

---

УДК 681.3:519.711.3:517.958:621.313

**А. В. Жильцов**, канд. техн. наук  
Ин-т проблем моделирования  
в энергетике им. Г. Е. Пухова НАН Украины  
(Украина, 03164, Киев, ул. Генерала Наумова 15,  
тел.: (044) 424-91-60, E-mail: azhilt@mail.ru)

## **Двумерная интегро-дифференциальная модель для расчета вихревых токов в системе кристаллизатор — индукционный перемешиватель с нелинейным массивным магнитопроводом**

*(Статью представил чл.-кор. НАН Украины В. Ф. Евдокимов)*

Предложена методика расчета вихревых токов в индукционном перемешивателе с нелинейным массивным магнитопроводом, заключающаяся в разбиении ферромагнетика на элементарные области (ячейки), в каждой из которых магнитная проницаемость на данном шаге итерационного процесса постоянная. Такой прием приводит к задаче нахождения магнитного поля в кусочно-однородной среде на каждой итерации. Для его расчета приведена система интегро-дифференциальных уравнений относительно плотности вихревых токов и токов намагниченности на границе ферромагнетика и на всех границах между элементарными областями, что в совокупности с введением коэффициента релаксации для улучшения сходимости позволило создать эффективный алгоритм расчета вихревых токов в нелинейных проводящих средах.

Запропоновано методику розрахунку вихрових струмів у індукційному перемішувачі з нелінійним масивним магнітопроводом, що полягає в розбивці феромагнетика на елементарні області (комірці), у кожній з яких магнітна проникність на даному кроці ітераційного процесу є постійною. Такий прийом приводить до задачі знаходження магнітного поля в кусково-однорідному середовищі на кожній ітерації. Для його розрахунку наведено систему інтегро-диференціальних рівнянь щодо густини вихрових струмів і струмів намагніченості на межі феромагнетика й на всіх межах між елементарними областями, що у сукупності із введенням коефіцієнта релаксації для поліпшення збіжності дозволило створити ефективний алгоритм розрахунку вихрових струмів у нелінійних провідних середовищах.

*К л ю ч е в ы е с л о в а: интегро-дифференциальная модель, вихревые токи, индукционный перемешиватель, массивный нелинейный магнитопровод.*

Для повышения качества выпускаемого металла в сталеплавильном производстве используются устройства с электромагнитным воздействием на жидкий металл, в том числе и индукционные перемешиватели (ИП) различных

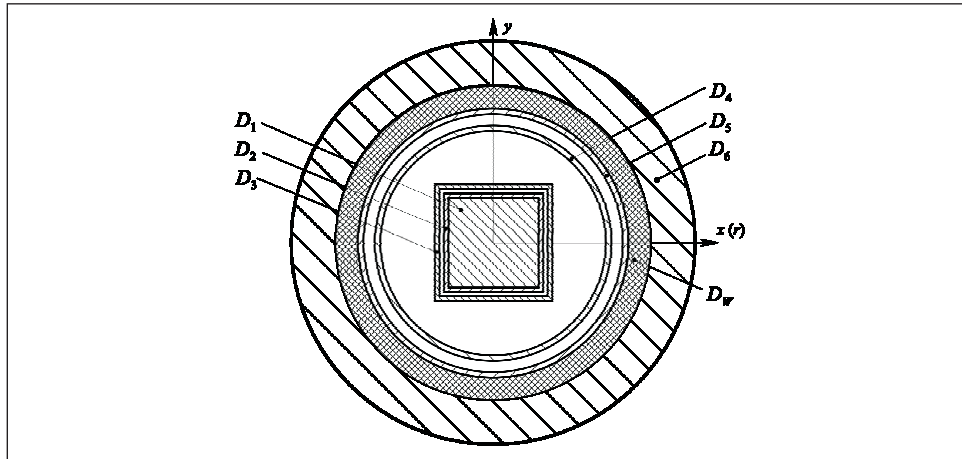
конструкций. Изучение влияния технологических процессов и конструктивных параметров этих устройств на качество выпускаемой продукции требует привлечения математического моделирования протекающих в них связанных электромагнитных, гидродинамических, тепловых процессов. В общем случае это требует решения трехмерных краевых задач для уравнений Максвелла в неограниченной неоднородной области, содержащей геометрически сложные ферромагнитные и проводящие тела, уравнений Навье—Стокса в объеме жидкой стали и уравнения теплопроводности. При исполнении индукционных перемешивателей магнитопрод изготавливается шихтованным. Однако в ряде исполнений указанных устройств возникает необходимость в замене шихтованного магнитопровода массивным, что требует учета влияния вихревых токов, возникающих в нем, на распределение электродинамических усилий в системе, в том числе и в жидкой заготовке. Более того, близость катушек с первичными токами к массивному магнитопроду требует учета его нелинейных магнитных свойств.

В работах [1—6] предложены математические модели для расчета вихревых токов и электродинамических усилий в системе кристаллизатор — индукционный перемешиватель с шихтованным магнитопродом, а в работе [7] — с массивным. В данном случае предлагается математическая модель для расчета вихревых токов в указанном классе устройств с учетом нелинейных магнитных свойств массивного магнитопровода.

**Исходные данные для разработки модели.** На рисунке показано сечение конструкции системы кристаллизатор — ИП с массивным нелинейным магнитопродом машины непрерывного литья заготовок. Обмотка  $D_W$  размещена на внутренней поверхности гладкого массивного нелинейного магнитопровода  $D_6$  и имеет трехфазное исполнение. Удельная проводимость материала проводников постоянна по сечению  $D_m$  ( $m=1,2,\dots,N$ ) каждого проводника и равна соответственно  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N$ , где  $N$  — число массивных проводников, в данном случае  $N=6$ . В жидком массивном проводнике  $D_1$  полагаем заданным распределение поля скорости  $V(Q, t)$ . В магнитном отношении проводники  $D_1, D_2, \dots, D_{N-1}$  будем считать немагнитными, а проводник  $D_N$  — нелинейным ферромагнетиком.

Граница между заготовкой и гильзой может быть как идеально проводящей, так и идеально изолирующей. Если указанная граница идеально проводящая, то заготовку и гильзу следует рассматривать как одно массивное тело с неоднородной проводимостью. Если указанная граница идеально изолирующая, то заготовку и гильзу следует считать двумя различными телами. Далее для определенности будем рассматривать только второй случай.

В предлагаемой модели распределения вихревых токов в системе рассматривается режим тока, т. е. считаются заданными токи в витках



Сечение системы кристаллизатор — ИП с массивным нелинейным магнитопроводом:  $D_1$  — жидкая стальная заготовка;  $D_2$  — гильзовый медный кристаллизатор;  $D_3$  — обечайка из немагнитной стали;  $D_4$  — корпус кристаллизатора из немагнитной стали;  $D_5$  — арматура из немагнитной стали;  $D_6$  — массивный нелинейный магнитопровод;  $D_7$  — трехфазная обмотка

катушек обмотки. Модель допускает любой закон изменения во времени этих токов.

**Постановка задачи моделирования магнитного поля в сечении системы.** Конечная задача состоит в том, чтобы по заданной геометрии системы, электромагнитным характеристикам материалов, из которых изготовлены конструктивные элементы, электрическому соединению элементов, заданным токам в обмотках найти распределение вихревых токов в сечениях массивных проводников. Зная плотность вихревых токов, можно найти остальные характеристики электромагнитного поля (напряженность электрического поля  $\mathbf{E}$  внутри массивных проводников, индукцию  $\mathbf{B}$  и напряженность  $\mathbf{H}$  магнитного поля внутри и вне массивных проводников). По распределению вихревых токов можно также определить удельную мощность тепловых потерь, а с помощью интегрирования — и всю их мощность. По плотности  $\delta(M, t)$  можно также найти распределение электродинамических сил.

**Краевая задача.** Полная система уравнений поля внутри жидкого проводника в квазистационарном приближении имеет вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \delta_1, \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \operatorname{div} \delta_1 = 0, \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \delta_1 = \gamma_1 \mathbf{E} + \gamma_1 [\mathbf{V}, \mathbf{B}], \quad (1)$$

где  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  — векторы напряженности электрического и магнитного полей;  $\mathbf{B}$  — вектор магнитной индукции;  $\delta_1$  — вектор плотности вихревого тока в

$D_1$ ;  $\mu_0$  — абсолютная магнитная проницаемость среды жидкого проводника, принимаемая равной магнитной постоянной  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^7$  Гн/м;  $\mathbf{V}$  — вектор скорости в жидком проводнике.

Внутри проводников  $D_m$  электромагнитное поле описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \delta_m, \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \operatorname{div} \delta_m = 0, \mathbf{B} = \mu_m \mathbf{H}, \delta_m = \gamma_m \mathbf{E}, \\ m = 2, 3, \dots, N, \end{aligned} \quad (2)$$

где для неферромагнитных проводников  $\mu_m = \mu_0$ ,  $m = 2, 3, \dots, N-1$ , а для ферромагнитного —  $\mu_N = \mu(H)$ ;  $\delta_m$  — плотность вихревых токов в области  $D_m$ .

В области вне проводников магнитное поле описывается уравнениями

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \delta_W, \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \quad (3)$$

где  $\delta_W$  — вектор плотности тока в обмотках (вне обмоток необходимо положить  $\delta_W = 0$ ).

На границе  $L_m$ ,  $m = 1, 2, \dots, N$ , каждого из проводников, очевидно, выполняются следующие условия:

$$(\mathbf{n}_Q, \mathbf{B}^-) = (\mathbf{n}_Q, \mathbf{B}^+), \quad (4)$$

$$\frac{1}{\mu^-} [\mathbf{n}_Q, \mathbf{B}^-] = \frac{1}{\mu^+} [\mathbf{n}_Q, \mathbf{B}^+], \quad (5)$$

$$(\delta_m, \mathbf{n}_Q) = 0, \quad (6)$$

где  $\mathbf{n}_Q$  — нормаль к границе проводника в точке  $Q$ , направленная из него наружу;  $\mathbf{B}^+$  и  $\mathbf{B}^-$  — значения магнитной индукции в точке  $Q$  при приближении к границе проводника соответственно с внутренней и внешней стороны;  $\mu^+$  ( $\mu^-$ ) — значения абсолютной магнитной проницаемости материала среды из которой выходит (в которую входит) нормаль  $\mathbf{n}_Q$ . Аналогичные условия существуют на границе  $L_W$  области  $D_W$ .

На бесконечности ставится условие вида

$$B(\infty) = 0. \quad (7)$$

Введением электродинамических потенциалов  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$  соотношениями

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \operatorname{div} \mathbf{A} = 0, \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi,$$

краевая задача (1) — (7) сводится к новой краевой задаче. Запишем ее

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mu_0 \delta_m \text{ в } D_m, \quad m = 1, 2, \dots, N-1; \quad (8)$$

$$\operatorname{rot} \mu_N^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \delta_N \text{ в } D_N; \quad (9)$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0 \text{ вне } D = D_1 + D_2 + \dots + D_N + D_W; \quad (10)$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mu_0 \delta_W \text{ в } D_W; \quad (11)$$

$$\delta_1 = -\gamma_1 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \gamma_1 \operatorname{grad} \varphi + \gamma_1 [\mathbf{V}, \operatorname{rot} \mathbf{A}] \text{ в } D_1; \quad (12)$$

$$\delta_m = -\gamma_m \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \gamma_m \operatorname{grad} \varphi \text{ в } D_m, m=2,3, \dots, N; \quad (13)$$

$$(\mathbf{n}_Q, \operatorname{rot} \mathbf{A}^-) = (\mathbf{n}_Q, \operatorname{rot} \mathbf{A}^+), Q \in L = L_1 + L_2 + \dots + L_N + L_W; \quad (14)$$

$$\frac{1}{\mu^-} [\mathbf{n}_Q, \operatorname{rot} \mathbf{A}^-] = \frac{1}{\mu^+} [\mathbf{n}_Q, \operatorname{rot} \mathbf{A}^+], Q \in L; \quad (15)$$

$$A(\infty) = 0; \quad (16)$$

$$\Delta \varphi^+ = 0, Q \in D; \quad (17)$$

$$\frac{\partial \varphi^+}{\partial n_Q} = -\frac{\partial A_n^+}{\partial t}, Q \in L; \quad (18)$$

где  $\operatorname{rot} \mathbf{A}^-$  и  $\operatorname{rot} \mathbf{A}^+$  — значения ротора векторного потенциала в точке  $Q$  при приближении к границе проводника соответственно с внешней и внутренней стороны;  $A_n^+$  — проекция вектора  $\mathbf{A}$  на направление нормали  $\mathbf{n}_Q$ , при приближении к границе проводника с внутренней стороны;  $\partial \varphi^+ / \partial n_Q$  — значение нормальной производной скалярного электрического потенциала в точке  $Q$  при приближении к границе проводника с внутренней стороны.

В общем случае нестационарного процесса для решения приведенных выше уравнений (8) — (18) необходимо задать также начальные условия. Ими являются функции

$$\delta_W^0(M) = \delta_W(M, 0), \delta_m^0(M) = \delta_m(M, 0), m=1,2, \dots, N. \quad (19)$$

**Интегро-дифференциальные уравнения.** Суть предлагаемой методики заключается в следующем. Нелинейный ферромагнетик разбиваем на элементарные области. В каждой элементарной области  $D_N^q$  ( $q=1,2, \dots, N_D$ ,  $N_D$  — число элементарных областей) на каждой итерации магнитную проницаемость принимаем постоянной величиной  $\mu_q^{(k)}$ , где  $k$  — номер итерации. Все  $\mu_q^{(1)}$  могут быть взяты, например, одинаковыми и равными магнитной проницаемости ферромагнетика до начала насыщения. В результате этого уравнение (9) можно представить в виде совокупности следующих уравнений:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mu_q^{(k)} \delta_N^q \text{ в } D_N^q, q=1,2, \dots, N_D, \quad (20)$$

где  $\delta_N^q$  — плотность вихревых токов в  $q$ -й элементарной области нелинейного ферромагнетика на  $k$ -м шаге итерационного процесса решения нелинейной задачи,  $q=1,2, \dots, N_D$ .

В выбранной постановке задачи будем пренебрегать токами лобовых частей обмоток и считать, что векторы плотности тока в обмотках  $\delta_W$  имеют вид  $\delta_W(Q, t) = \mathbf{e}_z \delta_W(Q, t)$ , где  $\delta_W(Q, t)$  — проекция вектора плотности тока в обмотках на ось  $z$ , которая не зависит от координаты  $z$ . Тогда

$$\delta(Q, t) = \mathbf{e}_z \delta(Q, t), \mathbf{A}(Q, t) = \mathbf{e}_z A(Q, t),$$

$$\mathbf{B}(Q, t) = \mathbf{e}_x B_x(Q, t) + \mathbf{e}_y B_y(Q, t), \mathbf{V}(Q, t) = \mathbf{e}_x V_x(Q, t) + \mathbf{e}_y V_y(Q, t), \quad (21)$$

где  $A(Q, t)$  — проекция векторного потенциала на ось  $z$ ;  $B_x(Q, t)$  и  $B_y(Q, t)$  — проекции вектора магнитной индукции  $\mathbf{B}(Q, t)$  соответственно на оси  $x$  и  $y$ ;  $\delta(Q, t)$  — проекция вектора плотности тока в массивных проводниках на ось  $z$ ;  $V_x(Q, t)$  и  $V_y(Q, t)$  — проекции вектора скорости  $\mathbf{V}$  на оси  $x$  и  $y$ . Величины, входящие в соотношения (21), не зависят от координаты  $z$ .

Тогда решение краевой задачи (8), (10) — (20) находим в следующем виде (индекс по  $k$  у неизвестных значений токов и магнитной проницаемости элементарных областей опускаем):

$$A(Q, t) = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{D_W} \delta_W(M, t) \ln \frac{1}{r_{QM}} ds_M + \frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{m=1}^{N-1} \int_{D_m} \delta_m(M, t) \ln \frac{1}{r_{QM}} ds_M + \\ + \sum_{m=1}^{N_D} \frac{\mu_m}{2\pi} \int_{D_N^m} \delta_N^m(M, t) \ln \frac{1}{r_{QM}} ds_M + \frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{m=1}^{N_L} \int_{L_m} \sigma_m(M, t) \ln \frac{1}{r_{QM}} dl_M, \quad (22)$$

где  $r_{QM}$  — расстояние между точками наблюдения  $Q$  и интегрирования  $M$ ;  $\sigma_m(M, t)$  — поверхностная плотность токов намагниченности на границе магнитопровода и на границах между всеми элементарными областями, на которые разбивается нелинейный ферромагнетик,  $m=1,2, \dots, N_L$ ;  $N_L$  — число границ между всеми элементарными областями и между ферромагнетиком и внешней средой.

Векторный потенциал, записанный в виде (22), автоматически удовлетворяет уравнениям (8), (10), (11), (20) и граничным условиям (14), условию на бесконечности (16). Удовлетворяя векторный потенциал (22) граничным условиям (15), приходим к следующей системе интегральных уравнений для определения плотности простого слоя тока намагниченности на границе магнитопровода и на всех элементарных границах на  $k$ -м шаге итерации, вывод которого для кусочно-однородной среды приведен в [7]:

$$\sigma_q(Q, t) - \frac{\chi_q}{\pi} \sum_{m=1}^{N_L} \int_{L_m} \sigma_m(M, t) \frac{(\mathbf{n}_Q, \mathbf{r}_{QM})}{r_{QM}^2} dl_M - \frac{\chi_q}{\pi} \sum_{m=1}^{N-1} \int_{D_m} \delta_m(M, t) \frac{\mathbf{n}_Q, \mathbf{r}_{QM}}{r_{QM}^2} ds_M -$$

$$-\frac{\chi_q}{\pi} \sum_{m=1}^{N_D} \frac{\mu_m}{\mu_0} \int_{D_N^m} \delta_N^m(M, t) \frac{(\mathbf{n}_Q, \mathbf{r}_{QM})}{r_{QM}^2} ds_M = \frac{\chi_q}{\pi} \int_{D_W} \delta_W(M, t) \frac{(\mathbf{n}_Q, \mathbf{r}_{QM})}{r_{QM}^2} ds_M, \\ Q \in L_q, \quad q=1, 2, \dots, N_L. \quad (23)$$

Здесь  $\chi_q = (\mu^+ - \mu^-) / (\mu^+ + \mu^-)$ ,  $\mu^+$  ( $\mu^-$ ) — магнитная проницаемость элементарной области или внешней по отношению к ферромагнетику среды, из которой выходит (в которую входит) выбранная нормаль  $\mathbf{n}_Q$  к участку элементарной границы;  $\mathbf{r}_{QM}$  — радиус-вектор, направленный из точки наблюдения  $Q$  в точку интегрирования  $M$ .

Из соотношений (12), (13), (17), (18), (22) выводим интегро-дифференциальные уравнения для плотности вихревых токов так же, как это сделано в работе [7]:

$$\frac{\delta_1(Q, t)}{\lambda \gamma_1} + \sum_{m=1}^{N-1} \frac{\partial}{\partial t} \int_{D_m} \delta_m(M, t) \ln \frac{1}{r_{QM}} ds_M + \sum_{m=1}^{N_D} \frac{\mu_m}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \int_{D_N^m} \delta_N^m(M, t) \ln \frac{1}{r_{QM}} ds_M + \\ + \sum_{m=1}^{N_L} \frac{\partial}{\partial t} \int_{L_m} \sigma_m(M, t) \ln \frac{1}{r_{QM}} dl_M = - \frac{\partial}{\partial t} \int_{D_W} \delta_W(M, t) \ln \frac{1}{r_{QM}} ds_M + \\ + \frac{1}{\lambda} U_1(t) + \frac{1}{\lambda} [\mathbf{V}, \mathbf{B}], \quad Q \in D_1; \\ \frac{\delta_q(Q, t)}{\lambda \gamma_q} + \sum_{m=1}^{N-1} \frac{\partial}{\partial t} \int_{D_m} \delta_m(M, t) \ln \frac{1}{r_{QM}} ds_M + \sum_{m=1}^{N_D} \frac{\mu_m}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \int_{D_N^m} \delta_N^m(M, t) \ln \frac{1}{r_{QM}} ds_M + \\ + \sum_{m=1}^{N_L} \frac{\partial}{\partial t} \int_{L_m} \sigma_m(M, t) \ln \frac{1}{r_{QM}} dl_M = - \frac{\partial}{\partial t} \int_{D_W} \delta_W(M, t) \ln \frac{1}{r_{QM}} ds_M + \\ + \frac{1}{\lambda} U_q(t), \quad Q \in D_q; \quad q=2, 3, \dots, N-1; \\ \sum_{m=1}^{N-1} \frac{\partial}{\partial t} \int_{D_m} \delta_m(M, t) \ln \frac{1}{r_{QM}} ds_M + \frac{\delta_N^q(Q, t)}{\lambda \gamma_N} + \sum_{m=1}^{N_D} \frac{\mu_m}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \int_{D_N^m} \delta_N^m(M, t) \ln \frac{1}{r_{QM}} ds_M + \\ + \sum_{m=1}^{N_L} \frac{\partial}{\partial t} \int_{L_m} \sigma_m(M, t) \ln \frac{1}{r_{QM}} dl_M = - \frac{\partial}{\partial t} \int_{D_W} \delta_W(M, t) \ln \frac{1}{r_{QM}} ds_M + \\ + \frac{1}{\lambda} U_N(t), \quad Q \in D_N^q, \quad q=1, 2, \dots, N_D; \quad (24)$$

где  $\lambda = \mu_0 / (2\pi)$ ;  $U_q(t)$  — напряжение как функция времени  $t$ , приходящееся на единицу длины  $q$ -го проводника вдоль оси  $z$ ,  $q=1, 2, \dots, N$ .

Запишем дополнительные условия в предположении, что отдельные массивные тела не имеют электрического контакта одно с другим. Тогда для отдельных линейных ферромагнитных массивных тел можем записать

$$I_q(t) = \int_{D_q} \delta_q(M, t) ds_M = 0, \quad q = 1, 2, \dots, N-1, \quad (25)$$

а для нелинейного ферромагнитного тела

$$I_N(t) = \sum_{m=1}^{N_D} \int_{D_N^m} \delta_N^m(M, t) ds_M = 0. \quad (26)$$

Система интегро-дифференциальных уравнений (23) — (26) позволяет найти распределение вихревых токов в массивных проводниках и токов намагниченности на границе магнитопровода и на границах всех элементарных областей на  $k$ -м шаге итерационного процесса решения нелинейной задачи. Магнитное поле по найденным токам определяется следующей формулой:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(Q, t) = & \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{D_W} \delta_W(M, t) \frac{(\mathbf{r}_{QM}, \mathbf{e}_z)}{r_{QM}^2} dM + \frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{m=1}^{N-1} \int_{D_m} \delta_m(M, t) \frac{(\mathbf{r}_{QM}, \mathbf{e}_z)}{r_{QM}^2} ds_M + \\ & + \sum_{m=1}^{N_D} \frac{\mu_m}{2\pi} \int_{D_N^m} \delta_N^m(M, t) \frac{(\mathbf{r}_{QM}, \mathbf{e}_z)}{r_{QM}^2} ds_M + \frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{m=1}^{N_L} \oint_{L_m} \sigma_m(M, t) \frac{(\mathbf{r}_{QM}, \mathbf{e}_z)}{r_{QM}^2} dl_M. \end{aligned} \quad (27)$$

**Алгоритм решения нелинейной задачи.** Предлагаемый итерационный процесс расчета магнитного поля для данного момента времени  $t$  в нелинейном ферромагнетике выглядит так:

1. Задаемся одинаковыми значениями  $\mu_q^{(1)}$  ( $q = 1, 2, \dots, N_D$ ), т.е.  $\mu_q^{(1)} = B/H$ , где  $B$  и  $H$  — значения индукции и напряженности магнитного поля, соответствующие точке на основной кривой намагничивания на линейном участке (до насыщения).

2. Решаем систему интегро-дифференциальных уравнений (24) — (26) в результате чего находим распределение плотности вихревых токов  $\delta_m(M, t)$ ,  $m = 1, 2, \dots, N-1$ ,  $\delta_N^m(M, t)$ ,  $m = 1, 2, \dots, N_D$ , и плотность токов намагниченности  $\sigma_m(M, t)$ ,  $m = 1, 2, \dots, N_L$ .

3. Находим поле  $\mathbf{B}_q^{(1)}$  ( $q = 1, 2, \dots, N_D$ ) в центральных точках элементарных областей, используя формулу (27).

4. Используя  $\mathbf{B}_q^{(1)}$ , по основной кривой намагничивания находим промежуточные значения магнитных проницаемостей  $\mu_q^{(2)*} = B_q^{(1)} / H_q^{(1)}$  ( $q = 1, 2, \dots, N_D$ ).



5. Находим совокупность новых значений магнитных проницаемостей по формуле  $\mu_q^{(2)} = \mu_q^{(1)} + \beta(\mu_q^{(2)*} - \mu_q^{(1)})$ , где коэффициент  $\beta$  берется в интервале (0; 1).

На этом заканчивается первая итерация. Далее переходим к пункту 2 и выполняем вторую итерацию и т. д. Итерационный процесс заканчивается по выполнению условия вида

$$\frac{\|\mu^{(k)} - \mu^{(k-1)}\|}{\|\mu^{(k)}\|} 100\% < \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  — заданная среднеквадратичная погрешность решения нелинейной задачи, выраженная в процентах. Здесь норма определяется так:

$$\|\mu^{(k)}\| = +\sqrt{(\mu_1^{(k)})^2 + (\mu_2^{(k)})^2 + \dots + (\mu_{N_D}^{(k)})^2}.$$

Коэффициент релаксации  $\beta$  вводится для ускорения сходимости процесса последовательных приближений. Его величина подбирается путем численного эксперимента. Введение этого коэффициента позволяет расходящийся (или пульсирующий) при  $\beta = 1$  процесс сделать хорошо сходящимся.

Итак, разработанная двумерная интегро-дифференциальная модель для расчета вихревых токов в системе кристаллизатор — ИП с нелинейным массивным магнитопроводом машины непрерывного литья заготовок позволяет более полно учитывать электротехнические свойства материалов, из которых изготовлены конструктивные элементы устройства.

The design procedure of the eddy currents in induction stirrer with the nonlinear solid iron core, consisting in dissection of a ferromagnetic into the partial areas, in each of which a magnetic conductivity on the given step of a repetitive process a stationary value is offered. Such reception gives in a problem of a finding of a magnetic field in a part-homogeneous environment on each iteration. For its calculation the system of the integral differential equations of density of the eddy currents and magnetization currents on a ferromagnetic boundary and on all boundaries between the partial areas is obtained, that in aggregate with introduction of relaxation coefficient for acceleration by powering has allowed creating effective algorithm of eddy currents' calculation in nonlinear conducting mediums.

1. Найдек В.Л., Дубоделов В.И., Евдокимов В.Ф. и др. Двумерная интегро-дифференциальная модель распределения вихревых токов и электродинамических усилий в системе кристаллизатор — индукционный перемешиватель машины непрерывного литья заготовок // Электрон. моделирование. — 2004. — 26, № 1. — С. 125—144.
2. Дубоделов В.И., Евдокимов В.Ф., Кондратенко И.П. и др. Блочный алгоритм реализации двумерной интегральной модели распределения синусоидальных вихревых токов и электродинамических усилий в кристаллизаторе с индукционным перемешивателем // Там же. — 2005. — 27, № 4. — С. 57—74.

3. Евдокимов В. Ф., Петрушенко Е. И. Интегральные уравнения для симметричных составляющих синусоидальных вихревых токов в сечении системы кристаллизатор—индукционный перемешиватель // Там же. — 2005. — 27, № 1. — С. 73—96.
4. Евдокимов В. Ф., Жильцов А. В., Петрушенко Е. И. Двумерная интегральная модель распределения синусоидальных токов и электродинамических усилий в системе кристаллизатор — индукционный перемешиватель // Там же. — 2006. — 28, № 2. — С. 3—16.
5. Евдокимов В. Ф., Жильцов А. В., Петрушенко Е. И. Блочный алгоритм компьютерной реализации двумерной интегральной модели распределения синусоидальных вихревых токов и электродинамических усилий в системе кристаллизатор — индукционный перемешиватель машины непрерывного литья блюмов и слябов // Зб. наук. праць ППМЕ ім. Г. Є. Пухова НАН України: Моделювання та інформаційні технології. — 2006. — Вып. 36. — С. 30—39.
6. Евдокимов В. Ф., Жильцов А. В., Петрушенко Е. И. Двумерная интегральная электромагнитогидродинамическая модель движения жидкой стали в системе кристаллизатор — индукционный перемешиватель // Электрон. моделирование. — 2006. — 28, № 6. — С. 105—114.
7. Евдокимов В. Ф., Жильцов А. В., Петрушенко Е. И. Двумерная интегро-дифференциальная модель распределения вихревых токов и электродинамических усилий в системе кристаллизатор — индукционный перемешиватель с массивным магнитопроводом // Там же. — 2007. — 29, № 2. — С. 3—15.

Поступила 23.03.07

*ЖИЛЬЦОВ Андрей Владимирович, канд. техн. наук, докторант Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г. Е. Пухова НАН Украины. В 1997 г. окончил Симферопольский государственный университет им. М. В. Фрунзе (Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского). Область научных исследований — теоретические основы электротехники, моделирование электромагнитных полей.*