плюс следует использовать, если смещение происходит в положительном направлении оси  $Oy$  а знак минус – в обратном; индексы  $h$  и  $l$  обозначают те же самые области, что и в предыдущем случае);

- $\mathbf{r}$  – оператор отражения от одной металлической ленты, расположенной в магнитодиэлектрической среде ( $\epsilon, \mu$ ) отличающийся от (7) только тем, что вместо  $\gamma(\zeta)$  необходимо использовать функцию  $\gamma^-(\zeta) = \sqrt{\eta^2 \epsilon \mu - \zeta^2}$ ;

- $\mathbf{R}$  – оператор отражения от полубесконечной ленточной решетки типа “жалюзи”, находящейся в магнитодиэлектрической среде с относительной диэлектрической  $\epsilon$  и магнитной  $\mu$  проницаемостями.

Результат действия операторов  $\mathbf{r}_0^\pm$  и  $\mathbf{t}_0^\pm$ ,  $\mathbf{e}_{zh}$  и  $\mathbf{e}_{zl}$ ,  $\mathbf{e}_{yh}^\pm$  и  $\mathbf{e}_{yl}^\pm$  на функцию  $g$  имеет следующий вид:

$$(\mathbf{r}_0^\pm g)(\xi) = \pm \frac{\gamma^-(\xi) - \varepsilon \gamma(\xi)}{w(\xi)} g(\xi), \quad w(\xi) = \gamma^-(\xi) + \varepsilon \gamma(\xi),$$

$$(\mathbf{t}_0^+ g)(\xi) = \frac{2\varepsilon \gamma^-(\xi)}{w(\xi)} g(\xi),$$

$$(\mathbf{t}_0^- g)(\xi) = \frac{2\gamma(\xi)}{w(\xi)} g(\xi),$$

$$(\mathbf{e}_{zh} g)(\xi) = \exp\left(i\gamma^-(\xi)\tilde{h} \cos \psi\right) g(\xi),$$

$$(\mathbf{e}_{zl} g)(\xi) = \exp\left(i\gamma^-(\xi)\tilde{l} \cos \psi\right) g(\xi),$$

$$(\mathbf{e}_{yh}^\pm g)(\xi) = \exp(\pm i\xi\tilde{h} \sin \psi) g(\xi),$$

$$(\mathbf{e}_{yl}^\pm g)(\xi) = \exp(\pm i\xi\tilde{l} \sin \psi) g(\xi),$$

где  $\tilde{h} = h/d$  и  $\tilde{l} = l/d$  – безразмерные величины.

Граничные условия в плоскостях  $z = 0$  и  $z = -h \cos \psi$  позволяют получить следующие шесть операторных соотношений:

$$a(\xi) = \mathbf{r}_0^+ q(\xi) + \mathbf{t}_0^+ c_0(\xi), \quad (24a)$$

$$b_0(\xi) = \mathbf{t}_0^- q(\xi) + \mathbf{r}_0^- c_0(\xi), \quad (24б)$$

$$c_0(\xi) = \mathbf{e}_{yh}^- \mathbf{e}_{zh} \mathbf{R} \mathbf{e}_{yh}^+ \mathbf{e}_{zh} b_0(\xi), \quad (24в)$$

$$c_0(\xi) = \mathbf{e}_{yh}^- \mathbf{e}_{zh} \left( (\mathbf{I} - \mathbf{r}) c_1(\xi) + \mathbf{r} \mathbf{e}_{yh}^+ \mathbf{e}_{zh} b_0(\xi) \right), \quad (24г)$$

$$b_1(\xi) = \mathbf{r} c_1(\xi) + (\mathbf{I} - \mathbf{r}) \mathbf{e}_{yh}^+ \mathbf{e}_{zh} b_0(\xi), \quad (24д)$$

$$c_1(\xi) = \mathbf{e}_{yl}^- \mathbf{e}_{zl} \mathbf{R} \mathbf{e}_{yl}^+ \mathbf{e}_{zl} b_1(\xi). \quad (24е)$$

Из четырех уравнений (24в)–(24е) после алгебраических преобразований можно получить нелинейное операторное уравнение относительно оператора отражения полубесконечной решетки  $\mathbf{R}$  в виде:

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + (\mathbf{I} - \mathbf{r})(\mathbf{I} - \mathbf{E}_l \mathbf{R} \mathbf{E}_l^+ \mathbf{r})^{-1} \mathbf{E}_l \mathbf{R} \mathbf{E}_l^+ (\mathbf{I} - \mathbf{r}), \quad (25)$$

где  $\mathbf{E}_l^\pm = \mathbf{e}_{yl}^\pm \cdot \mathbf{e}_{zl}$ .

Из трех операторных соотношений (24а)–(24в) можно получить выражение для амплитуды Фурье отраженного поля в верхнем полупространстве ( $z > 0$ ):

$$a(\xi) = \left( \mathbf{r} + (\mathbf{I} - \mathbf{r})(\mathbf{I} - \mathbf{E}_l \mathbf{R} \mathbf{E}_l^+ \mathbf{r})^{-1} \mathbf{E}_l \mathbf{R} \mathbf{E}_l^+ (\mathbf{I} - \mathbf{r}) \right) q(\xi).$$

Отметим, что аналогичный подход был успешно применен для анализа полубесконечной структуры, состоящей из периодически расположенных плоских слоев диэлектрика [5] и полубесконечной системы плоских ленточных решеток [9]. Уравнение (25) с точностью до обозначений совпадает с операторным уравнением, полученным в [5]. Заметим, однако, что в уравнении (25) операторы  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{R}$  интегральные, тогда как в [5, 9] операторы, входящие в нелинейное операторное уравнение, имеют матричный вид.

### Заключение

В работе, в строгой постановке задачи дифракции, получены нелинейные уравнения относительно оператора рассеяния от полубесконечных решеток из лент, как плоской, так и типа “жалюзи”. Для плоской полубесконечной решетки из узких редко расположенных лент получено асимптотическое выражение отраженного поля в волновой зоне в случае плоской падающей волны. Оно может служить начальным приближением для процедуры численного решения нелинейного операторного уравнения.

### Литература

1. Фельд Я. Н. Дифракция электромагнитной волны на полубесконечной решетке // Радиотехника и электроника. – 1958. – Т. 3, №7. – С. 882-889.
2. Hills N. L., Karp S. N. Semi-infinite Diffraction Gratings – I // Communications on Pure and Applied Mathematics. – 1965. – Vol. 18, No. 1/2. – P. 203-233.

3. Hills N. L. Semi-infinite Diffraction Gratings – II. Inward resonance // *Communications on Pure and Applied Mathematics*. – 1965. – Vol. 18, No. 3. – P. 385-395.
4. Skinner J. P., Collins P. J. A One-Sided Version of the Poisson Sum Formula for Semi-Infinite Array Green's Functions // *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. – 1997. – Vol. 45, No. 4. – P. 601-607.
5. Литвиненко Л. Н., Резник И. И., Литвиненко Д. Л. Рассеяние волн полубесконечными периодическими структурами // *Доклады АН УССР*. – 1991, №6. – С. 62-67.
6. Литвиненко Л. Н., Просвирнин С. Л. Спектральные операторы рассеяния в задачах дифракции волн на плоских экранах. – Киев: Наукова думка, 1984. – 240 с.
7. Воробьев С. Н., Просвирнин С. Л. Метод моментов в задаче о рассеянии электромагнитных волн на металлической ленте. Распространение и дифракция радиоволн в мм и субмм диапазонах. – Киев: Наукова думка, 1984. – С. 138-145.
8. Воробьев С. Н., Просвирнин С. Л. Метод моментов в задаче дифракции на ленте // *Радиотехника и электроника*. – 1985. – Т. 30, №1. – С. 163-165.
9. Литвиненко Л. Н., Просвирнин С. Л. Анализ дифракции волн на последовательности идентичных ленточных решеток. Многоволновый режим // *Радиофизика и радиоастрономия*. – 1999. – Т. 4, №3. – С. 276-286.
10. Свешников А. Г. Принцип предельного поглощения для волновода // *ДАН СССР*. – 1951. – Т. 80, №3. – С. 345-347.
11. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1968. – 512 с.
12. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. Том 1. – М.: Мир, 1978. – 547 с.
13. Bernard G. D., Ishimaru A. On Complex Waves, *Proceedings IEE*. – 1967. – Vol. 114, No. 1. – P. 43-49.
14. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. Для научных работников и инженеров. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1974. – 832 с.
15. Митра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. – М.: Мир, 1974. – 323 с.
16. Воробьев С. Н., Литвиненко Л. Н., Просвирнин С. Л. Дифракция электромагнитных волн на структуре из конечного числа неэквидистантно расположенных лент различной ширины. Сравнение спектрального и операторного методов // *Радиофизика и радиоастрономия*. – 1996. – Т.1, №1. – С. 110-118.

## Операторний метод у задачі дифракції електромагнітних хвиль на напівнескінчених стрічкових решітках

С. М. Воробйов, Л. М. Литвиненко,  
С. Л. Просвирнін

Операторний метод, що використовує властивості трансляційної симетрії напівнескінченної періодичної структури, узагальнено для розсіювачів у вигляді металевих стрічок. Задачу дифракції електромагнітної хвилі на напівобмежених стрічкових решітках у строгому формулюванні зведено до розв'язання нелінійного рівняння відносно шуканого оператора відбиття від напівнескінченної решітки. Знайдено наближений аналітичний розв'язок рівняння для випадку плоскої решітки з вузьких та рідко розташованих стрічок. Отримано асимптотичне зображення для поля, розсіяного плоскою напівобмеженою стрічковою решіткою, котре може бути використане як початкове наближення для ітераційної процедури числового розв'язку.

## Operator Method in Electromagnetic Wave Diffraction by Semi-Infinite Strip Gratings

S. N. Vorobyov, L. M. Lytvynenko,  
and S. L. Prosvirnin

An operator method using the translation symmetry of a semi-infinite periodic structure is generalized of the scatterers being metal strips. The rigorously formulated problem of electromagnetic wave diffraction by semi-infinite strip gratings is reduced to the solution of the nonlinear equation with respect to the sought reflection operator of a semi-infinite grating. The approximate analytical solution is found for the plane grating with the assumption that its strips are narrow and sparsely spaced. The asymptotic representation for the field scattered by a plane semi-infinite grating is obtained. It can be used as the initial approximation for an iteration procedure of the numerical solution.