Радиофизика и радиоастрономия, 2005, т. 10, №2, с. 135-142

УДК 621.371.162

Преобразование Ватсона для когерентного электромагнитного поля, рассеянного статистически неровной сферой. IV. Численный анализ

А. С. Брюховецкий, Л. А. Пазынин

Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины, ул. Ак. Проскуры, 12, г. Харьков, 61085, Украина
ire@ire.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 30 ноября 2004 г.

Исследуются аналитические свойства выражений для эффективного импеданса когерентного рассеянного поля, полученные ранее. Для спектра неровностей достаточно общего вида выполнен численный счет и проведено сравнение с известными эвристическими моделями оценок ослабления поля в зоне тени большой статистически неровной сферы.

1. Введение

В предыдущих частях нашего исследования [1-3] было получено аналитическое продолжение в комплексную плоскость углового момента выражений, определяющих в приближении Бурре эффективный импеданс когерентно рассеянного поля. Практическая реализация численных расчетов по полученным формулам требует их дополнительного анализа в связи с наличием особых точек у вычисляемых величин.

Задачей этой части исследования является проведение такого анализа, численных расчетов в случае спектра неровностей $\tilde{W}(\chi)$ достаточно общего вида и сравнение результатов расчетов с некоторыми эвристическими моделями.

2. Преобразование $l' \to l' - 2$ для $SUM_2^{E,M(e,o)}2$ и $SUM_5^{E,M(e,o)}2$

Опуская для краткости обозначений верхние индексы E, M и нижние 2, 5, запишем $SUM^{(e,o)}2$ (формулы (34), (45) из [3]) схематически в виде:

$$SUM^{(e)}2 = \left(\sum_{n_4=2m'+1}^{\infty}{}^{(')} \sum_{l'=2m'-n_4}^{n_4-2m'-2}{}^{(')} + \right.$$
$$\left. + \sum_{n_4=2m'+2}^{\infty}{}^{(')} \sum_{l'=2m'-n_4}^{n_4-2m'-2}{}^{(')} \right) F^{(e)}(n,n_4,l), \tag{1}$$

$$SUM^{(o)}2 = \left(\sum_{n_4=2m'+1}^{\infty}{}^{(')} \sum_{l'=2m'-n_4+1}^{n_4-2m'-1}{}^{(')} + \right.$$
$$\left. + \sum_{n_4=2m'+2}^{\infty}{}^{(')} \sum_{l'=2m'-n_4+1}^{n_4-2m'-1}{}^{(')} \right) F^{(o)}(n,n_4,l). \tag{2}$$

Напомним, что $n = n' + \Delta n$; $l = l' + \Delta n$; $n' = 2m'$ – целая часть от $\mathrm{Re}\, n$ (принятая четной); индекс $(')$ означает суммирование с шагом 2, а индексы (e,o) означают слагаемые с четным $z_3 = n + n_4 - l \equiv z_3'$ и нечетным z_3 соответственно.

Рассмотрим преобразование (замену) $l' \to -l' - 2$. Для него прямая $l' = -1$ переходит в саму себя, прямая $l' = -2$ переходит в $l' = 0$, нижняя граница сектора суммирования $l' = 2m' - n_4$ переходит в прямую

$l' = n_4 - 2m' - 2$, а прямая $l' = 2m' - n_4 + 1$ в прямую $l' = n_4 - 2m' - 3$.

Это означает, что все слагаемые $F^{(e,o)}(n,n_4,l)$ с $l' < -1$ переходят в $\left\{F^{(e,o)}(n,n_4,l)\right\}$ со значением $|l'| - 2$ вместо l', а $\left\{F^{(e,o)}(n,n_4,l)\right\} \equiv F^{(e,o)}(n' + \Delta n, n_4, -l' - 2 + \Delta n)$ – результат преобразования. Тогда для (1), (2) получим

$$SUM^{(e)}2 =$$
$$= \left(\sum_{n_4=2m'+2}^{\infty}{}^{(\prime)} \sum_{l'=0}^{n_4-2m'-2}{}^{(\prime)} + \sum_{n_4=2m'+3}^{\infty}{}^{(\prime)} \sum_{l'=1}^{n_4-2m'-2}{}^{(\prime)} \right) \times$$
$$\times \left((F^{(e)}(n,n_4,l) + \left\{F^{(e)}(n,n_4,l)\right\} \right) +$$
$$+ \sum_{n_4=2m'+1}^{\infty}{}^{(\prime)} F^{(e)}(n,n_4,l)\big|_{l'=-1}, \qquad (3)$$

$$SUM^{(o)}2 =$$
$$= \left(\sum_{n_4=2m'+3}^{\infty}{}^{(\prime)} \sum_{l'=0}^{n_4-2m'-3}{}^{(\prime)} + \sum_{n_4=2m'+4}^{\infty}{}^{(\prime)} \sum_{l'=1}^{n_4-2m'-3}{}^{(\prime)} \right) \times$$
$$\times \left(F^{(o)}(n,n_4,l) + \left\{F^{(o)}(n,n_4,l)\right\} \right) +$$
$$+ \sum_{n_4=2m'+2}^{\infty}{}^{(\prime)} F^{(o)}(n,n_4,l)\big|_{l'=-1} +$$
$$+ \sum_{n_4=2m'+1} {}^{(\prime)} F^{(o)}(n,n_4,l)\big|_{l'=n_4-2m'-1}. \qquad (4)$$

Значения $F_2^{E,M(e,o)}(n,n_4,l)$ и $F_5^{E,M(e,o)}(n,n_4,l)$, стоящие под знаками этих сумм, даны в тексте [3] формулами (46)-(51), (14)-(16). Величины $C^2(0)$ и $A_2^2\tilde{C}^2(0)$, входящие в них, определяются формулами (А1) и (А4) (см. [3], Приложение А), где следует учесть, что в узлах суммирования по n_4 и l' величина $z_3 \equiv n + n_4 - l \equiv n' + n_4 - l' \equiv z_3'$ является целым (четным либо нечетным) числом и, соответственно, $\cos^2\left(\dfrac{\pi z_3}{2}\right) \equiv 1$ либо $\sin^2\left(\dfrac{\pi z_3}{2}\right) \equiv 1.$

Для удобства дальнейших вычислений введем центрированное относительно $1/2$ значение $\Delta n = 1/2 + \delta n$, для которого $-1/2 \le \mathrm{Re}\,\delta n < 1/2$. Тогда

$$\begin{cases} z_0 \equiv z_0' + 1 + 2\delta n = n' + n_4 + l' + 1 + 2\delta n, \\ z_1 \equiv z_1' = -n' + n_4 + l', \\ z_2 \equiv z_2' + 1 + 2\delta n = n' - n_4 + l' + 1 + 2\delta n, \\ z_3 \equiv z_3' = n' + n_4 - l'. \end{cases} \qquad (5)$$

Особо подчеркнем, что $z_1 \equiv z_1'$ и $z_3 \equiv z_3'$ являются целыми числами с одинаковой четностью. На рис. 1 в [3] изображены линии $z_i' = 0$, $(i = 0, 1, 2, 3)$, делящие плоскость n_4, l' на части, где $z_i' > 0$ (обозначено +) и $z_i' < 0$ (обозначено –). Поведение $f(z_i)$ из формул (А1) и (А4) в этих частях плоскости n_4, l' совершенно разное в силу свойств Г-функции.

Для $z_i' < 0$ поведение $f(z_i)$ обусловлено полюсами Г-функции при целых $z_i \le 0$. Из рис. 1 видно, что для $SUM^{(e,o)}2$ таковым является z_2. Поэтому при вычислениях асимптотик следует, во-первых, точно учесть главную часть лорановских разложений в окрестности полюсов и перейти от z_2 к $-z_2$, выделив полюса в виде отдельного сомножителя, во-вторых, с помощью преобразования $l' \to -l' - 2$ скомбинировать слагаемые с $l' \le -2$ из нижней части сектора суммирования со слагаемыми с $l' \ge 0$ из верхней части (формулы (3), (4)). Как будет видно в дальнейшем, при таком сложении главные части лорановских разложений в точках полюсов точно взаимно уничтожаются и $SUM^{(e,o)}2$ остается конечной величиной.

Результат преобразования $l' \to -l' - 2$ для z_i выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \{z_0\} = z_3' - 1 + 2\delta n = z_3 - 1 + 2\delta n, \\ \{z_1\} = -z_2' - 2 = -z_2 - 1 + 2\delta n, \\ \{z_2\} = -z_1' - 1 + 2\delta = -z_1 - 1 + 2\delta n, \\ \{z_3\} = z_0' + 2 = z_0 + 1 - 2\delta n. \end{cases} \qquad (6)$$

Аналогично

$$2l+1=2l'+2+2\delta n, \qquad \{2l+1\}=-2l'-2+2\delta n,$$

$$y_3=\left(l'+\frac{1}{2}+\delta n\right)\left(l'+\frac{3}{2}+\delta n\right),$$

$$\{y_3\}=\left(l'+\frac{1}{2}-\delta n\right)\left(l'+\frac{3}{2}-\delta n\right),$$

$$y_1=\{y_1\}=\left(n'+\frac{1}{2}+\delta n\right)\left(n'+\frac{3}{2}+\delta n\right),$$

$$y_2=\{y_2\}=n_4(n_4+1), \qquad \{A_1\}=\frac{y_1-y_2+\{y_3\}}{2\sqrt{y_1\{y_3\}}},$$

$$\hat{\Omega}_l^{\pm}=\hat{\Omega}^{\pm}_{l'+\frac{1}{2}+\delta n}, \qquad \{\hat{\Omega}_l^{\pm}\}=\hat{\Omega}^{\pm}_{l'+\frac{1}{2}-\delta n}.$$

Используя связь $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\pi/\sin(\pi z)$, сделаем преобразование:

$$f(z_2)=\frac{\sin\frac{\pi}{2}(z_1-1-2\delta)}{\sin\frac{\pi}{2}(z_1-2\delta)}\tilde{f}(z_2), \tag{7}$$

где

$$\tilde{f}(z_2)=\Gamma\left(-\frac{z_2}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{1-z_2}{2}\right) \tag{8}$$

выражается через Г-функции с неотрицательной действительной частью аргумента. При получении (7) использована связь $z_2=-z_1+1+2\delta+2l'$ из определений z_i с четным $2l'$. При этом возможные полюса Г-функций в $f(z_2)$ переходят в нули соответствующих синусов в соотношении (7).

Из одинаковой четности z_1' и z_3' следует, что при четных z_3' отношение синусов в (7) равно $\mathrm{tg}^{-1}(\pi\delta n)$, а для нечетных z_3' – $\left(-\mathrm{tg}^{-1}(\pi\delta n)\right)$. Отсюда для z_3 четных

$$C^2(0)=\frac{2l'+2+2\delta n}{\pi\,\mathrm{tg}(\pi\delta n)}\times$$

$$\times\frac{f(z_1')f(z_3')\tilde{f}(z_2'+1+2\delta n)}{(z_0'+2+2\delta n)f(z_0'+1+2\delta n)}, \tag{9}$$

$$\{C^2(0)\}=-\frac{2l'+2-2\delta n}{\pi\,\mathrm{tg}(\pi\delta n)}\times$$

$$\times\frac{f(z_1'-2\delta n)f(z_3'+2\delta n)\tilde{f}(z_2'+1)}{(z_0'+2)f(z_0'+1)}, \tag{10}$$

и, аналогично, для z_3 нечетных

$$A_2^2\tilde{C}^2(0)=-\frac{2l'+2+2\delta n}{\pi\,\mathrm{tg}(\pi\delta n)}\frac{1}{y_1y_3}\times$$

$$\times\frac{(z_0'+2+2\delta n)f(z_0'+2+2\delta n)}{f(z_1')f(z_3')\tilde{f}(z_2'+1+2\delta n)}, \tag{11}$$

$$\{A_2^2\tilde{C}^2(0)\}=\frac{2l'+2-2\delta n}{\pi\,\mathrm{tg}(\pi\delta n)}\frac{1}{y_1\{y_3\}}\times$$

$$\times\frac{(z_0'+2)f(z_0'+1)}{f(z_1'-2\delta n)f(z_3'+2\delta n)\tilde{f}(z_2'+1)}. \tag{12}$$

Из этих формул видно, что слагаемые в двойных суммах (3), (4) для полуцелых значений $n=n'+1/2$ (т. е. при $\delta n=0$) имеют полюса $(\mathrm{tg}(\pi\delta n)\to 0)$, которые при $\delta n=0$ будут складываться с разными знаками из-за первого сомножителя $\pm(2l'+2+2\delta n)/\pi$, т. к. остальные величины при $\delta n\to 0$ инвариантны: $\{A_1\}\to A_1$, $\{y_3\}\to y_3$, $\{\hat{\Omega}_l^{\pm}\}\to\hat{\Omega}_l^{\pm}$. Учет следующих членов разложения ~ $\delta n/l'$, $\delta n/z_i$ при $\delta n\neq 0$ приводит к конечным значениям слагаемых в силу предельного перехода $\lim(\delta n/\mathrm{tg}(\pi\delta n))=1/\pi$.

Для слагаемых одинарной суммы по n_4 в $SUM^{(o)}2$ в пограничных точках на прямой

$l' = n_4 - 2m' - 1 \quad \left(z_2 = 2\delta n, -1/2 \le \mathrm{Re}\,\delta n < 1/2\right)$ при $\delta n \to -1/2$ имеем оценку $(n_4 > 2m' + 1)$:

$$F_2^{(o)}(n, n_4, l) \sim A_2^2 \tilde{C}^2(0) \sim \frac{2l' + 2 + 2\delta n}{y_3 f(z_2)} \sim$$

$$\sim \frac{\Gamma(\delta n + 1)}{\Gamma\left(\delta n + \frac{1}{2}\right)} \sim \frac{1}{\Gamma\left(\delta n + \frac{1}{2}\right)} \to \frac{1}{\Gamma(0)} = 0.$$

Точки $\delta n = 0$ и $\delta n = +1/2$ для этой суммы являются регулярными, за исключением слагаемого с $n_4 = 2m' + 1$. Для этого слагаемого $l' = 0$,

$$y_3 = \left(\delta n + \frac{1}{2}\right)\left(\delta n + \frac{3}{2}\right), \qquad 2l' + 2 + 2\delta n = 2\left(1 + \delta n\right) \text{ и}$$

$$F_2^{(o)}(n, n_4 l) \sim \frac{2(1 + \delta n)}{\left(\delta n + \frac{3}{2}\right)\left(\delta n + \frac{1}{2}\right)} \frac{\Gamma(\delta n + 1)}{\Gamma\left(\delta n + \frac{1}{2}\right)} =$$

$$= 2(1 + \delta n) \frac{\Gamma(\delta n + 1)}{\Gamma\left(\delta n + \frac{5}{2}\right)} \sim \text{const},$$

несмотря на то, что $\underset{\delta n \to -1/2}{y_3 \to 0}$. Это значение при умножении на $\Gamma\left(\delta n + 1/2\right)$ компенсируется полюсом $\Gamma(0)$.

Рассмотрим поведение одинарных сумм по n_4 в (3) и (4) в точках на прямой $l' = -1$:

$$F_2^{(o)}(n, n_4, l) \sim A_2^2 \tilde{C}^2(0) \sim 2 \frac{(l' + 1 + \delta n)}{y_3} \frac{1}{f(z_2)} \sim$$

$$\sim \frac{2\delta n}{\left(\delta n - \frac{1}{2}\right)\left(\delta n + \frac{1}{2}\right)\mathrm{tg}(\pi \delta n)} \frac{1}{\tilde{f}(z_2)} \sim \text{const}$$

при $\delta n = 0$ и $\delta n = \pm 1/2$, поскольку функция $\tilde{f}(z_2)$ регулярна при $\mathrm{Re}\, z_2 < 0$.

Аналогично для четной суммы при $l' = -1$ и $n_4 \ge 2m' + 1$ имеем $\mathrm{Re}\, z_2 \le \mathrm{Re}(-1 + 2\delta n) < 0$, $2l' + 2 + \delta n = 2\delta n$ и

$$F_2^{(e)}(n, n_4, l) \sim A_1^2 C(0)^2 \sim \frac{y_1 - y_2 + y_3}{y_3} \times$$

$$\times \left(\frac{2l' + 1 + \delta n}{\mathrm{tg}(\pi \delta n)}\right) \tilde{f}(z_2) \sim \frac{y_1 - y_2 + y_3}{y_3} \frac{2\delta n}{\mathrm{tg}(\pi \delta n)},$$

где $y_3 = \left(\delta n + 1/2\right)\left(\delta n + 3/2\right)$. Как и для нечетной суммы, точки $\delta n = 0$ и $\delta n = \pm 1/2$ являются регулярными.

Вне малых окрестностей точек $\delta n = 0$ и $\delta n = \pm 1/2$ вычисление $SUM_2^{(e,o)}2$ не представляет принципиальных затруднений, хотя и сопряжено с преодолением сложностей технического характера.

Для $SUM_5^{(e,o)}2$ проблемы вычисления на прямой $l' = -1$ и в точке $l' = 0$, $n_4 = 2m' + 1$ менее сложны, поскольку A_1^2 и A_2^2 в формулах (14) и (15) из [3] умножаются на величину $y_3' = l(l + 1)$, которая обращается в нуль при $\delta n = -1/2$.

В остальных точках поведение этих сумм определяется поведением $C(0)^2$ и $A_2^2 \tilde{C}(0)^2$, как и в случае $SUM_2^{(e,o)}2$.

Следует еще сделать замечание о поведении $F_2^{E,M(e,o)}(n, n_4, l)$ в $SUM_2 1$ ([3], формулы (47)-(51)) в точке $n_4 = 2m'$, $l' = 0$. В этой точке $z_3 \equiv z_3' = 4m'$ – четное, $z_1 = 0$, $\mathrm{Re}\, z_2 = \mathrm{Re}(1 + 2\delta n) \ge 0$. Поскольку $z_1 + 1 > 0$ и $\mathrm{Re}(z_2 + 1) > 1$, проблемы могут быть только при вычислении A_1^2 в связи с тем, что $y_3 = \left(\delta n + 1/2\right)\left(\delta n + 3/2\right) \to 0$ при $\delta n \to -1/2$.

В этом случае $\left(\Delta n = 1/2 + \delta n \to 0\right)$

$$F_2^{(e)}(n, n_4, l) \sim A_1^2 \sim \frac{(y_1 - y_2 + y_3)^2}{y_3} \sim$$

$$\sim \frac{\left(\Delta n\left[2m' + 2 + 2\Delta n\right]\right)^2}{\Delta n(1 + \Delta n)} \to 0$$

обращается в нуль при $\delta n \to -1/2$ и, на самом деле, особенность в этой точке устранимая. Для целочисленных n (т. е. при $\delta n \to \pm 1/2$) величины (9)-(12) обращаются в нуль, что соответствует исходной предпосылке аналитического продолжения сумм (2) и (3) в [3]. Для зоны тени вычисления $SUM2$ несколько упрощаются из-за наличия у δn большой мнимой части порядка $x^{1/3}$ (т. к. $x \gg 1$). При этом

$$\mathrm{tg}(\pi\delta n) = \frac{\sin(2\pi\,\mathrm{Re}(\delta n))}{\cos(2\pi\,\mathrm{Re}(\delta n)) + \mathrm{ch}(2\pi\,\mathrm{Im}(\delta n))} +$$

$$+ i\frac{\mathrm{sh}(2\pi\,\mathrm{Im}(\delta n))}{\cos(2\pi\,\mathrm{Re}(\delta n)) + \mathrm{ch}(2\pi\,\mathrm{Im}(\delta n))} \approx i.$$

Как и в случае $SUM1$ (см. [3]), переход от суммирования к приближенному интегрированию осуществляется с помощью замен:

$$n_4/a \to \chi, \quad \left(\mathrm{d}\chi = \frac{2}{a}\right), \qquad \frac{l'}{a} = q', \quad \left(\mathrm{d}q' = \frac{2}{a}\right) \tag{13}$$

$$\sum_{n_4}{}^{(\prime)} \to \frac{a}{2}\int \mathrm{d}\chi, \qquad \sum_{l'}{}^{(\prime)} \to \frac{a}{2}\int \mathrm{d}q' \tag{14}$$

с соответствующими пределами интегрирования. Технические трудности вычислений обусловлены тем, что в суммах (1), (2) слагаемые с $l' < 0$ почти всюду в значительной мере компенсируются слагаемыми с $|l'| - 2 > 0$, за исключением относительно узких окрестностей вблизи $l' = 0$, $l' = n_4 - 2m' - 3$, а также $l' \sim n' \sim x$, где резко изменяется $\ln' \hat{\varsigma}_l(x)$ в выражении для $\hat{\Omega}_l^+$ ([3], формула (52)). Перепад значений при этом достигает величины $l' \sim x \gg 1$. Поэтому численное интегрирование требует применения алгоритмов, адаптированных к такому поведению функций.

3. Результаты расчетов и сравнение с эвристическими моделями

В отсутствие подходящего решения задачи рассеяния на шероховатой сфере для практических оценок затухания радиоволн над статистически неровной сферой использовались эвристические модели. Из числа таких нам известны две.

Первая из них (см. [4], § 7) предполагает, что ослабление когерентного поля над реальной сферой такое же, как и над фиктивной сферой того же радиуса, но с импедансом, равным эффективному импедансу плоских волн, скользящих вдоль шероховатой плоскости с теми же неровностями.

Во второй модели [5] импеданс фиктивной сферы принимается равным эффективному импедансу ценнековской волны, скользящей вдоль аналогичной шероховатой плоскости. При этом математические построения с системой “ценнекоподобных” волн недостаточно корректны, как указывал Уэйт в работе [6], из-за неортогональности и неполноты системы.

Развитая нами теория возмущений позволяет сравнить следующие из нее результаты с этими эвристическими моделями. Очевидно, что первая из указанных моделей следует из асимптотического представления (42) и (43) в [3] в качестве главного члена разложения (если положить $k_\perp \approx k$, $k_z \approx 0$ в (56) и пренебречь $SUM_2 2$ и $SUM_5 2$ соответственно).

Вторая модель, предложенная Барриком из теории возмущений, из этого асимптотического разложения не следует. Однако расчеты показывают, что отличия в добавках $\Delta\tilde{\eta}^E_{\mathrm{eff}}(n)$ в обеих моделях малы [7] в такой же степени (порядка $\tilde{\eta}_0 k/\chi$), в какой ценнековская волна отличается от плоской на расстояниях порядка радиуса корреляции χ^{-1}, а отличие множителей ослабления еще меньше. Поэтому, несмотря на искусственный характер модели, расчеты Баррика при $|\tilde{\eta}_0| \ll \chi/k$ практически не отличаются от соответствующей асимптотики теории возмущений.

Строго обосновать малость $SUM_{2,5}2$ по сравнению с $SUM_{2,5}1$ не представляется возможным. Поэтому для конкретной ситуации рассеяния над морской поверхностью мы провели численные расчеты [3], результаты которых подтверждают качественные оценки малости указанных величин.

В расчетах значение радиочастот $\mathrm{FR} = 5, 10, 20, 30$ МГц, скорость ветра $V = 15$ м/с, проводимость морской воды $\mathrm{SIGMA} = 4$ См, приведенная (деленная на ε воздуха) диэлектрическая проницаемость $\mathrm{EPS} = 80$, “эффективный” радиус Земли $a = 8400$ км.

В качестве спектра морского волнения выбран “полуизотропный” спектр Филлипса [8]

$$\sigma^2 \tilde{W}(\chi) = \begin{cases} 0.5 \cdot 10^{-2} / 2\pi\chi^4 & \text{при } \chi \ge \chi_0 = g/V^2, \\ 0 & \text{при } \chi \ge \chi_0, \end{cases}$$

($g = 9.8$ м/с).

Результаты расчетов приведены в табл. 1-3.

В табл. 1 в качестве примера приведены значения $|F| \equiv \dfrac{2}{\pi x}\left| F_2^{E(e)}(n, n_4, l) + \left\{ F_2^{E(e)}(n, n_4, l) \right\} \right|$ из сектора суммирования $SUM_2^{E(e)}2$ в зависимости от q'/k в трех сечениях (напомним, что $\chi = n_4/a$, $x = ka$, $q' = l'/a$). Данные таблицы иллюстрируют степень взаимной компенсации $F_2^{E(e)}(n, n_4, l)$ и $\left\{ F_2^{E(e)}(n, n_4, l) \right\}$ в различных точках выбранных сечений.

В табл. 2 приведены расчетные значения невозмущенного приведенного импеданса $\tilde{\eta}_0$, добавки $\Delta_2\eta_{xx}$ в эффективном импедансе плоских волн, скользящих вдоль шероховатой плоскости [9], аналогичной добавки для “ценнекоподобных” волн $\Delta\eta_B$ в модели Баррика [5], вклады $-iSUM_2^E 1$ и $-iSUM_2^E 2$ в величину $\Delta_2\eta_{\mathrm{eff}}^E(n)$ (формулы (43)-(45) из [3]).

В табл. 3 приведены вклады $-iSUM_5^E 1$ и $-iSUM_5^E 2$ (формулы (39), (34) и (3) из [3]) в сравнении с $\Delta_1\eta_{xx} \equiv 0$ для плоских волн над шероховатой плоскостью с изотропным спектром неровностей.

Сравнение приведенных данных свидетельствует о том, что, во-первых, вклад сектора $SUM2$ пренебрежимо мал по сравнению с вкладом от полуполосы $SUM1$, во-вторых, сохранение сферических поправок в $SUM1$ приводит к несущественному отличию $\Delta\eta_{eff}^{E,M}(n)$ от значений для плоских волн, скользящих над шероховатой плоскостью.

Таблица 1. *Зависимость* $|F|$ *от* q'/x *в трех сечениях* $\chi/k = const$

$\chi/k = 2.0$		$\chi/k = 10.0$		$\chi/k = 100.0$	
q'/k	$\lvert F\rvert$	q'/k	$\lvert F\rvert$	q'/k	$\lvert F\rvert$
0.0	0.174273E+03	0.0	0.575134E+04	0.0	0.580886E+06
0.1999999949E–03	0.169876E+02	0.10000000474E–02	0.347085E+02	0.9999999776E–02	0.357314E+02
0.4999999873E–03	0.397739E+01	0.50000002374E–02	0.141430E+01	0.5999999865E–01	0.110081E+01
0.1899999952E–02	0.295393E–00	0.15000000712E–01	0.157271E–00	0.1499999966E–00	0.529674E–00
0.9839999896E–00	0.517328E–00	0.98699998983E–00	0.110742E+01	0.7299999836E–00	0.153101E+01
0.9919999900E–00	0.202079E+01	0.99399999016E–00	0.334600E+01	0.9499999787E–00	0.155839E+02
0.9969999903E–00	0.137534E+02	0.99899999040E–00	0.394267E+02	0.9899999778E–00	0.158215E+03
0.9989999904E–00	0.116901E+03	0.99999999045E–00	0.149009E+04	0.9999999776E–00	0.146001E+06
		0.10009999905E+01	0.821623E+02	0.1009999977E+01	0.197203E+03
		0.10069999907E+01	0.352305E+02	0.1049999976E+01	0.160735E+02
		0.10149999911E+01	0.106862E+01	0.1199999973E+01	0.176835E+01
		0.89849156770E+01	0.201006E–00	0.9897691567E+02	0.101028E+01
		0.89959156775E+01	0.148283E+01	0.9899591567E+02	0.140974E+02
		0.89989156777E+01	0.118056E+02	0.9899891567E+02	0.111961E+03
		0.89999156777E+01	0.427831E+04	0.9899991567E+02	0.405410E+05

Таблица 2. *Значение слагаемых в формуле (32) из [3] для* $\Delta_1\eta^E eff(n)$ *в сравнении с* $\Delta\eta_{1xx}$ *из [9]*

F, МГц	$-iSUM_2 1$	$-iSUM_2 2$	$\Delta_2\eta_{xx}$	$\Delta\eta_B$	η_0
5	0.2550E–02, –0.3480E–02	0.5940E–04, 0.9969E–04	0.2646E–02, –0.3512E–02	0.2660E–02, –0.3522E–02	0.5909E–02, –0.5876E–02
10	0.4042E–02, –0.4689E–02	–0.1249E–04, 0.3166E–04	0.4099E–02, –0.4694E–02	0.4139E–02, –0.4723E–02	0.8379E–02, –0.8287E–02
20	0.5983E–02, –0.6518E–02	–0.8369E–05, 0.1076E–04	0.6011E–02, –0.6433E–02	0.6087E–02, –0.6573E–02	0.1191E–01, –0.1165E–01
30	0.7436E–02, –0.7729E–02	0.1879E–05, 0.1026E–05	0.7435E–02, –0.7716E–02	0.7548E–02, –0.7809E–02	0.1467E–01, –0.1419E–01

Таблица 3. *Значения слагаемых для* $\Delta_2\eta^E eff(n)$ *в формуле (41) из [2] в сравнении с* $\Delta\eta_{2xx}$ *из [9] и* $\Delta\eta_B$ *из [5]*

F, МГц	$-iSUM_5 1$	$-iSUM_5 2$	$-iF_6 - iF_5$	$\Delta_1\eta_{xx}$	η_0
5	–0.1335E–03, 0.1327E–03	–0.8803E–08, –0.3449E–08	–0.5976E–07, 0.6017E–07	0.0	0.5909E–02, –0.5876E–02
10	–0.1892E–03, 0.1871E–03	–0.3775E–08, –0.6403E–09	–0.8801E–07, 0.8789E–07	0.0	0.8379E–02, –0.8287E–02
20	–0.2692E–03, 0.2632E–03	–0.2784E–085, 0.1135E–08	–0.2442E–06, 0.2396E–06	0.0	0.1191E–01, –0.1165E–01
30	–0.3314E–03, 0.3205E–03	–0.1435E–08, 0.5064E–09	–0.2803E–06, 0.2718E–06	0.0	0.1467E–01, –0.1419E–01

Еще меньшее отличие наблюдается у множителей ослабления из-за несущественной зависимости характеристических корней множителя ослабления от значений импеданса [7] (табл. 3).

4. Заключение

Настоящая работа подводит некоторые итоги довольно продолжительных исследований авторов по проблеме рассеяния волн статистически неровной сферой. Результатом исследований явилось определение мультипольного разложения когерентного поля по зональным векторным гармоникам и асимптотическое представление этих разложений с помощью преобразования Ватсона для большой сферы. Асимптотики решения позволяют оценить существующие эвристические методы расчета ослабления радиоволн над морской поверхностью. Выполненные при этом попутные исследования коэффициентов Клебша-Гордана в комплексной плоскости углового момента имеют более общий характер для задач рассеяния волн со сферической симметрией.

Заметим, что исследования касались только когерентного поля, т. е. его первого статистического момента. Однако в определенном приближении и ослабление некогерентной части рассеянного поля может быть описано тем же множителем ослабления, что и когерентной [10]. Кроме того, поле случайных неровностей предполагалось однородным и изотропным. Использование в расчетных формулах неизотропного спектра неровностей будет уже эвристической моделью, а не результатом последовательной теории возмущений. Для построения такой теории необходим математический аппарат, учитывающий эту анизотропию в виде разложения по представлениям соответствующей группы симметрии.

Работа выполнена в рамках проекта УНТЦ № 2116.

Литература

1. Брюховецкий А. С., Пазынин Л. А. Преобразование Ватсона для когерентного электромагнитного поля, рассеянного статистически неровной сферой. I. Потенциалы Дебая в комплексной плоскости углового момента // Радиофизика и радиоастрономия. – 2004. – Т. 9, №1. – С. 37-46.
2. Брюховецкий А. С., Пазынин Л. А. Преобразование Ватсона для когерентного электромагнитного поля, рассеянного статистически неровной сферой. II. Деформация контура интегрирования и вычисление асимптотик поля // Радиофизика и радиоастрономия. – 2004. – Т. 9, №1. – С. 47-56.
3. Брюховецкий А. С., Пазынин Л. А. Преобразование Ватсона для когерентного поля, рассеянного статистически неровной сферой. III. Полный учет возмущений в приближении Бурре // Радиофизика и радиоастрономия. – 2005. – Т. 10, №2. – С. 124-134.
4. Басс Ф. Г., Фукс И. М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. – М.: Наука, 1972. – 424 с.
5. Barrick D. E. Theory of HF and VHF propagation across the rough sea. I. The effective surface impedance for a slightly rough higly conducting medium at grazing incedence // Radio Sci. – 1971. – Vol. 6, No. 5. – P. 517-526. II. Application to HF and VHF propagation above the sea // Radio Sci. – 1971. – Vol. 6, No. 5. – P. 527-533.
6. Wait J. R. Perturbation analysis for reflection from two-dimensional periodic sea waves // Radio Sci. – 1971. – Vol. 6, No. 3. – P. 387-391.
7. Брюховецкий А. С., Науменко В. Ф., Пазынин Л. А. Результаты расчетов для эффективного импеданса декаметровых радиоволн, рассеянных статистически неровной поверхностью // Радиофизика и электроника. Харьков: Ин-т радиофизики и электроники НАН Украины. – 1997. – Т. 2, №2. – С. 91-100.
8. Филлипс О. М. Динамика верхнего слоя океана. – М.: Гидрометеоиздат, 1980. – 319 с.
9. Брюховецкий А. С., Фукс И. М. Тензор эффективного импеданса статистически неровной импедансной поверхности // Изв. вузов. Радиофизика. – 1985. –Т. 28, № 11. – С. 1400-1407.
10. Брюховецкий А. С. Об одном варианте метода малых возмущений в теории рассеяния волн на статистически неровной импедансной поверхности // Изв. вузов. Радиофизика. – 1988. – Т. 31, № 3. – С. 321-326.

Перетворення Ватсона для когерентного електромагнітного поля, розсіяного статистично нерівною сферою. IV. Числовий аналіз

А. С. Брюховецький, Л. А. Пазинін

Досліджуються аналітичні властивості одержаних раніше виразів для ефективного імпеданса когерентного розсіяного поля. Спектр нерівностей досить загального вигляду розраховано чисельно та порівняно з відомими евристичними моделями оцінок ослаблення поля в зоні тіні великої статистично нерівної сфери.

Watson Transformation for the Coherent Electromagnetic Field Scattered by a Statistically Rough Sphere. IV. Numerical Analysis

A. S. Bryukhovetski, L. A. Pazynin

Analytical properties of the earlier derived expressions for the effective impedance of the coherent scattered field are investigated. A sufficiently general type of the spectrum surface roughness has been calculated numerically and compared versus known heuristic models for evaluation of the field attenuation in the shadow zone of a large statistically rough sphere.