УДК 004.942

В. А. Федорчук, канд. техн. наук, **В. А. Иванюк,** аспирант
Каменец-Подольский государственный университет
(Украина, 32300, Каменец-Подольский, ул. Уральская, 1,
тел.: (03849) 31642, E-mail: fva@kpdu.kp.km.ua;
тел.: (097) 8051401, E-mail: wivanyuk@mail.ru),
Ю. Д. Бойко
Национальный технический университет Украины «КПИ»
(Украина, 03056, Киев, пр-т Победы, 37,
тел.: (044) 2342772)

Алгоритм приближения передаточных функций цепными дробями

(Статью представил д-р техн. наук А. Ф. Верлань)

Рассмотрены алгоритм приближения передаточных функций цепными дробями и его реализация в среде Matlab. Посредством вычислительных экспериментов исследована работоспособность и точность алгоритма.

Розглянуто алгоритм наближення передатних функцій ланцюговими дробами та його реалізація в середовищі Matlab. За допомогою обчислювальних експериментів досліджено працездатність і точність алгоритму.

Ключевые слова: цепные дроби, аппроксимация, передаточная функция, Matlab.

Во многих задачах компьютерного моделирования динамических объектов возникает необходимость в понижении порядка сложных передаточных функций. Значительный интерес в этом случае представляет метод аппроксимации передаточных функций с использованием разложения в цепные дроби с последующим их усечением [1, 2]. Это объясняется тем, что цепные дроби обладают высокой сходимостью, а полученные аппроксимирующие модели отражают большинство свойств моделируемых объектов в первых членах ряда. Использование разложения в цепную дробь может привести к значительному понижению размерности передаточной функции и обеспечить приемлемую точность [3].

Существует ряд прикладных программ, в которых реализован широкий спектр средств и методов, используемых в задачах моделирования. К наиболее мощным программным средствам математического моделирования относится система Matlab, развитие которой путем реализации алгоритма приближений передаточных функций цепными дробями является актуальной задачей.

Алгоритм аппроксимации. Последовательность операций при понижении порядка дробно-рациональной передаточной функции с помощью цепных дробей следующая:

1) расположить слагаемые полиномов числителя и знаменателя передаточной функции по возрастанию степени p;

2) разложить передаточную функцию в цепную дробь;

3) выполнить усечение цепной дроби;

4) преобразовать усеченную цепную дробь в отношение двух полиномов.

В результате выполнения данных операций получаем передаточную функцию более низкого порядка относительно исходной. При этом точность приближения зависит от числа членов цепной дроби.

Пусть дана передаточная функция

$$W(p)=\frac{a_{n-1}p^{n-1}+a_{n-2}p^{n-2}+\ldots+a_1p+a_0}{b_np^n+b_{n-1}p^{n-1}+\ldots+b_1p+b_0}.$$

Определим члены цепной дроби. Обозначив $a_i=R_{2,i+1}$, $b_i=R_{1,i+1}$ и расположив слагаемые полиномов числителя и знаменателя передаточной функции $W(p)$ по возрастанию степеней p, запишем

$$W(p)=\frac{R_{21}+R_{22}p+\ldots+R_{2n}p^{n-1}}{R_{11}+R_{12}p+\ldots+R_{1,n+1}p^n}.$$

Посредством эквивалентных преобразований получаем

$$W(p)=\frac{1}{\dfrac{R_{11}}{R_{21}}+\dfrac{\dfrac{R_{21}R_{12}-R_{11}R_{22}}{R_{21}}p+\ldots+\dfrac{R_{21}R_{1,n+1}-R_{11}R_{2,n-1}}{R_{21}}p^n}{R_{21}+R_{22}p+\ldots+R_{2n}p^{n-1}}}.$$

Обозначим

$$\frac{R_{21}R_{12}-R_{11}R_{22}}{R_{21}}=R_{31},\ \ldots,\quad \frac{R_{21}R_{1,n+1}-R_{11}R_{2,n+1}}{R_{21}}=R_{3n}.$$

Тогда выражение для передаточной функции можно представить в виде:

$$W(p)=\frac{1}{\dfrac{R_{11}}{R_{21}}+\dfrac{R_{31}p+R_{32}p^2+\ldots+R_{3n}p^n}{R_{21}+R_{22}+\ldots+R_{2n}p^{n-1}}}.$$

Аналогично преобразуя последнее выражение, находим

$$W(p)=\cfrac{1}{\cfrac{R_{11}}{R_{21}}+\cfrac{p}{\cfrac{R_{21}}{R_{31}}+\cfrac{\cfrac{R_{31}R_{22}-R_{21}R_{32}}{R_{31}}p+\ldots+\cfrac{R_{31}R_{2n}-R_{21}R_{3n}}{R_{31}}p^{n-1}}{R_{31}+R_{32}p+\ldots+R_{3n}p^{n-1}}}}\,.$$

Вводя новые обозначения

$$\frac{R_{31}R_{22}-R_{21}R_{32}}{R_{31}}=R_{41},\ \ldots\ ,\ \frac{R_{31}R_{2n}-R_{21}R_{3n}}{R_{31}}=R_{4,n-1}$$

и продолжая операции преобразования, окончательно получаем

$$W(p)=\cfrac{1}{\cfrac{R_{11}}{R_{21}}+\cfrac{p}{\cfrac{R_{21}}{R_{31}}+\cfrac{p}{\cfrac{\ldots}{\cfrac{R_{2n-1,1}}{R_{2n,1}}+\cfrac{p}{\cfrac{R_{2n,1}}{R_{2n+1,1}}}}}}}\,.$$

Таким образом, коэффициенты цепной дроби могут быть вычислены по формулам

$$h_i=\frac{R_{i1}}{R_{i+1,1}},\ \ i=1,\,2,\,\ldots,2n,$$

где

$$R_{j,k}=\frac{R_{j-2,k+1}-R_{j-2,1}}{R_{j-1,1}},\quad j=3,4,\,\ldots,\,2n+1;\quad k=1,\,2,\,\ldots,\,n+1\,.$$

Коэффициенты $R_{j,k}$ можно представить в виде элементов матрицы

$$R=\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1n} & R_{1,n+1} \\ R_{21} & R_{22} & \cdots & R_{2n} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R_{2n+1,1} & R_{2n+1,2} & \cdots & R_{2n+1,n} & R_{2n+1,n+1} \end{bmatrix},$$

которая соответствует определителю Рауса, причем коэффициенты числителя и знаменателя передаточной функции занимают соответственно вторую и первую строки матрицы.

Для реализации алгоритма разложения передаточной функции в цепную дробь в среде Matlab разработана *m*-файл-функция **lanc_dr_p** с описанием **function h** = **lanc_dr_p(num,den)**, где num — полином числителя передаточной функции, den — полином знаменателя передаточной функции, h — коэффициенты цепной дроби.

Проведем теперь свертывание цепной дроби. Запишем цепную дробь

$$W(p)=\cfrac{1}{h_1+\cfrac{p}{h_2+\cfrac{\dots}{h_{n-2}+\cfrac{p}{h_{n-1}+\cfrac{p}{h_n}}}}}.$$

Обозначив $H_{21}=h_n h_{n-1}$, $H_{22}=1$, получим

$$W(p)=\cfrac{1}{h_1+\cfrac{p}{\cfrac{\dots}{h_{n-3}+\cfrac{p}{h_{n-2}+\cfrac{h_n p}{H_{21}+H_{22}p}}}}}=\cfrac{1}{h_1+\cfrac{p}{h_{n-3}+\cfrac{H_{21}p+p^2}{h_{n-2}H_{21}+(h_{n-2}H_{22}+h_n)p}}}.$$

Используя замену $H_{31}=h_{n-2}H_{21}$, $H_{32}=h_{n-2}H_{22}+h_n$, последующие действия выполняем аналогично. Результаты всех вычислений, представляем в виде матрицы

$$H=\begin{bmatrix}
h_n & & & & & \\
h_{n-1}H_{11} & 1 & & & & \\
h_{n-2}H_{21} & h_{n-2}H_{22}+H_{11} & & & & \\
h_{n-3}H_{31} & h_{n-3}H_{32}+H_{21} & 1 & & & \\
h_{n-4}H_{41} & h_{n-4}H_{42}+H_{31} & h_{n-4}H_{43}+H_{32} & & & \\
h_{n-5}H_{51} & h_{n-5}H_{52}+H_{41} & h_{n-5}H_{53}+H_{42} & & & \\
\dots & \dots & \dots & & & \\
h_2H_{n-2,1} & h_2H_{n-2,1}+H_{n-3,1} & h_2H_{n-2,3}+H_{n-3,2} & \cdots & h_2H_{n-2,k}+H_{n-3,k-1} & \\
h_1H_{n-1,1} & h_1H_{n-1,2}+H_{n-2,1} & h_1H_{n-1,3}+H_{n-2,2} & \cdots & h_1H_{n-1,k}+H_{n-2,k-1} & 1
\end{bmatrix}.$$

Коэффициенты передаточной функции получаем из двух последних строк матрицы *H*. Коэффициенты числителя и знаменателя содержатся

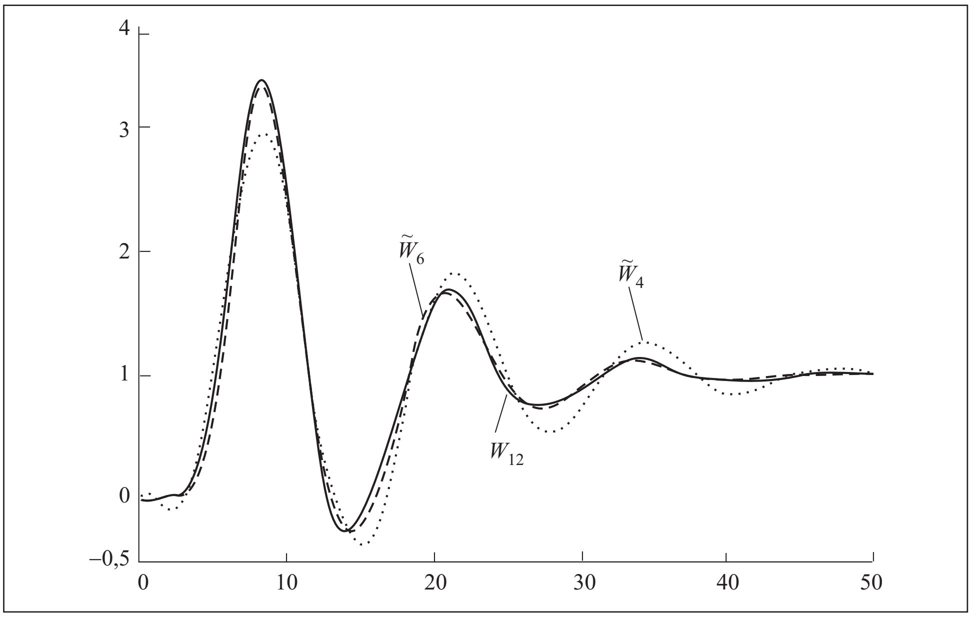

Рис. 1. Графики переходных характеристик передаточных функций

соответственно в предпоследней и последней строках матрицы H. В результате получаем приближенную передаточную функцию

$$\widetilde{W}(p)=\frac{H_{n-1,1}+H_{n-1,2}p+H_{n-1,3}p^2+...+H_{n-1,k-2}p^{k-3}+H_{n-1,k-1}p^{k-2}}{H_{n1}+H_{n2}p+H_{n3}p^2+...+H_{n,k-2}p^{k-3}+H_{n,k-1}p^{k-2}+H_{nk}p^{k-1}}.$$

Обозначив $H_{n-1,i}=\widetilde{a}_{i-1}$, $H_{n,i}=\widetilde{b}_{i-1}$ и разложив полиномы числителя и знаменателя передаточной функции $\widetilde{W}(p)$ по убыванию степеней оператора p, запишем

$$\widetilde{W}(p)=\frac{\widetilde{a}_{n-2}p^{n-2}+\widetilde{a}_{n-3}p^{n-3}+...+\widetilde{a}_1p+\widetilde{a}_0}{\widetilde{b}_{n-1}p^{n-1}+\widetilde{b}_{n-2}p^{n-2}+...+\widetilde{b}_1p+\widetilde{b}_0}.$$

Реализация алгоритма свертывания цепной дроби в передаточную функцию осуществлена в виде *m*-файл-функции с описанием **function [num,den]=lanc_dr_ob(h,n)**, где h — коэффициент цепной дроби; n — требуемая степень исходной передаточной функции; num — полином числителя передаточной функции; den — полином знаменателя передаточной функции.

Критерием точности решаемой задачи аппроксимации, приводящим к получению передаточной функции наименьшей степени, является условие

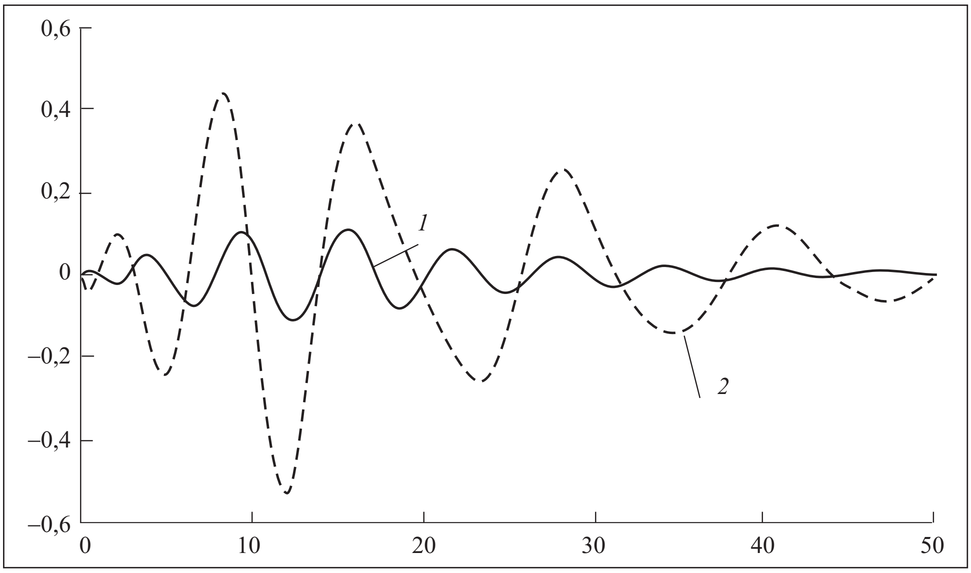

Рис. 2. Графики абсолютных погрешностей переходных характеристик для передаточных функций шестого (*1*) и четвертого (*2*) порядков

$\Delta = \max\limits_{0<i<t} |y_i - \widetilde{y}_i| < \varepsilon$, где y_i и $\widetilde{y}_i$— переходные характеристики, соответствующие исходной и аппроксимирующей передаточными функциям; ε — заданная допустимая точность. Была разработана *m*-файл-функция, в которой используются ранее описанные функции, с описанием **function [num1,den1]=lanc_dr(num,den,e,t)**, где num и den — коэффициенты полинома числителя и знаменателя передаточной функции; e — заданная точность вычислений; t — время; num1 и den1 — коэффициенты полинома числителя и знаменателя аппроксимированной передаточной функции.

Вычислительный эксперимент. В качестве примера исследуем результаты аппроксимации передаточной функции двенадцатого порядка:

$$W_{12} = \frac{p^4 + 7p^3 + 12p^2 + 7p + 1}{p^{12} + 8{,}2p^{11} + 34{,}6p^{10} + 92{,}4p^9 + 173{,}6p^8 + 241{,}2p^7 + 258{,}6p^6 + +217p^5 + 139{,}6p^4 + 68{,}6p^3 + 25{,}2p^2 + 6{,}2p + 1}.$$

Выполняем такую последовательность команд в среде Matlab:

```
num=[1 7 12 7 1];
den=[1 8.2 34.6 92.4 173.6 241.2 258.6 217 139.6 68.6 25.2 6.2 1];
h=lanc_dr_p(num,den);
```

```
[num4,den4]=lanc_dr_ob(h,4);
[num6,den6]=lanc_dr_ob(h,6);
[num8,den8]=lanc_dr_ob(h,8).
```

В результате получаем аппроксимированные передаточные функции 4, 6 и 8 порядков:

$$\widetilde{W}_4 = \frac{0{,}1615p^3 - 0{,}352p^2 + 0{,}1857p + 0{,}0555}{p^4 + 0{,}5793p^3 + 0{,}5437p^2 + 0{,}1413p + 0{,}0555},$$

$$\widetilde{W}_6 = \frac{-0{,}04013p^5 + 0{,}03141p^4 + 0{,}1523p^3 - 0{,}3691p^2 + 0{,}2843p + 0{,}07672}{p^6 + 1{,}019p^5 + 1{,}993p^4 + 1{,}158p^3 + 0{,}8459p^2 + 0{,}2229p + 0{,}07672},$$

$$\widetilde{W}_8 = \frac{\dfrac{-0{,}001658p^7 + 0{,}01056p^6 - 0{,}0303p^5 + 0{,}03669p^4 + 0{,}05999p^3 -}{-0{,}3942p^2 + 0{,}9094p + 0{,}2074}}{\dfrac{p^8 + 3{,}232p^7 + 6{,}894p^6 + 7{,}845p^5 + 8{,}469p^4 + 4{,}943p^3 +}{+2{,}778p^2 + 0{,}7434p + 0{,}2074}}.$$

С помощью приложения Control System Toolbox среды Matlab получены переходные характеристики передаточных функций (рис. 1) и исследованы абсолютные погрешности переходных характеристик для передаточных функций разных порядков (рис. 2). Максимальные погрешности на выбранном промежутке составляют: d8 = 2.043184092946071e – 004; d6 = = 0.11502488152198; d4 = 0.52153608257936.

Результаты проведенных экспериментов свидетельствуют о том, что полученные с помощью данного метода аппроксимации передаточные функции имеют достаточную точность для инженерных расчетов.

Вывод. Таким образом, реализация предложенного алгоритма в среде Matlab позволила расширить возможности данной системы при исследовании различных типов линейных динамических объектов. Вычислительные эксперименты подтвердили работоспособность данного алгоритма и его эффективность при упрощении сложных моделей в пределах заданной точности моделирования.

An algorithm of transfer function approximation by continued fractions and its realization in Matlab medium is considered. The algorithm efficiency and accuracy is studied using computational experiments.

1. *Арнольд В. И.* Цепные дроби. — М. : Изд-во Моск. центра непрерывного математического образования, 2001. — 40 с.
2. *Хинчин А. Я.* Цепные дроби. — М. : Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961. — 112 с.
3. *Скоробогатько В. Я.* Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. — М. : Наука, 1983. — 312 с.

Поступила 18.09.06

ФЕДОРЧУК Владимир Анатольевич, канд. техн. наук, доцент кафедры информатики Каменец-Полольского госуниверситета. В 1984 г. окончил Каменец-Подольский государственный педагогический ин-т. Область научных исследований — математическое моделирование динамических систем.

ИВАНЮК Виталий Анатольевич, аспирант, ассистент кафедры информатики Каменец-Подольского госуниверситета, который окончил в 2003 г. Область научных исследований — математическое моделирование динамических систем.

БОЙКО Юрий Давидович, специалист-технолог «Gelonor Jnc.», Менло Парк, США. В 1985 г. окончил Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований — компьютерные средства моделирования и управления.