УДК 519.6

И. О. Горошко, канд.физ.-мат. наук, **В. А. Тихоход**, аспирант
Ин-т проблем моделирования в энергетике
им. Г. Е. Пухова НАН Украины
(Украина, 03164, Киев, ул. Генерала Наумова, 15,
тел.: (044) 4243541, E-mail: averlan@i.com.ua)

Компьютерная реализация решения систем интегральных уравнений Вольтерры при исследовании многосвязных динамических объектов

(Статью представил д-р техн. наук А. Ф. Верлань)

Рассмотрена реализация квадратурных алгоритмов решения систем интегральных уравнений Вольтерры в вычислительной среде Matlab.

Розглянуто реалізацію квадратурних алгоритмів розв’язування систем інтегральних рівнянь Вольтерри в обчислювальному середовищі Matlab.

К л ю ч е в ы е с л о в а: интегральное уравнение Вольтерры, метод квадратур, формула трапеций.

Сложность структуры и большое число входных и выходных величин многосвязной динамической системы определяют сложность ее математического описания. Интегральные уравнения Вольтерры относятся к классу непараметрических динамических моделей, наиболее эффективно описывающих процессы и объекты, заданные динамическими характеристиками соответствующих элементов [1, 2].

Квадратурные алгоритмы решения систем интегральных уравнений Вольтерры [3]. Рассмотрим систему интегральных уравнений Вольтерры [4] m-го порядка с единичной матрицей коэффициентов при $y_j(t)$:

$$y_r(t)-\sum_{j=1}^{m}\int_a^x K_{rj}(t,s)y_j(s)ds=f_r(t),\ r=\overline{1,m}. \qquad (1)$$

Решение системы (1) находим с помощью квадратурных формул. Если решение ищем на отрезке $[a, b]$, то разбиваем его равномерно с шагом h точками $t_1 = a$, $t_2 = a + h$, …, $t_{n+1} = b$ на n частей. Вычисление интегралов осуществляется по формуле трапеций. В точках t_i (i = 1, 2, …, n+1) для определения приближенных решений получаем систему линейных уравнений вида

$$y_r^{(i)} - \sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{i} K_{rji}^{(l)} y_j^{(l)} A_l = f_r^{(i)},\ r = \overline{1,m}, \tag{2}$$

где $K_{rji}^{(l)} = K_{rj}(t_i, t_l)$; $y_j^{(l)} = y_j(t_l)$; $f_r^{(i)} = f_r(t_i)$;

$$A_l = \begin{cases} \dfrac{b-a}{2n}, & \text{если } l = 1 \text{ или } l = i, \\ \dfrac{b-a}{n}, & \text{если } l \neq 1 \text{ или } l \neq i. \end{cases}$$

Поскольку значения переменных $y_j^{(l)}$ для $l < i$ известны, $\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{i-1} K_{rji}^{(l)} y_j^{(l)} A_l$ — есть постоянная величина, суммируя которую с $f_r^{(i)}$, определяем свободный член r-го уравнения системы. Коэффициенты при $y_j^{(i)}$ в r-м уравнении (2) вычисляются так:

$$K_{rji}^{(l)} = \frac{K_{rj}(t_i, t_i)(b-a)}{2n} \quad \text{при} \quad r \neq j,$$

$$K_{rji}^{(l)} = 1 - \frac{K_{rr}(t_i, t_i)(b-a)}{2n} \quad \text{при} \quad r = j.$$

Решение полученной системы (2) находим методом исключения Гаусса. Алгоритм решения задачи реализован в программе SysVolt1, составленной в среде моделирования Matlab и выполнен на ЭВМ типа IBM PC. Исходные данные для решения задачи следующие:

M — порядок системы уравнений;

N — число интервалов, на которые разбит отрезок интегрирования;

A и B — нижняя и верхняя границы интегрирования;

F — массив размерности $M \times (N + 1)$, содержащий значения правых частей $f_r^{(i)}$;

Jadro — массив размерности $M^2 \times \sum_{k=1}^{N} k$, содержащий значения ядер $K_{rji}^{(l)} = K_{rj}(t_i, t_l)$; значение ядра K_{rj} в точке (t_i, t_l) помещается в ячейке с координатами (v, p), где $v = M(r-1) + j$, $p = \sum_{k=1}^{i-1} k + l$.

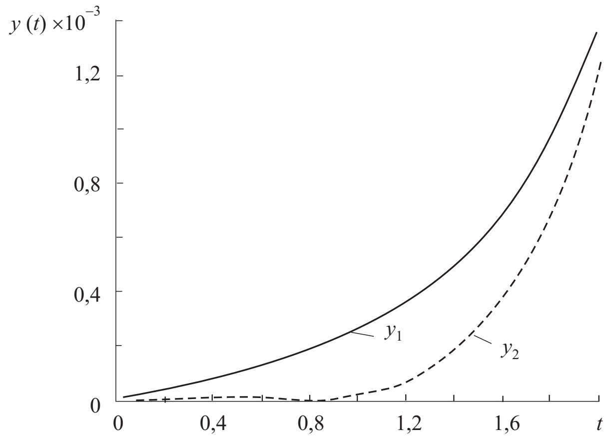

Рис. 1. Графики относительной погрешности решения системы (3) методом квадратур на отрезке [0, 2] при $N = 40$

В результате работы программы получаем матрицу Y размерностью $M\times(N+1)$, в которой найдены значения $y_j^{(i)}$ в точках $t_1, t_2, ..., t_{n+1}$.

Пример 1. Задана система интегральных уравнений

$$
\begin{aligned}
&y_1(t)-\int_0^t y_1(s)ds-\int_0^t (1+t-s)y_2(s)ds = 1{,}5e^{-0,1t}+1{,}5e^{-0,4t}+t-6{,}5,\\
&y_2(t)-\int_0^t (t-s)y_1(s)ds-\int_0^t y_2(s)ds = -50e^{-0,1t}-1{,}4e^{-0,4t}-5t+51,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

точное решение которой имеет вид $y_1(t)=0{,}5e^{-0,1t}$, $y_2(t)=-0{,}4e^{-0,4t}$.

Решение системы (3) ищем на отрезке [0, 2] методом квадратур с использованием формулы трапеций [4]. При этом отрезок интегрирования разбивается равномерно точками $t_i = a + h\,(i-1)$ на N частей. Относительная ошибка численного решения данной системы показана на рис. 1, из которого видно, что она не превышает 0,0014, или 0,14 %.

Рассмотрим более общую систему интегральных уравнений вида

$$
\sum_{j=1}^{m} a_{rj}y_j(t)-\sum_{j=1}^{m}\int_a^t K_{rj}(t,s)y_j(s)ds = f_r(t),\ r=\overline{1,m},
\tag{4}
$$

где a_{rj} $(i, j = 1, 2, ..., m)$ — постоянные числа.

Решение системы (4) также ищем методом квадратур с использованием формулы трапеций. Алгоритм решения системы совпадает с алго-

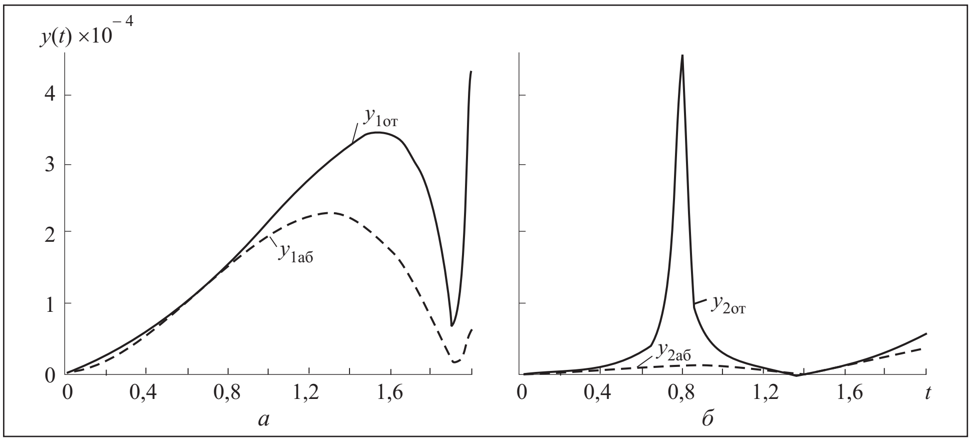

Рис. 2. Графики относительной и абсолютной погрешностей решения системы (5) методом квадратур при точном решении (6) на отрезке [0, 2]: *а* — для функции $y_1(t)$; *б* — для функции $y_2(t)$

ритмом решения рассмотренной выше системы (1). Отличие состоит в том, что к матрице коэффициентов *MA*, полученной при реализации программы SysVolt1, прибавляется матрица *MK* — матрица коэффициентов. При решении системы (2) эта матрица была единичной.

Алгоритм решения задачи реализован в программе SysVoltC, составленной в среде моделирования Matlab. Вычисления проводились на ЭВМ типа IBM PC. Входные данные те же, что при решении предыдущей задачи, а кроме того, МК — матрица размерностью $M\times M$ коэффициентов a_{ij}. Значение ядра K_{rj} в точке (t_i, t_l) помещается в ячейке с координатами (v, p), где $v = M\times(r-1)+j$, $p=\sum_{k=1}^{i-1}k+l$. В результате работы программы получаем матрицу Y размерностью $M\times(N+1)$ с найденными значениями $y_j^{(i)}$ в точках $t_1, t_2, ..., t_{n+1}$.

Пример 2. Задана система интегральных уравнений

$$y_1+0{,}25y_2-\int_0^t(t-s)y_1(s)\,ds-\int_0^t(-(t-s))y_2(s)\,ds=2\sin(t+1)-t\cos 1-\sin 1+0{,}25,$$

$$4y_1-0{,}25y_2-\int_0^t y_1(s)\,ds-\int_0^t(-1+t-s)\,y_2(s)\,ds= \tag{5}$$

$$=4\sin(t+1)+\cos(t+1)+0{,}5\sin 2t-\cos 1-0{,}25,$$

точное решение которой имеет вид

$$y_1=\sin(t+1);\;\; y_2=\cos 2t. \tag{6}$$

Решение системы (5) ищем на отрезке [0, 2], который, как это сделано в примере 1, разбивается точками $t_i = a + h(i-1)$, т.е. N = 40, h = 0,05. Относительная ошибка метода не превышает 0,00044, или 0,044 %. Относительные и абсолютные погрешности для функций $y_1(t)$ и $y_2(t)$ показаны на рис. 2.

Для удобства использования рассматриваемых методов решения систем интегральных уравнений на ЭВМ разработан специальный модуль для автоматизации генерации программного кода процедуры вычисления значений ядер, заданных в символьной форме.

Вывод. Таким образом, квадратурные алгоритмы решения систем интегральных уравнений Вольтерры реализованы в вычислительной среде Matlab с помощью дополнительных специализированных модулей, совокупность которых является основой соответствующего тулбокса, органически дополняющего апробированные блоки системы.

An implementation of quadrature algorithms for solving integral Volterra equation sets is considered in Matlab computational medium.

1. *Верлань А. Ф.* Метод интегральных уравнений в задачах моделирования динамических систем: Интегральные уравнения в прикладном моделировании. Ч. 1. — Киев : ИЭД АН УССР, 1983. — С. 14—17.
2. *Брикман М. С.* Интегральные модели в современной теории управления. — Рига : Зинатне, 1979. — 224 с.
3. *Апарцин А. С.* О применении различных квадратурных формул для численного решения интегральных уравнений Вольтерры I рода методом квадратурных сумм// Дифференциальные и интегральные уравнения. Вып. 2. — Иркутск: Иркутский госуниверситет. — 1973. — С. 107—116.
4. *Верлань А. Ф., Сизиков В. С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. — Киев : Наук. думка, 1986. — 542 с.

Поступила 15.09.06;
после доработки 20.10.06

ГОРОШКО Иван Олегович, канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр. Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины. В 1983 г. окончил Киевский госуниверситет. Область научных исследований – математическое моделирование процессов в динамических системах.

ТИХОХОД Владимир Александрович, аспирант Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины. В 2003 г. окончил Каменец-Подольский госуниверситет. Область научных исследований – математическое моделирование динамических систем.