ISSN 1028-7507 Акустичний вісник. 2004. Том 7, N 4. С. 28 – 33

УДК 534.1

ЗАДАЧА НЕЙМАНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА ВО ВНЕШНОСТИ ПРЯМОЛИНЕЙНО-КРУГОВОЙ ЛУНОЧКИ

А. М. ГОМИЛКО*, В. И. ДЕНИСЕНКО**

* *Институт гидромеханики НАН Украины, Киев*

** *Киевский национальный торгово-экономический университет*

Получено 20.12.2004

Рассмотрен вопрос о построении решения плоской граничной задачи Неймана для уравнения Гельмгольца во внешности прямолинейно-круговой луночки. Предложен подход, основанный на использовании метода частичных областей и принципа отражения для решений уравнения Гельмгольца через отрезок. Исходная граничная задача сведена к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Исследовано асимптотическое поведение неизвестных алгебраической системы на бесконечности.

Розглянуто питання про побудову розв'язку плоскої граничної задачі Неймана для рівняння Гельмгольца у зовнішності прямолінійно-кругової луночки. Запропоновано підхід, який грунтується на використанні методу часткових областей і принципу відбиття для розв'язків рівняння Гельмгольца через відрізок. Вихідну граничну задачу зведено до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Досліджено асимптотичну поведінку невідомих алгебраїчної системи на нескінченності.

The question of the solution construction for the Neumann plane boundary-value problem for the Helmholtz equation in the exterior of a rectilinear-circular lune is considered. An approach is suggested, that is based on utilizing the method of partial domains and the principle of the Helmholtz equation solution reflecting with respect to a segment. The initial boundary-value problem is reduced to an infinite set of linear algebraic equations. The asymptotic behavior of unknown coefficients of the algebraic system at infinity is investigated.

ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что анализ многих акустических ситуаций можно осуществить в рамках модели, приводящей к решению линейных граничных задач для уравнения Гельмгольца. При этом для изучения различных проблем, связанных с излучением и дифракцией акустических волн, широко и эффективно применяется метод частичных областей [1]. Его суть состоит в том, что полная область существования искомого решения граничной задачи представляется в виде пересечения и (или) объединения частичных подобластей, в каждой из которых можно построить общее (в определенном смысле) решение уравнения Гельмгольца. Таким образом, в рамках метода частичных областей последовательно осуществляется конструктивное использование бесконечных семейств частных решений волнового уравнения в канонических координатных системах для построения соответствующих аналитических решений в неканонических областях.

Несмотря на богатую историю развития рассматриваемого метода, в последнее время открылись новые возможности по расширению его области применимости, связанные с усложнением рассматриваемой геометрии [2 – 4]. В статье [5] изложен новый подход, позволяющий эффективно использовать общие идеи метода частичных областей в комбинации с принципом отражения для решений уравнения Гельмгольца через прямолинейный отрезок. При этом основное внимание было уделено внутренней граничной задаче Дирихле для уравнения Гельмгольца для прямолинейно-круговой луночки. Данная статья посвящена развитию идей [5] на случай плоской внешней задачи об излучении звука колеблющейся луночкой. В рассматриваемой ситуации использование принципа отражения приводит к тому, что построение решения исходной граничной задачи сводится к соответствующему вопросу для граничной задачи Неймана для уравнения Гельмгольца во внешности круга.

В контексте сказанного следует отметить, что вопросы продолжения решений эллиптических уравнений (в частности, волновых полей) находят широкое применение при исследовании различных задач математической физики. Обзор современного состояния задач продолжения волновых полей, включая их прикладные аспекты, относящиеся к внешним задачам дифракции, приведен в работе [6].

1. ВНЕШНЯЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Пусть (x, y) – декартовы, а (r, θ) – полярные координаты на плоскости:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta.$$

Для удобства в различных ситуациях будем считать, что угол θ изменяется либо в пределах $[0, 2\pi]$, либо $[-\pi, \pi]$. Для заданных значений $a>0$ и $b\in(0, a)$ определим область Ω, которая является пересечением круга $r<a$ и полуплоскости $x>b$, и область $D=\mathrm{R}^2\backslash\overline{\Omega}$, являющуюся внешностью Ω. Пусть Ω_0 – пересечение области D и круга $|r|<a$ (см. рисунок). Обозначим через γ отрезок $x=b$, $|y|<d=\sqrt{a^2-b^2}$, причем для дуги окружности зададим

$$\gamma_1: \quad r = a, \quad |\theta| < \theta_0,$$

$$\gamma_2: \quad r = a, \quad \theta \in (\theta_0, \pi),$$

где

$$\theta_0 = \arccos\frac{b}{a} \in (0, \pi/2].$$

Рассмотрим в области D симметричную относительно переменной y внешнюю граничную задачу Неймана для уравнения Гельмгольца:

$$\Delta\, u(x, y) + k^2 u(x, y) = 0, \qquad (x, y) \in D, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = f(\theta), \qquad r = a, \qquad |\theta| < \theta_0, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad x = b, \qquad |y| < d, \qquad (3)$$

где $f(\theta)$ – четная функция, достаточно гладкая на отрезке $|\theta|\le\theta_0$. Такая задача описывает распространение звукового поля в области D при заданном колебании части поверхности луночки Ω. При этом граничные условия (2), (3) следует дополнить соответствующим условием излучения на бесконечности. В предположении, что временная гармоническая зависимость звукового поля определяется множителем $e^{-i\omega t}$, это условие имеет вид

$$r^{1/2}\left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku\right) = O(1), \qquad r \to \infty. \qquad (4)$$

В соответствии с общими идеями метода частичных областей [1] представим область D в виде замыкания объединения ограниченной области Ω_0 и внешности окружности $r=a$. В связи с этим решения u исходной граничной задачи будем искать в виде

$$\begin{aligned} &u = u_1, \qquad |r| > a, \\ &u = u_0, \qquad (x, y) \in \Omega_0. \end{aligned} \qquad (5)$$

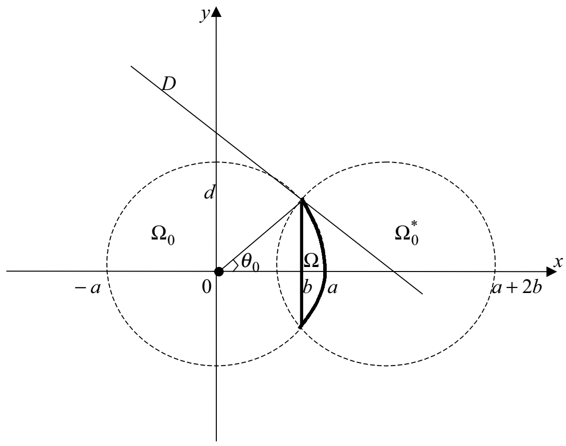

Рисунок. Геометрия задачи

Здесь предполагается, что каждая из функций u_j удовлетворяет уравнению Гельмгольца (1) в соответствующей области и, кроме того, для u_1 выполняются граничное условие (2) и условие излучения (4), а для u_0 – граничное условие (3).

Вне круга $r\le a$ решение граничной задачи (1) – (4) можно представить рядом [1]

$$u_1(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \frac{H_m^{(1)}(kr)}{H_m^{(1)}(ka)}\cos(m\theta), \qquad r > a, \qquad (6)$$

где $H_m^{(1)}(\cdot)$ – функция Ханкеля первого рода и m-го порядка.

Рассмотрим вопрос о представлении решения $u=u_0$ в области Ω_0. С одной стороны, указанная область содержит полукруг $r<a$, $\theta\in(\pi/2, 3\pi/2)$. Это обстоятельство препятствует непосредственному использованию процедуры метода частичных областей [5]. С другой стороны, поскольку на граничном прямолинейном отрезке γ задано однородное граничное условие (3) для потенциала u, то в соответствии с принципом отражения искомое решение u_0 можно отразить симметричным образом:

$$u_0(x, y) = u_0(-x + 2b, y), \qquad (x, y) \in \Omega_0^* \qquad (7)$$

в симметричную для Ω_0 относительно отрезка γ область

$$\Omega_0^* = \{(x, y): \ (-x + 2b, y) \in \Omega_0\}. \qquad (8)$$

При этом замыкание объединения областей Ω_0 и Ω_0^* содержит круг $r\le a$ и, следовательно, решение u_0 продолжается до решения уравнения Гельмгольца (1) в круге. Таким образом, функцию u_0

можно искать в виде ряда [1]

$$u_0=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\frac{J_n(kr)}{J_n(ka)}\cos(n\theta), \qquad r<a, \qquad \theta\in[0,2\pi], \tag{9}$$

с неизвестными коэффициентами A_n (при этом предполагается, что выполнено условие $J_n(ka)\neq 0$ для $n=0,1,\ldots$).

Для нахождения коэффициентов C_m, A_n имеем граничные условия (2), (3) и условия сопряжения для потенциалов u_0, u_1:

$$u_0=u_1, \qquad \frac{\partial u_0}{\partial r}=\frac{\partial u_1}{\partial r}, \qquad r=a, \qquad |\theta|\in(\theta_0,\pi). \tag{10}$$

Таким образом, исходя из выражения (9), заключаем, что для функции u_0 требуется определить некоторое дополнительное граничное условие на оставшейся части окружности $r=a$, $|\theta|<\theta_0$. Идея формирования этого условия состоит в том, что его можно взять из соотношения отражения (7) и сформулировать условие в терминах тех же неизвестных коэффициентов A_n [5]. Действуя таким образом и используя ортогональность тригонометрических функций в представлениях (6), (9), получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов C_m и A_n.

Если точка $(r,\theta)\in\Omega_0^*$, то ее прообразом при отображении (7) будет точка с полярными координатами $(\hat{r},\hat{\theta})$, определяемыми из соотношений

$$\hat{r}\sin\hat{\theta}=r\sin\theta,$$

$$\hat{r}\cos\hat{\theta}=r\cos\theta+2b.$$

Разрешив эти уравнения относительно $\hat{r}$, $\hat{\theta}$, получаем равенства

$$\hat{r}(r,\theta)=\sqrt{r^2-4rb\cos\theta+4b^2}, \qquad \hat{\theta}(r,\theta)=\arcsin\left(\frac{r\sin\theta}{\hat{r}(r,\theta)}\right). \tag{11}$$

Таким образом, для искомой функции u_0 в области Ω_0^* (а значит и в области $\Omega\subset\Omega_0^*$) из соотношений (7), (9), (11) следует

$$u_0(r\cos\theta,r\sin\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\frac{J_n(k\hat{r})}{J_n(ka)}\cos(n\hat{\theta}).$$

В частности, справедливо равенство

$$u_0(a\cos\theta,a\sin\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\frac{J_n(\hat{k}r^*)}{J_n(\hat{k})}\cos(n\theta^*), \qquad |\theta|<\theta_0, \tag{12}$$

где, согласно выражения (11), введены обозначения

$$r^*(\theta)=a^{-1}\hat{r}(a,\theta)=\sqrt{1+4\cos^2\theta_0-4\cos\theta_0\cos\theta},$$

$$\theta^*(\theta)=\hat{\theta}(a,\theta)=\arcsin\left(\frac{\sin\theta}{r^*(\theta)}\right), \qquad \hat{k}=ka.$$

Таким образом, выполнение граничных условий (2), (3) и условий сопряжения совместно с равенством (12) приводит к следующим функциональным соотношениям (при учете четности рассматриваемой задачи):

$$k\sum_{m=0}^{\infty}C_m\frac{H_m^{(1)'}(\hat{k})}{H_m^{(1)}(\hat{k})}\cos(m\theta)=f(\theta), \qquad \theta\in(0,\theta_0), \tag{13}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}C_m\frac{H_m^{(1)'}(\hat{k})}{H_m^{(1)}(\hat{k})}\cos(m\theta)=\sum_{m=0}^{\infty}A_m\frac{J_m'(\hat{k})}{J_m(\hat{k})}\cos(m\theta), \qquad \theta\in(\theta_0,\pi), \tag{14}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}C_m\cos(m\theta)=\sum_{m=0}^{\infty}A_m\cos(m\theta), \qquad \theta\in(\theta_0,\pi), \tag{15}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}A_m\cos(m\theta)=\sum_{m=0}^{\infty}A_m\frac{J_m(\hat{k}r^*)}{J_m(\hat{k})}\cos(n\theta^*), \qquad \theta\in(0,\theta_0). \tag{16}$$

Запишем соотношения (11) – (16) в виде

$$k\sum_{m=0}^{\infty}C_m\frac{H_m^{(1)'}(\hat{k})}{H_m^{(1)}(\hat{k})}\cos(m\theta)=$$

$$=\begin{cases} f(\theta), & \theta\in(0,\theta_0), \\ k\sum\limits_{n=0}^{\infty}A_n\frac{J_n'(\hat{k})}{J_n(\hat{k})}\cos(n\theta), & \theta\in(\theta_0,\pi), \end{cases} \tag{17}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\theta) =$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{m=0}^{\infty} A_m \dfrac{J_m(\hat{k}r^*)}{J_m(\hat{k})} \cos(m\theta^*), & \theta \in (0, \theta_0), \\ \sum\limits_{m=0}^{\infty} C_m \cos(m\theta), & \theta \in (\theta_0, \pi). \end{cases} \qquad (18)$$

Тогда использование соотношений ортогональности

$$\frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)d\theta = \delta_{nm}(1+\delta_{n0}),$$

$$n, m = 0, 1 \ldots,$$

где δ_{nm} – символ Кронекера, позволяет получить из функциональных уравнений (17), (18) следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов C_m и A_n:

$$C_m \frac{(1+\delta_{n0})\pi k}{2} \frac{H_m^{(1)'}(\hat{k})}{H_m^{(1)}(\hat{k})} C_m =$$

$$= k \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{J_n'(\hat{k})}{J_n(\hat{k})} L_{n,m} +$$

$$+ \int\limits_0^{\theta_0} f(\theta)\cos(m\theta)d\theta, \qquad (19)$$

$$m = 0, 1, \ldots,$$

$$A_n \frac{(1+\delta_{n0})\pi}{2} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} A_m \int\limits_0^{\theta_0} \frac{J_m(\hat{k}r^*)}{J_m(\hat{k})} \cos(m\theta^*)\cos(n\theta)d\theta +$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} C_m L_{m,n}, \qquad (20)$$

$$n = 0, 1, \ldots$$

Здесь

$$L_{m,n} = \int\limits_{\theta_0}^{\pi} \cos(m\theta)\cos(n\theta)d\theta =$$

$$= -\frac{\sin(n-m)\theta_0}{2(n-m)} - \frac{\sin(n+m)\theta_0}{2(n+m)}, \qquad n \neq m,$$

$$L_{n,n} = \int\limits_{\theta_0}^{\pi} \cos^2(n\theta)d\theta =$$

$$= \frac{\pi-\theta_0}{2} - \frac{\sin(2n\theta_0)}{4n}, \qquad n \geq 1,$$

$$L_{0,0} = \int\limits_{\theta_0}^{\pi} d\theta = \pi - \theta_0.$$

При численном анализе для нахождения ограниченного решения системы уравнений (19), (20) можно воспользоваться методом простой редукции. Более эффективное решение бесконечной системы алгебраических уравнений обеспечивает применение метода улучшенной редукции, когда в рассмотрение вовлекается априорная информация об асимптотическом поведении неизвестных C_m, $m \to \infty$ и A_n, $n \to \infty$.

2. АСИМПТОТИКА НЕИЗВЕСТНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Выясним характер поведения неизвестных C_m, A_n системы уравнений (19), (20) при $m, n \to \infty$ в предположении, что заданная четная функция $f(\theta)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $|\theta| \leq \theta_0$, причем $f(\theta_0)=0$ и $f'(\theta_0)=0$. Основной характер этого поведения обусловлен наличием угловых точек при рассматриваемой геометрии. Действительно, так как прямая $x=b$ и дуга γ_1 пересекаются под углом $\alpha = 2\pi - \theta_0$ (со стороны области D), то главная сингулярная часть решения u задачи (1) – (3) при подходе к угловой точке $r=a$, $\theta=\theta_0$ определяется выражением [1]

$$u \approx c\rho^{\beta}\cos(\beta\phi), \qquad \rho \to 0,$$

$$\beta = \frac{\pi}{2\pi - \theta_0} \in (1/2, 2/3], \qquad \theta_0 \in (0, \pi/2]. \qquad (21)$$

Здесь введены локальные полярные координаты (ρ, ϕ):

$$x - b = \rho\cos(\phi - (\pi/2 - \theta_0)) = \rho\sin(\phi + \theta_0),$$

$$y - d = \rho\sin(\phi - (\pi/2 - \theta_0)) = -\rho\cos(\phi + \theta_0).$$

Обращаясь к выражению (6), заключаем, что для функции

$$u_1(a,\theta)=\sum_{m=0}^{\infty}C_m\cos(m\theta),\qquad |\theta|\le\pi,$$

при подходе к θ_0 справедливы асимптотические соотношения

$$\begin{aligned}&u_1(a,\theta)\approx 0, && \theta\to\theta_0, && \theta<\theta_0,\\ &u_1(a,\theta)\approx c(\theta-\theta_0)^{\beta}, && \theta\to\theta_0, && \theta>\theta_0.\end{aligned}\qquad(22)$$

Таким образом, из оценки (22) получаем асимптотическое равенство при $m\to\infty$:

$$C_m\approx\frac{2c}{\pi}\int\limits_{\theta_0}^{\pi}(\theta-\theta_0)^{\beta}\cos(m\theta)d\theta=$$
$$=-\frac{2c\beta}{\pi m}\int\limits_{\theta_0}^{\pi}(\theta-\theta_0)^{\beta-1}\sin(m\theta)d\theta=$$
$$=-\frac{2c\beta}{\pi m}\int\limits_{\theta_0}^{\infty}(\theta-\theta_0)^{\beta-1}\sin(m\theta)d\theta+O(m^{-2}).$$

Учитывая, что [7, п. 2.5.5]

$$\int\limits_{\theta_0}^{\infty}(\theta-\theta_0)^{\beta-1}\sin m\theta d\theta=$$
$$=\frac{\Gamma(\beta)}{m^{\beta}}\sin(m\theta_0+\beta\pi/2),\qquad \beta\in(0,1),\qquad(23)$$

имеем

$$C_m\approx-\frac{2c\Gamma(\beta+1)\sin(m\theta_0+\beta\pi/2)}{\pi m^{\beta+1}},$$
$$m\to\infty.\qquad(24)$$

Обратимся к вопросу об асимптотическом поведении неизвестных A_n. Поведение функции

$$u_0(a,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cos(n\theta)$$

в окрестности точки $\theta=\theta_0$, согласно выражения (21) и формулы отражения (7), определяется следующими соотношениями:

$$u_0(a,\theta)\approx c(\theta-\theta_0)^{\beta}\cos\pi=-c(\theta-\theta_0)^{\beta},$$
$$\theta\to\theta_0+0,$$

$$u_0(a,\theta)\approx c(\theta_0-\theta)^{\beta}\cos(2\pi-\theta_0)=$$
$$=c\cos\theta_0(\theta_0-\theta)^{\beta},$$
$$\theta\to\theta_0-0.$$

Таким образом, при $n\to\infty$ имеем асимптотическое равенство

$$A_n\approx\frac{2c\cos\theta_0}{\pi}\int\limits_{0}^{\theta_0}(\theta_0-\theta)^{\beta}\cos(n\theta)d\theta-$$
$$-\frac{2c}{\pi}\int\limits_{\theta_0}^{\pi}(\theta-\theta_0)^{\beta}\cos(n\theta)d\theta.\qquad(25)$$

При этом [7, п. 2.5.6]

$$\int\limits_{0}^{\theta_0}(\theta_0-\theta)^{\beta}\cos(n\theta)d\theta\approx$$
$$\approx\frac{1}{(2\theta_0)^{\beta}}\int\limits_{0}^{\theta_0}(\theta_0^2-\theta^2)^{\beta}\cos(n\theta)d\theta=$$
$$=\sqrt{\frac{\pi\theta_0}{2}}\frac{\Gamma(\beta+1)}{n^{\beta+1/2}}J_{\beta+1/2}(n\theta_0),\qquad n\to\infty.$$

Используя здесь асимптотику функции Бесселя [8, § 5.11]

$$J_{\beta+1/2}(n\theta_0)\approx\left(\frac{2}{\pi n\theta_0}\right)^{1/2}\sin(n\theta_0-\pi\beta/2),$$
$$n\to\infty,$$

получаем

$$\int\limits_{0}^{\theta_0}(\theta_0-\theta)^{\beta}\cos(n\theta)d\theta\approx$$
$$\approx\frac{1}{(2\theta_0)^{\beta}}\int\limits_{0}^{\theta_0}(\theta_0^2-\theta^2)^{\beta}\cos(n\theta)d\theta\approx$$
$$\approx\frac{\Gamma(\beta+1)}{n^{\beta+1}}\sin(n\theta_0-\pi\beta/2),$$
$$n\to\infty.$$

Отсюда, согласно формуле (25), из соотношения (23) находим, что

$$A_n\approx\frac{2c\Gamma(\beta+1)}{\pi n^{\beta+1}}\times$$
$$\times[\cos\theta_0\sin(n\theta_0+\beta\pi/2)-\sin(n\theta_0-\pi\beta/2)],\qquad(26)$$
$$n\to\infty.$$

Таким образом, асимптотические поведения коэффициентов C_m, A_n, $m, n \to \infty$ в предположении их ограниченности на бесконечности описываются выражениями (24) и (26). При этом постоянная c в асимптотических формулах является неизвестной и должна быть определена в процессе численного решения системы (19), (20) на основе метода улучшенной редукции.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен новый подход к построению решения плоской граничной задачи Неймана для уравнения Гельмгольца во внешности прямолинейно-круговой луночки, основанный на совместном использовании метода частичных областей и классического принципа отражения решений уравнения Гельмгольца через прямолинейный отрезок. Основная идея практического применения принципа отражения заключается в том, что замыкающая часть граничных условий на появляющейся при этом нефизической части границы формулируется в терминах значений искомого потенциала на дуге, лежащей внутри исходной области. Это позволяет свести граничную задачу к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений и исследовать асимптотическое поведение ее неизвестных на бесконечности.

1. *Гринченко В. Т., Вовк И. В.* Волновые задачи рассеяния звука на упругих оболочках.– К.: Наук. думка, 1986.– 318 с.
2. *Гринченко В. Т., Вовк И. В.* О расширении возможностей метода частичных областей применительно к задачам излучения и рассеяния звука // Акуст. ж.– 1989.– **35**, N 1.– С. 29–36.
3. *Гринченко В. Т.* Развитие метода решения задач излучения и рассеяния звука в неканонических областях // Гидромеханика.– 1996.– **70**.– С. 27–40.
4. *Вовк И. В., Гомилко А. М., Городецкая Н. С.* Об особенностях применения метода частичных областей в волновых задачах // Акуст. ж.– 1995.– **41**, N 3.– С. 399–404.
5. *Гомилко А. М., Гринченко В. Т., Лобова Е. В.* Принцип отражения в плоских граничных задачах для уравнения Гельмгольца // Акуст. вiсн.– 1998.– **1**, N 2.– С. 48–56.
6. *Кюркчан А. Г., Стернин Б. Ю., Шаталов В. Е.* Особенности продолжения волновых полей // Успехи физических наук.– 1996.– **166**, N 12.– С. 1285–1308.
7. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции.– М.: Наука, 1981.– 800 с.
8. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения.– М.-Л.: Физматгиз, 1963.– 360 с.