
УДК 330.46(075)

Я. А. Колесникова, О. А. Дмитриева, канд. техн. наук
Донецкий национальный технический университет
(Украина, 83000, Донецк, ул. Артема, 58,
тел.: (062) 3010757, E-mail: kolesnikov@donec.net; dmitriv@r5.dgtu.donetsk.ua)

Динамическое моделирование управления запасами

Рассмотрена система управления запасами скоропортящихся товаров, предусматривающая введение скидок на продажную цену продукции с целью уменьшения объема списываемых товаров. Система основана на приближенном описании уровня запасов в единицу времени, ожидаемого объема списываемых товаров и ожидаемого уровня дефицита.

Розглянуто систему управління запасами швидкопсувних товарів, яка передбачає введення знижок на продажну ціну продукції з метою зменшення обсягу товарів, що підлягають списанню. В основу системи покладено наближений опис рівня запасів у одиницю часу, очікуваного обсягу товарів, що підлягають списанню, та очікуваного рівня дефіциту.

К л ю ч е в ы е с л о в а: запас, дефицит, скидка, спрос, товар.

Повышение конкуренции в сфере розничной торговли невозможно без создания, освоения и внедрения соответствующих инструментов для решения экономических задач. Поскольку малые и средние предприятия часто ограничены в денежных средствах, весьма актуальной является разработка системы управления запасами (УЗ), автоматизирующей отдельные участки работы предприятия.

К таким инструментам можно отнести автоматизированную систему учета товаров на складе и систему УЗ. Как правило, пополнение запасов необоснованно планируется в соответствии с жестко установленными нормативами независимо от того, насколько экономически оправдан данный уровень запаса в данной конкретной ситуации. Такой подход приводит к заведомо завышенному уровню запасов, что означает неоправданное отвлечение финансовых ресурсов и снижение их оборачиваемости [1]. Поэтому автоматизированная система УЗ с одной стороны, не является слишком дорогостоящей для предприятия, а с другой — может значительно повысить эффективность его работы. Такая система основана на модели УЗ с постоянным контролем уровня запаса. При этом новая заявка на заказ размером Q подается в том случае, если уровень запаса снижается до значения r .

Точное управление скоропортящимися запасами. Скоропортящийся запас — это запас, в котором все единицы одного товара, оставшиеся на складе, одновременно потеряют свою пригодность. Оставшиеся единицы должны быть выброшены, если они не были использованы после хранения в течение фиксированного промежутка времени. Поэтому УЗ скоропортящихся товаров происходит следующим образом:

1) определяется оптимальный размер заказа (с учетом расходов на хранение, на дефицит и списание устаревших товаров) и подается заказ на пополнение запаса;

2) весь прибывший продукт считается новым;

3) отпуск товара осуществляется по принципу «первый пришел — первый вышел»;

4) продукт, не реализованный в течение срока хранения m , списывается.

Состояние запаса можно представить вектором из $m - 1$ компоненты (наличие продукта с распределением по оставшимся срокам годности в периодах) [2]. Точное описание объема запаса в каждый момент времени представим в виде

$$x_n^1 = [Q]^+,$$

$$x_n^i = [x_{n-1}^{i-1} - \max\{D_n, x_{n-1}^m\}]^+, \quad i=2, \dots, m, \quad (1)$$

где $[w]^+ \equiv \max\{0, w\}$; x_n^i — количество запаса возраста i в момент времени n ; D_n — спрос в момент времени n ; m — срок хранения продукта.

Приближенное описание модели УЗ с ограниченным сроком хранения. Использование формулы (1) при создании программного продукта, предназначенного для решения реальных задач УЗ, практически невозможно, так как связано со значительной вычислительной сложностью. Поэтому в рассматриваемой системе используем приближенный подход для описания запаса в каждый момент времени.

При формировании приближенного значения уровня запаса в каждый момент времени примем следующие предположения.

1. В системе рассматривается только один скоропортящийся продукт. Каждая единица продукта имеет фиксированный срок жизни m . Уровень запаса отслеживается постоянно и уменьшается в результате удовлетворения спроса или избавления от устаревших единиц.

2. Заказ размером Q размещается, когда уровень запаса достигает минимально допустимого уровня r . Учитываются время доставки L для каждого пополнения и фиксированные затраты на оформление заказа K .

3. Все единицы заказа на пополнение запаса прибывают свежими или новыми. Пригодность каждой единицы товара не уменьшается и не исче-

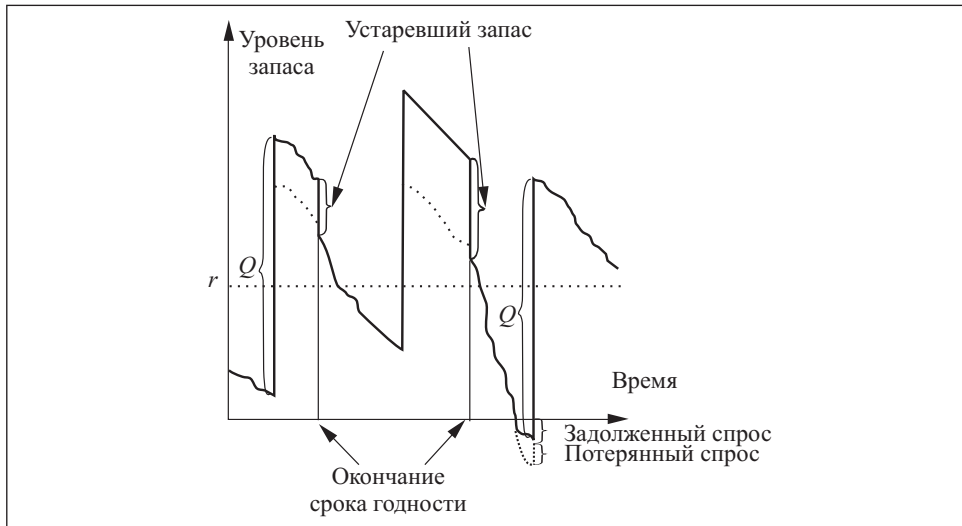


Рис. 1. Динамика уровня запаса скоропортящегося товара в (Q, r) -системе

зает до момента окончания срока годности, но товар должен быть выброшен, если он не был использован до истечения срока хранения. Затраты, понесенные вследствие устаревания товара, равны W за единицу.

4. Спрос в единицу времени d — положительная случайная переменная, имеющая особое непрерывное или дискретное распределение с функцией плотности $f(u) = dPr\{d \leq u\}/du$ и матожиданием D .

5. Единицы запаса всегда используются согласно FIFO политике выпуска (первый попавший на склад потребляется первым).

6. Часть неудовлетворенного спроса в системе учитывается, а часть — теряется безвозвратно, причем доля учтенного спроса не зависит от продолжительности дефицита.

В случае с полной потерей продаж весь неудовлетворенный спрос полностью теряется, и покупатели обращаются для удовлетворения потребности в товаре к другим источникам. Однако часто возникает ситуация, когда в случае отсутствия на складе товара, некоторые покупатели ждут удовлетворения их спроса из следующего заказа. Следовательно, можно предположить, что только часть дефицита, $(0 \leq \beta \leq 1)$ становится на учет, а часть $(1 - \beta)$ теряется навсегда. Динамика уровня запаса в такой системе изображена на рис. 1.

Ожидаемый уровень запасов в системе в любой момент времени можно описать соотношением [3]

$$EI = r - D_L + \frac{Q + (1 - \beta)ES}{2} + \frac{D_L(ES - ER)}{2[Q + (1 - \beta)ES - ER]}.$$

Здесь r — имеющийся запас на момент возобновления заказа; D_L — матожидание спроса за время доставки; Q — размер заказа; β — доля неудовлетворенного спроса в цикле пополнения, которая может быть задолжена; ER — ожидаемое количество устаревших товаров в текущем заказе размера Q ,

$$ER = \sum_{u < r+Q} (r+Q-u) f_{m+L}(u) - \sum_{u < r} (r-u) f_{m+L}(u), \quad (2)$$

где $f_{m+L}(u)$ — вероятностная функция случайной переменной d_{m+L} (т. е. спрос в течение $m + L$ единиц времени); ES — ожидаемый объем дефицита в цикле,

$$ES = \sum_{u < r} (u-r) f_L(u), \quad (3)$$

где $f_L(u)$ — вероятностная функция случайной переменной d_L .

Оптимальная политика УЗ, т. е. значения параметров Q и r , определяется минимумом общих затрат в единицу времени. Общие ожидаемые средние затраты в единицу времени для случая с частичным учетом неудовлетворенных требований можно определить из соотношения

$$EAC(Q,r) = \frac{K + CQ + P\beta ES + \theta(1-\beta)ES + WER}{ET} + hEI, \quad (4)$$

где ET — ожидаемая длина цикла,

$$ET = \frac{[Q + (1-\beta)ES - ER]}{D},$$

K — фиксированные затраты на оформление заказа; C — затраты на пополнение единицы запаса; P — затраты, связанные с учетом неудовлетворенного спроса (за единицу); θ — затраты, связанные с потерей неудовлетворенного спроса (за единицу); W — ущерб вследствие устаревания товара (за единицу); h — затраты на содержание единицы запаса в единицу времени; ER определяется из соотношения (2); ES — из соотношения (3). Когда $\beta = 0$, случай с частичным учетом неудовлетворенных требований преобразуется в случай с полной потерей продаж, а когда $\beta = 1$ — в случай с полным учетом неудовлетворенных требований.

Скидка на продажную цену товара для системы с периодическими проверками уровня запаса. Для уменьшения объема устаревших запасов, подлежащих списанию, в [4] предлагается ввести скидку на продажную цену продукции с целью повышения спроса, а следовательно, уменьшения объема продукции, подлежащей списанию. Алгоритм определения скидки, описанный в [4], позволяет установить оптимальный раз-

мер заказа и оптимальную ценовую политику для системы с периодическим контролем уровня запаса. В такой системе периодически (раз в день, неделю, месяц) проверяется наличный запас, и если его величина опустилась ниже заданного уровня, делается заказ на Q единиц.

Будем рассматривать один вариант скидки. При этом предполагаем, что спрос известен как для случая, когда скидка используется, так и для случая продаж по обычной цене. Необходимо определить оптимальный размер заказа и время введения скидки. Оптимальный объем заказа выбираем в диапазоне от нуля до заказа, который в сумме с остатком на начало периода давал бы максимальный запас.

Поиск оптимальных параметров представляет собой задачу динамической оптимизации. Функция цели в задаче оптимизации — максимизировать общий ожидаемый выигрыш $r_t(s_t(a, Q_t))$ для состояния s_t , полученный за период от текущего момента t до конца горизонта планирования и зависящий от решения, принятого в ценовой политике a , и объема заказа Q_t . Параметр a принимает значение p при введении скидки и значение n , если скидка не введена. Выигрыш $r(s_t(a, Q_t))$ определяется как разница между доходом и затратами, включающими затраты на хранение запаса, понесенные вследствие дефицита, на оформление и приобретение заказа, возникающие в связи с устареванием товара, на введение ценовой скидки.

Целевую функцию для случаев введения скидки и без скидки определяем соответственно по формулам

$$r(s_t(p, Q_t)) = \sum_{\mu_{tp}=0}^D [pr(\mu_{tp}) \{G(p, Q_t) - (h[0, i_t - \mu_{tp}]^+) - (W[0, x_{1t} - \mu_{tp}]^+)\}] - Z,$$

$$r(s_t(n, Q_t)) = \sum_{\mu_{tm}=0}^D [pr(\mu_{tm}) \{G(n, Q_t) - (h[0, i_t - \mu_{tm}]^+) - (W[0, x_{1t} - \mu_{tm}]^+)\}]. \quad (5)$$

Здесь μ_{ta} — случайная переменная спроса в период t с известным распределением; $pr(\mu_{ta})$ — вероятность того, что спрос в период t при ценовой политике a будет равен μ_{ta} ; i_t — общий запас в начале периода t ; x_{it} — количество запасов в период t с оставшимся сроком использования i . Функция $G(a, Q_t)$ определяется из соотношения

$$G(a, Q_t) = (R_a[\mu_{ta}, i_t]^-) - (\theta[0, \mu_{ta} - i_t]^+) - [Q_t C],$$

где R_a — продажная цена; $[a, b]^+$ — максимум из (a, b) ; $[a, b]^-$ — минимум из (a, b) . В случае, если на этапе t было принято решение о введении

ценовой скидки, то на всех последующих этапах выполняем расчет только по первой формуле (5).

На последнем этапе затраты на содержание запаса отсутствуют, поэтому ожидаемый выигрыш для случаев со скидкой и без нее находим соответственно из соотношений

$$r(s_N(p, Q_N)) = \sum_{\mu_{Np}=0}^D [pr(\mu_{Np}) \{G(p, Q_N) - (W[0, i_N - \mu_{Np}]^+)^+\}] - Z,$$

$$r(s_N(n, Q_N)) = \sum_{\mu_{Nn}=0}^D [pr(\mu_{Nn}) \{G(n, Q_N) - (W[0, i_N - \mu_{Nn}]^+)^+\}].$$

Общий ожидаемый выигрыш определяем по формуле

$$R_t^*(s_t) = \max_{Q_t} \left\{ r_t(s_t(a, Q_t)) + \left[\sum_{h \in S, \mu \in [0, D]} [pr(\mu_{ta} | s_t, (a, Q_t))] Q_{t+1}^*(h_{t+1}) \right] \right\}, \quad (6)$$

где $Q_t = \{0 \dots I - j_t\}$ — набор возможных значений величины запаса; I — максимальный запас; j_t — начальный запас, переносимый из предыдущего периода; h_{t+1} — результирующее состояние в период $(t + 1)$; $pr(\mu_{ta} | s_t, (a, Q_t))$ — вероятность спроса μ_{ta} в случае реализации действия (a, Q_t) в состоянии s_t в периоде t .

Оптимальная ценовая политика определяется с помощью рекурсивной динамической процедуры, начиная с $t = N$ и решая уравнение (6), пока t не станет равным нулю [4].

Основной недостаток рассмотренного подхода заключается в том, что по мере увеличения срока годности скоропортящегося товара увеличивается и возможное число состояний системы. Сокращение числа состояний возможно в результате объединения некоторых запасов без существенной потери информации. Предложенное в [5] объединение предполагает группировку более свежих товаров.

Скидка для системы с оперативной информацией об уровне запаса. Рассмотренные выше алгоритмы определения скидки не подходят для разработанной системы в силу следующих причин.

1. В данных системах скидка определяет второй вариант цены, поскольку оптимальные параметры политики УЗ переопределяются каждый раз, когда устанавливается новая цена. В разработанной системе скидка должна быть инструментом, позволяющим в случае нестабильного спроса уменьшить остаток нераспроданного товара к окончанию его срока годности.

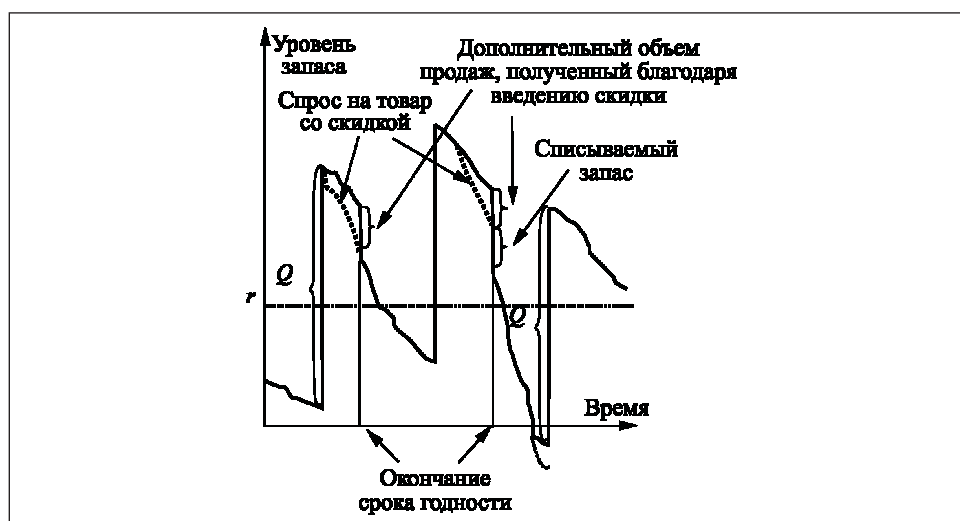


Рис. 2. Динамика уровня запаса скоропортящегося товара в (Q, r) -системе при введении скидки

2. Предлагается только два варианта цены (со скидкой и без нее). На практике менеджер должен иметь больше вариантов ценовых скидок для более гибкого управления запасами.

3. Алгоритм достаточно сложен. Предложенная аппроксимация действует только для товаров с относительно небольшим сроком годности.

Рассмотрим более простой и гибкий алгоритм УЗ скоропортящихся товаров. Основные условия использования скидки в (Q, r) -системе УЗ следующие:

1) для управления запасами используется (Q, r) -система, характеризующаяся постоянным объемом заказа;

2) для определения оптимальных параметров политики УЗ используются приближенные подходы;

3) скидка может быть установлена не на всем интервале срока годности товара $(0 \dots t)$, а только на определенное число дней M до окончания срока годности товара;

4) скидка устанавливается только в том случае, если за M дней до окончания срока годности товара T_m , его объем на складе превышает ожидаемый объем продаж в течение M дней при текущем спросе; схема действия такой скидки показана на рис. 2;

5) оптимальный размер заказа не зависит от устанавливаемой скидки;

6) определение времени установления скидки и определение ее величины; оптимизация проводится по нескольким заранее установленным значениям скидок, например $p_1 = 5\%$, $p_2 = 10\%$, $p_3 = 15\%$, $p_4 = 20\%$, ... ;

7) спрос на товар при различных значениях скидки известен.

Следует обратить внимание на то, что скидка не всегда является экономически целесообразной. В некоторых случаях затраты на введение скидки могут превысить затраты, возникающие в связи со списанием товара, срок годности которого истек. Например, при небольшом ожидаемом стоимостном объеме устаревших товаров выгода, полученная при реализации товара со скидкой, может не покрыть расходы, понесенные в связи с введением скидки (внесение изменений в информационную систему, замена ценников, дополнительная работа сотрудников и др.).

Кроме того, целью введения скидки является не уменьшение объема списываемых в связи с устареванием товара запасов, а максимизация прибыли от реализации товара. Поэтому следует выбирать не ту скидку, при которой будет распродан весь товар, а ту, которая обеспечит максимальную выгоду. Это приводит к возникновению случаев, когда не весь объем товара реализован по истечении срока годности, а только его часть.

Ситуации с полной и частичной реализацией товара при введении скидки схематически изображены на рис. 2.

Алгоритм работы данной системы следующий.

Шаг 1. Определяем оптимальный размер заказа и точку заказа по приближенным формулам. Оптимальный размер заказа находим исходя из минимума средних ожидаемых издержек в единицу времени, определяемых соотношением (4).

Шаг 2. При $(T_m - t) > M$ каждый раз, когда уровень запаса в системе опускается до r , выполняем заказ объемом Q ; товар продается по обычной цене.

Шаг 3. Если $(T_m - t) \leq M$, то выполняется сравнение наличного запаса U_t и $D(T_m - t)$ — ожидаемого объема реализации товара за время $(T_m - t)$:
если $U_t \leq D(T_m - t)$, то скидка не предлагается, возвращаемся к шагу 2;
если $U_t > D(T_m - t)$, то необходимо определить размер скидки и переходим к шагу 4.

Шаг 4. Полагаем $i = T_m$. Прибыль $R(p, i)$ за период времени $T_m - t$, полученная при установлении скидки $p = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, определяется из соотношения

$$R(p, (T_m - t)) = p \min(U_t; D(p, (T_m - t))) - TCU(T_m - t),$$

где $D(p, i)$ — спрос на товар со скидкой p за период времени i ; с учетом нового значения спроса

$$TCU(i, p) = \frac{d_{pi}}{Q} K + Cd_{pi} + B\beta(d_{pi} - U_i)^+ +$$

$$+\theta(1-\beta)(d_{pi}-U_i)^+ + W(x_{1i}-d_{pi})^+ + h(U_i-d_{pi})^+.$$

Пока i не станет равным t определяем ожидаемую прибыль за период от t до T_m по формуле

$$F_i = \max_{p \in \{p_1, p_2, \dots, p_n\}} \{R(p, i) + F_{i+1}\},$$

где F_{i+1} — оптимальное решение на предыдущем этапе $F_{T_{m+1}} = 0$.

Шаг 5. До истечения срока годности товар продается со скидкой, установленной на шаге 3.

Выводы. Рассмотренная (Q, r) -система УЗ с ограниченным сроком использования основана на приближенном описании ее ожидаемых параметров. Однако в связи со случайным характером спроса определение ожидаемого уровня запаса в системе и затем оптимальных параметров системы (размера и точки заказа) будет неточным. При этом возможна ситуация, когда на складе остается нераспроданный товар с истекшим сроком годности и подлежащий списанию. В такой ситуации предприятие неизбежно несет убытки, определяемые стоимостью просроченных товаров и затратами на их списание. Для того чтобы уменьшить эти убытки в разработанной системе вводится скидка на продажную цену продукции. Возросший в результате снижения цены спрос поглощает излишек запасов и уменьшает объем списываемой продукции. Кроме того, в зависимости от объема излишков возможен выбор оптимального размера скидки, а также времени ее внедрения.

Поскольку в предложенном алгоритме параметры оптимальной политики УЗ определяются на основании приближенных формул, а следовательно, более просты в расчетах, использование данного алгоритма возможно и для более сложных многономенклатурных задач. Вычислительную сложность алгоритма можно существенно уменьшить, так как механизм определения скидки включается только за определенное время до окончания срока годности товара.

A system for perishable stocks management is considered. This system provides the reduction of the production selling price to reduce the volume of the goods written off. The system is based on the approximate description of stock level per unit time, of the expected volume of written off goods and of the expected deficit level.

1. Черненко М. Проблемы управления украинскими предприятиями // Корпоративные системы. — 2002. — № 4. — С. 14—19.
2. Рыжиков Ю. И. Теория очередей и управление запасами: Учеб. пособие для вузов. — СПб.: Питер, 2001. — 384 с.
3. Huan Neng Chiu. A Good Approximation of the Inventory Level in a (Q, r) Perishable Inventory System // Operations Research. — 1999. — Vol. 33, № 1. — P. 29—45.
4. Chande A., Hemachandra N. and Rangaraj N. Fixed-life perishable inventory problem and approximation under price promotion // Technical Report, Industrial Engineering and Operations Research. — Bombay: Indian Institute of Technology. — 2004. — 20 p.

5. Chandec A., Dhekane S., Hemachandra N., Rangaraj N. Perishable inventory management and dynamic pricing using RFID technology // Industrial Engineering and Operations Research. — 2005. — Vol. 30, Parts 2 & 3. — P. 445 — 462.

Поступила 04.09.06

КОЛЕСНИКОВА Яна Александровна, магистр Донецкого национального технического университета. Область научных исследований — динамические модели и методы управления запасами предприятий.

ДМИТРИЕВА Ольга Анатольевна, канд. техн. наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики Донецкого национального технического университета. В 1988 г. окончила Донецкий политехнический ин-т. Область научных исследований — моделирование динамических систем большой размерности с сосредоточенными параметрами, разработка численных алгоритмов, ориентированных на реализацию в многопроцессорных вычислительных системах.