

УДК 534.1:534.232

## СВОЙСТВА ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В УПРУГОМ ПОЛОМ ЦИЛИНДРЕ

В. Т. ГРИНЧЕНКО\*, Г. Л. КОМИССАРОВА\*\*

\*Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

\*\*Институт механики НАН Украины им. С. П. Тимошенко, Киев

Получено 30.11.2004

Исследованы свойства низших нормальных осесимметричных волн в упругом полом цилиндре. Решение граничной задачи получено на основе уравнений динамической теории упругости. Асимптотический анализ дисперсионного уравнения в области больших волновых чисел показал, что в полом цилиндре существует две поверхностные волны. Они в полом цилиндре формируются отдельно на внешней и внутренней поверхностях цилиндра. Предельным значением фазовой скорости указанных волн является скорость волны Рэлея. Разработана методика вычисления кинематических характеристик в рамках рассмотренной постановки задачи. В качестве конкретного примера представлена трансформация волновых движений в широком диапазоне волновых чисел (от 10 до 100).

Досліджено властивості нижчих нормальних осесиметричних хвиль у пружному порожнистому циліндрі. Розв'язок граничної задачі побудовано на основі рівнянь динамічної теорії пружності. Асимптотичний аналіз дисперсійного рівняння в області великих хвильових чисел показав, що у порожнистому циліндрі існує дві поверхневі хвилі. Вони формуються окремо на зовнішній і внутрішній поверхнях циліндра. Граничним значенням фазової швидкості вказаних хвиль є швидкість хвилі Релея. Розроблено методику обчислення кінематичних характеристик у рамках розглянутої постановки задачі. Як конкретний приклад представлено трансформацію хвильових рухів у широкому діапазоні хвильових чисел (від 10 до 100).

Properties of the lowest normal axisymmetric waves in a hollow elastic cylinder are investigated. The boundary problem solution is obtained on the basis of the equations of dynamic elasticity theory. An asymptotic analysis of dispersion equation for large wavenumbers has shown the existence of two surface waves in the hollow cylinder. The limiting value for the phase velocity of these waves is the Rayleigh velocity. The surface waves in the hollow cylinder form separately on its external and internal surfaces. A technique for calculating the kinematic characteristics within the considered problem statement is developed. As an example, wave motion transformation in wide range of wave numbers is presented (10 up to 100).

### ВВЕДЕНИЕ

Вопрос о существовании гармонических волн, локализованных вблизи свободной плоской границы упругого изотропного полупространства, впервые поставлен и решен Рэлеем в 1885 [1]. В настоящее время свойства поверхностной волны Рэлея достаточно полно изучены как для изотропного тела, так и для тел с различными типами анизотропии [2, 3]. Волны Рэлея широко используются в сейсмологии и сейсморазведке (как средство неразрушающего контроля поверхности и поверхностного слоя образцов) и в акустоэлектронике. Потребности практики способствовали появлению большого количества работ, посвященных изучению локализации волновых движений вблизи поверхности упругих тел. Классификация типов поверхностных волн в упругом теле и вблизи поверхности раздела сред с разными свойствами содержится в работах [3–6]. Современный уровень понимания явления локализации волновых движений в упругих телах изложен в [7].

Качественные представления о формировании системы поверхностных волн в полом упругом цилиндре формировались на основе результатов, по-

лученных для упругого слоя и сплошного кругового цилиндра. В случае осесимметричной деформации сплошного цилиндра низшая нормальная волна в высокочастотном пределе становится поверхностной волной с фазовой скоростью, приближающейся снизу к скорости волны Рэлея. В общем случае деформации упругого слоя его напряженно-деформированное состояние представляется суперпозицией симметричного и антисимметричного относительно срединной плоскости состояний. При этом в каждом из них возможно формирование локализованных вблизи поверхностей волновых возмущений, связанных с низшими нормальными волнами.

Характеризуя дисперсионные характеристики общего волнового движения в слое, следует отметить существование двух волн, распространяющихся при любом значении частоты (имеющих нулевые частоты запертия). Поскольку фазовые скорости этих двух волн хотя и близки к рэлеевской скорости, но всегда различны, то в общем случае деформации в слое формируется специфическая поверхностная волна. Максимальные амплитуды смещений (и напряжений) в ней возникают последовательно то на одной, то на другой

поверхности слоя – наблюдается процесс обмена энергией между поверхностями.

В случае сплошного цилиндра существует только одна волна с нулевой частотой запертия. Именно она трансформируется в поверхностную волну. Важно также отметить, что все волны более высокого порядка имеют предельное значение фазовой скорости, равное скорости сдвиговых волн. Для полого цилиндра также существует единственная волна с нулевой частотой запертия. В то же время, наличие двух свободных поверхностей создает предпосылки для существования двух поверхностных волн. При этом в силу отсутствия геометрической симметрии эти волны должны отличаться от симметричной и антисимметричной волн в слое. Указанное обстоятельство стимулирует интерес к более детальному изучению характеристик нормальных волн в полном упругом цилиндре.

Принципиальное отличие дисперсионных свойств нормальных волн в полном цилиндре от волн в слое и сплошном цилиндре устанавливается уже при качественном анализе дисперсионных соотношений. Дисперсионные характеристики волн в полном цилиндре со свободными поверхностями зависят от двух геометрических параметров. Кроме радиуса кривизны, важную роль играет толщина стенки цилиндра. Влияние этого геометрического параметра на поведение волн в полном цилиндре рассмотрено в работах [8–12]. Влияние толщины цилиндра существенно сказывается на поведении низшей нормальной волны в области относительно низких частот и распределении частот запертия для волн высоких порядков.

Работы [13, 14] следует отметить как первые публикации, в которых обращено внимание на особый характер формирования локализованных волновых движений в полном цилиндре. Их авторами приведены и проанализированы некоторые количественные данные о фазовых скоростях и формах низших нормальных волн. Одним из наиболее важных результатов является указание на то, что вторая нормальная волна в полном цилиндре имеет в качестве высокочастотного предела скорость, меньшую скорости сдвиговых волн и близкую к скорости волн Рэлея. Данные конкретных расчетов позволили сделать предположение о том, что в случае полого цилиндра обмен энергией между локализованными вблизи поверхностей волновыми движениями в общем случае не происходит, но может возникнуть при некоторых специальных условиях.

Цель данной работы – разработка методики анализа характеристик нормальных волн в области

высоких частот, изучение особенностей формирования поверхностных волн, анализ кинематических характеристик этих волн в широком диапазоне частот (волновых чисел).

## 1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЕКТОРА СМЕЩЕНИЙ. АНАЛИЗ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ

Вектор смещений  $\mathbf{u}$  в динамических задачах теории упругости определяется из уравнения движения Ламе

$$(\lambda + \mu)\text{grad div } \mathbf{u} - \text{rot rot } \mathbf{u} + \mathbf{b} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  – константы Ламе;  $\rho$  – плотность;  $\mathbf{b}$  – вектор объемных сил.

В рассматриваемом случае осесимметричной деформации полого цилиндра вектор смещений  $\mathbf{u}(u_r, u_z)$  удобно представить в виде [15]

$$u_j = U_j(r) \exp[i(\zeta z - \omega t)], \quad j = r, z, \quad (2)$$

$$U_r(r) = \frac{1}{\zeta} Q_1(p_1 r) + \frac{\zeta}{p_2^2} Q_1(p_2 r),$$

$$U_z(r) = -i(Q_0(p_1 r) + Q_0(p_2 r)),$$

$$p_1^2 = \zeta^2 - \gamma_1^2, \quad p_2^2 = \zeta^2 - \gamma_2^2,$$

$$\gamma_1 = \frac{\omega R}{V_D}, \quad \gamma_2 = \frac{\omega R}{V_S}, \quad \gamma_1^2 = k\gamma_2^2,$$

$$k = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)}.$$

Здесь  $\zeta$  – волновое число;  $\omega$  – круговая частота;  $V_D, V_S$  – скорости волн расширения и сдвига;  $\nu$  – коэффициент Пуассона материала цилиндра;  $R$  – внешний радиус цилиндра. Эти выражения удовлетворяют уравнениям движения Ламе, если выбраны следующие радиальные функции:

$$\frac{dQ_0(pr)}{dr} = Q_1(pr),$$

$$Q_0(p_i r) = A_i L_0(p_i r) + B_i M_0(p_i r), \quad (3)$$

$$i = 1, 2,$$

где  $A_i, B_i$  – произвольные постоянные, а функции  $L_0(pr), M_0(pr)$  имеют вид

$$L_0(pr) = \begin{cases} I_0(pr), & p^2 > 0, \\ J_0(|p|r), & p^2 < 0, \end{cases}$$

$$M_0(pr) = \begin{cases} K_0(pr), & p^2 > 0, \\ Y_0(|p|r), & p^2 < 0. \end{cases}$$

Решение задачи представлено в безразмерном виде. Все линейные величины отнесены к внешнему радиусу цилиндра  $R$ . Безразмерное волновое число  $\zeta$  получаем, умножая его размерную величину на  $R$ . Выражения для функций  $Q_0(p_1r)$  и  $Q_0(p_2r)$  содержат четыре независимых произвольных постоянных  $A_i, B_i$  ( $i=1, 2$ ).

Полагаем, что внешняя ( $r=1$ ) и внутренняя ( $r=r_1$ ) поверхности полого цилиндра свободны от напряжений. Здесь введены обозначения  $r_1 = R_1/R$ ,  $R_1$  – внутренний радиус цилиндра. Относительные внутренний радиус цилиндра  $r_1$  и его толщина  $h/R$  связаны соотношением  $h/R = 1 - r_1$ . Из условий равенства нулю касательных напряжений на поверхностях получаем следующие соотношения между искомыми величинами:

$$Q_1(p_1) = -\frac{p_2^2 + \zeta^2}{2p_2^2} Q_1(p_2), \tag{4}$$

$$Q_1(p_1r_1) = -\frac{p_2^2 + \zeta^2}{2p_2^2} Q_1(p_2r_1).$$

Из условий для нормальных напряжений найдем систему двух однородных уравнений относительно неизвестных величин  $X$  и  $Y$ :

$$\begin{aligned} a_{11}X + a_{12}Y &= 0, \\ a_{21}X + a_{22}Y &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Согласно [15], эти новые неизвестные связаны с ранее введенными произвольными постоянными соотношениями

$$\begin{aligned} X &= \frac{\zeta}{p_2^2} Q_1(p_2), \\ Y &= \frac{\zeta}{p_2^2} Q_1(p_2r_1). \end{aligned} \tag{6}$$

Коэффициенты системы (5) имеют вид [15]

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{(p_2^2 + \zeta^2)^2}{4\zeta^2} \frac{\Delta_1(p_1)}{\Delta(p_1)} - p_2^2 \frac{\Delta_1(p_2)}{\Delta(p_2)} - \frac{\gamma_2^2}{2\zeta^2}, \\ a_{12} &= \frac{(p_2^2 + \zeta^2)^2}{4\zeta^2} \frac{\Delta_2(p_1)}{\Delta(p_1)} - p_2^2 \frac{\Delta_2(p_2)}{\Delta(p_2)}, \\ a_{21} &= \frac{(p_2^2 + \zeta^2)^2}{4\zeta^2} \frac{\Delta_3(p_1)}{\Delta(p_1)} - p_2^2 \frac{\Delta_3(p_2)}{\Delta(p_2)}, \\ a_{22} &= \frac{(p_2^2 + \zeta^2)^2}{4\zeta^2} \frac{\Delta_4(p_1)}{\Delta(p_1)} - p_2^2 \frac{\Delta_4(p_2)}{\Delta(p_2)} - \frac{1}{r_1} \frac{\gamma_2^2}{2\zeta^2}, \end{aligned} \tag{7}$$

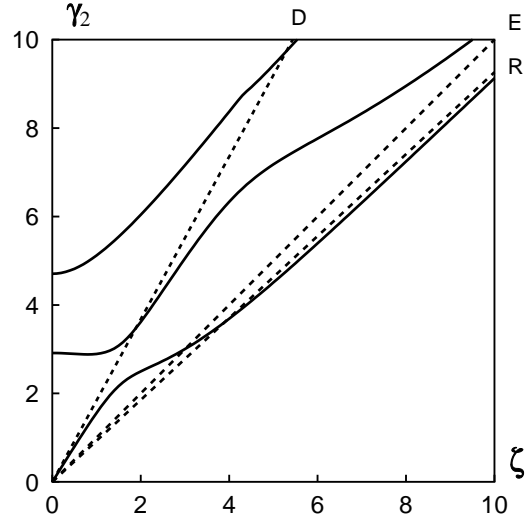


Рис. 1. Дисперсионные ветви распространяющихся волн в стальном цилиндре с  $r_1 = 0.3$

где

$$\begin{aligned} \Delta(p) &= M_1(p)L_1(pr_1) - M_1(pr_1)L_1(p), \\ \Delta_1(p) &= M_1(pr_1)L_0(p) - L_1(pr_1)M_0(p), \\ \Delta_2(p) &= M_0(p)L_1(p) - M_1(p)L_0(p), \\ \Delta_3(p) &= M_1(pr_1)L_0(pr_1) - L_1(pr_1)M_0(pr_1), \\ \Delta_4(p) &= L_1(p)M_0(pr_1) - M_1(p)L_0(pr_1). \end{aligned} \tag{8}$$

Приравнивая определитель системы (5) к нулю, получаем дисперсионное уравнение для нормальных волн в полом цилиндре:

$$\det a_{ij} = 0, \quad i, j = 1, 2. \tag{9}$$

Уравнение (9) связывает безразмерные частоту и волновое число при заданных значениях коэффициента Пуассона  $\nu$  и геометрического параметра  $r_1$ . Методика вычисления вещественных, мнимых и комплексных корней трансцендентного уравнения достаточно хорошо отработана [8, 9]. Для описания некоторых важных свойств бегущих волн приведем данные для трех низших распространяющихся мод (вещественные корни уравнения (9)). На рис. 1 они представлены для стального ( $\nu = 0.29$ ) полого цилиндра с  $r_1 = 0.3$ . Прямая  $OR$  соответствует корню уравнения Рэлея  $\gamma_2/\zeta = C_p/V_S = 0.9262$ ,  $OE$  ( $\gamma_2/\zeta = 1$ ) – корням уравнения  $p_2 = 0$ , а  $OD$  ( $\gamma_2/\zeta = 1/k$ ) –  $p_1 = 0$ . Ниже прямых  $OD$  и  $OE$  отрицательными являются величины  $p_1^2$  и  $p_2^2$  соответственно. Из графика видно, что уже при

$\zeta \geq 5.5$  первая дисперсионная кривая с графической точностью совпадает с прямой  $OR$ . Это указывает на близость фазовой скорости соответствующей нормальной волны к скорости волны Рэлея. Вторая дисперсионная кривая приближается к прямой  $OE$ , оставаясь в данном диапазоне частот выше нее (фазовая скорость второй нормальной волны остается больше скорости сдвиговых волн в упругой среде). Такое поведение второй дисперсионной ветви для сплошного цилиндра и упругого слоя послужило основанием для проведения соответствующего асимптотического анализа. В результате был сделан вывод о том, что все нормальные волны выше первой имеют в качестве предельного значения фазовой скорости скорость волн сдвига. Указанные качественные соображения о возможном характере волновых движений в полом цилиндре заставляют рассмотреть поведение второй волны в более широком диапазоне частот и волновых чисел.

Вычисление корней уравнения (9) при больших  $\zeta$  показывает, что уже при  $\zeta = 12$  вторая дисперсионная ветвь для полого цилиндра опускается ниже прямой  $OE$ . При дальнейшем увеличении волнового числа (частоты) эта ветвь приближается сверху к прямой  $OR$ . Таким образом, в полом цилиндре существуют, по крайней мере, две нормальные волны, фазовые скорости которых приближаются к скорости волны Рэлея. Более полная их характеристика должна включать данные о кинематике материальных точек цилиндра.

Проведенный анализ позволяет получить соответствующие асимптотические выражения для элементов определителя (9) при больших значениях волновых чисел и частот. Поскольку для двух первых волн фазовая скорость меньше скорости сдвиговых волн ( $C_p/V_S < 1$ ), то функции  $L_0(p_i r)$  и  $M_0(p_i r)$ ,  $i = 1, 2$  выражаются через модифицированные функции Бесселя. При  $\zeta \rightarrow \infty$  с учетом асимптотики модифицированных функций Бесселя большого аргумента коэффициенты дисперсионного уравнения (9) принимают вид

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\frac{(p_2^2 + \zeta^2)^2}{4\zeta^2} \frac{1}{p_1} + p_2 - \frac{\gamma_2^2}{2\zeta^2}, \\ a_{12} &= \sqrt{r_1} \left[ \frac{(p_2^2 + \zeta^2)^2}{4\zeta^2 \operatorname{sh} p_1(1-r_1)} - \frac{p_2}{\operatorname{sh} p_2(1-r_1)} \right], \\ a_{21} &= -\frac{a_{12}}{r_1}, \\ a_{22} &= \frac{(p_2^2 + \zeta^2)^2}{4\zeta^2} \frac{1}{p_1} - p_2 - \frac{1}{r_1} \frac{\gamma_2^2}{2\zeta^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Из полученных выражений следует, что коэффици-

циенты  $a_{12}$  и  $a_{21}$  для больших значений волновых чисел и частот малы по сравнению с  $a_{11}$  и  $a_{22}$ . Тогда дисперсионное уравнение в области частот и волновых чисел, в которой  $p_i^2 < 0$ ,  $i = 1, 2$ , при  $\zeta \rightarrow \infty$  можно приближенно представить в виде

$$a_{11}a_{22} = 0. \quad (11)$$

Формула (11) вырождается в два независимых алгебраических уравнения. После преобразования уравнение  $a_{11} = 0$  принимает вид

$$\begin{aligned} &\left(2 - \left(\frac{C}{V_S}\right)^2\right)^2 - \\ &- 4\sqrt{1 - \left(\frac{C}{V_S}\right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{C}{V_D}\right)^2} + \\ &+ \frac{2}{\zeta} \left(\frac{C}{V_S}\right)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{C}{V_D}\right)^2} = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Оно отличается от уравнения Рэлея наличием третьего слагаемого, обратно пропорционального волновому числу. Поскольку эта добавка положительна, фазовая скорость соответствующей волны будет несколько меньше скорости волны Рэлея.

Уравнение  $a_{22} = 0$  после преобразования принимает вид

$$\begin{aligned} &\left(2 - \left(\frac{C}{V_S}\right)^2\right)^2 - \\ &- 4\sqrt{1 - \left(\frac{C}{V_S}\right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{C}{V_D}\right)^2} - \\ &- \frac{2}{r_1 \zeta} \left(\frac{C}{V_S}\right)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{C}{V_D}\right)^2} = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь добавка к классическому уравнению Рэлея отрицательна и зависит от относительной толщины цилиндра. Фазовая скорость этой волны несколько больше скорости волны Рэлея. Очевидно также, что влияние добавки в дисперсионном уравнении сильнее выражено для толстостенных цилиндров.

Для построения кинематических характеристик нормальных волн необходимо определить произвольные постоянные, входящие в выражения компонент вектора смещений (2), через неизвестные  $X, Y$  системы (5). Из формул (4) находим константы  $A_2$  и  $B_2$ , входящие в выражение для  $Q_0(p_2 r)$ :

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{p_2^3}{\zeta} \frac{x K_1(p_2 r_1) - y K_1(p_2)}{\Delta(p_2)}, \\ B_2 &= \frac{p_2^3}{\zeta} \frac{x I_1(p_2 r_1) - y I_1(p_2)}{\Delta(p_2)}. \end{aligned} \quad (14)$$

Из соотношений (4) и (6) определяем постоянные  $A_1$  и  $B_1$ , входящие в выражение для  $Q_0(p_1r)$ :

$$A_1 = -\frac{p_1(p_2^2 + \zeta^2)}{2\zeta} \frac{x K_1(p_1r_1) - y K_1(p_1)}{\Delta(p_1)},$$

$$B_1 = -\frac{p_1(p_2^2 + \zeta^2)}{2\zeta} \frac{x I_1(p_1r_1) - y I_1(p_1)}{\Delta(p_1)}. \quad (15)$$

Подставляя полученные значения постоянных в выражения (2), (3), находим следующие выражения для амплитудных составляющих радиальных и осевых смещений:

$$U_r(r) = -\frac{p_1^2(p_2^2 + \zeta^2)}{2\zeta^2} \times$$

$$\times \left[ \frac{f_1(p_1)}{\Delta(p_1)} I_1(p_1r) - \frac{f_2(p_1)}{\Delta(p_1)} K_1(p_1r) \right] + \quad (16)$$

$$+ p_2^2 \left[ \frac{f_1(p_2)}{\Delta(p_2)} I_1(p_2r) - \frac{f_2(p_2)}{\Delta(p_2)} K_1(p_2r) \right],$$

$$U_z(r) = i \left\{ \frac{p_1(p_2^2 + \zeta^2)}{2\zeta} \times \right.$$

$$\times \left[ \frac{f_1(p_1)}{\Delta(p_1)} I_0(p_1r) + \frac{f_2(p_1)}{\Delta(p_1)} K_0(p_1r) \right] - \quad (17)$$

$$\left. - \frac{p_2^3}{\zeta} \left[ \frac{f_1(p_2)}{\Delta(p_2)} I_0(p_2r) + \frac{f_2(p_2)}{\Delta(p_2)} K_0(p_2r) \right] \right\},$$

$$f_1(p) = X K_1(pr_1) - Y K_1(p), \quad (18)$$

$$f_2(p) = X I_1(pr_1) - Y I_1(p).$$

Таким образом, компоненты вектора смещения выражены через две произвольные постоянные  $X$  и  $Y$ . В выражениях (18) необходимо перейти к одной постоянной, используя одно из уравнений системы (5). Это позволяет определить амплитудные составляющие компонент вектора смещения с точностью до выбранной постоянной.

В заключение раздела отметим, что проведенный асимптотический анализ дисперсионного уравнения дает основания для некоторого общего вывода, касающегося дисперсионных свойств нормальных волн. Использованные асимптотические представления основывались на предположении о том, что корни дисперсионного уравнения располагаются ниже прямой  $OE$  (см. рис. 1). При этом оказалось, что общее трансцендентное уравнение вырождается в алгебраическое и имеет только два вещественных корня. Таким образом, можно сделать вывод о том, что все нормальные волны более высокого порядка имеют в качестве предельного значения фазовой скорости скорость волн сдвига.

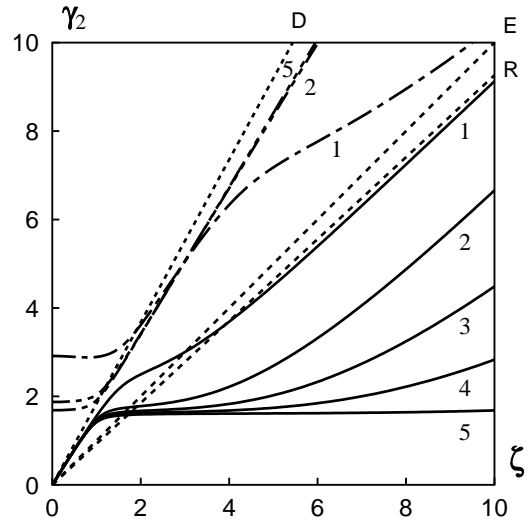


Рис. 2. Влияние толщинного параметра на дисперсионные свойства первых двух нормальных осесимметричных волн в полом цилиндре:  
сплошные – первая волна,  
штрих-пунктирные – вторая волна;  
1 –  $r_1 = 0.3$ , 2 –  $r_1 = 0.8$ , 3 –  $r_1 = 0.9$ ,  
4 –  $r_1 = 0.95$ , 5 –  $r_1 = 0.99$

## 2. АНАЛИЗ ЧИСЛОВЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

### 2.1. Дисперсионные характеристики первых двух нормальных волн упругого полого цилиндра

Наличие точного решения задачи, сформулированной на основе полной системы уравнений динамической теории упругости, позволяет исследовать дисперсионные характеристики нормальных волн в широкой области частот и волновых чисел. На рис. 1 приведены три первые дисперсионные кривые для толстостенного цилиндра. При этом интересно оценить влияние такого параметра как толщина.

На рис. 2 представлены первые две дисперсионные ветви осесимметричных волн для полого цилиндра из стали (коэффициент Пуассона  $\nu = 0.29$ ) при нескольких значениях относительного внутреннего радиуса цилиндра  $r_1$ , изменяющегося от 0.3 до 0.99. Сплошные кривые соответствуют первой дисперсионной кривой, а штрих-пунктирные – второй. При малых значениях волнового числа ( $\zeta < 1$ ) первые дисперсионные кривые для различных  $r_1$  практически совпадают. Фазовая скорость соответствующих им волн равна скорости

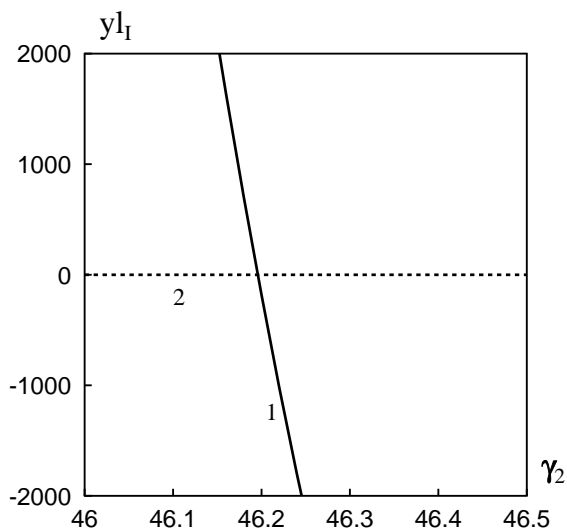


Рис. 3. Частотные зависимости коэффициентов алгебраической системы в окрестности первого корня дисперсионного уравнения

продольной волны в стержне

$$\frac{C_p}{V_S} = \sqrt{2(1 + \nu)} \approx 1.606. \quad (19)$$

При увеличении волнового числа ( $\zeta > 1$ ) фазовая скорость низшей распространяющейся волны существенно уменьшается с увеличением  $r_1$  (дисперсионная кривая отклоняется вправо от прямолинейного участка  $\gamma_2 = 1.606\zeta$ ). С уменьшением толщины это отклонение возрастает. Для цилиндрической оболочки с  $r_1 = 0.99$  при  $\zeta > 2$  низшая дисперсионная ветвь (сплошная кривая 5) становится практически горизонтальной в широком диапазоне значений волновых чисел. На этом участке фазовая скорость низшей волны оболочки уменьшается с уменьшением длины волны. Однако следует иметь в виду, что при дальнейшем увеличении волнового числа фазовая скорость низшей волны будет возрастать и, в конце концов, приближаться к скорости волны Рэлея. Это подтверждается данными табл. 1, а также теоретическими и экспериментальными результатами исследований [16, 17].

В табл. 1 приведены значения частот и фазовых скоростей  $C_p/V_S$ , определяемых из уравнения (9). Эти данные показывают, что с увеличением волнового числа фазовая скорость низшей волны для всех значений толщины стенки цилиндра приближается снизу к фазовой скорости волны Рэлея  $C_R/V_S = 0.9262$ . Для тонкостенных цилиндрических оболочек фазовая скорость низшей волны приближается к фазовой скорости рэлеевской волны при значительно больших значениях

волновых чисел, чем для толстых цилиндров. Это совершенно естественно, поскольку поверхностная волна может сформироваться лишь тогда, когда ее длина становится меньше толщины цилиндра.

Вторая дисперсионная кривая, имеющая ненулевую частоту запирания, соответствует волнам, фазовые скорости которых еще более медленно приближаются к скорости поверхностной волны. Чем меньше толщина оболочки, тем более выраженным является участок дисперсионной кривой, близкий к прямой  $OD$ . В соответствующем диапазоне частот и волновых чисел фазовая скорость волны близка к скорости продольных волн в материале цилиндра.

Частота запирания второй распространяющейся волны с увеличением  $r_1$  уменьшается. Для рассматриваемого примера при  $r_1 = 0.3$  частота запирания  $\gamma_2^* = 2.914$ , а при  $r_1 = 0.99 - 1.687$ . Помимо этого, увеличение  $r_1$  (уменьшение толщины цилиндра) вызывает уменьшение глубины завала второй дисперсионной кривой вблизи ее частоты запирания. При  $r_1 \geq 0.5$  эта ветвь имеет положительную кривизну [12]. Следовательно, с уменьшением толщины цилиндра исчезает обратная волна. В полном цилиндре с увеличением  $r_1$  частота запирания основной продольно-сдвиговой моды, которой соответствует вторая нормальная волна, увеличивается. Частота основной радиальной моды, которой соответствует третья волна, наоборот, уменьшается. Вследствие этого уже при  $r_1 \geq 0.125$  второй нормальной волне соответствует радиальная мода, а третьей – продольно-сдвиговая мода [12].

Представленные в табл. 2 данные для стального цилиндра с  $r_1 = 0.3$  показывают тенденцию изменения дисперсионных характеристик первых двух нормальных волн с увеличением волнового числа. Здесь для больших значений волновых чисел приведены значения частот  $\gamma_{2,i}$  и фазовых скоростей  $C_{pi}/V_S$ ,  $i = 1, 2$ , полученных из уравнения (9), а также фазовых скоростей  $C_{Ri}/V_S$ , полученных из приближенных уравнений (12) и (13). Видно, что приближенные уравнения достаточно точно определяют фазовые скорости при больших волновых числах.

## 2.2. Кинематические характеристики поверхностных волн полого цилиндра

С формальной точки зрения, процедура определения компонент вектора смещений и тензора напряжений для нормальных волн очень проста. Для определенного соотношения волнового числа и частоты, найденного из дисперсионного уравнения (9), с помощью уравнений (5) определя-

Табл. 1. Дисперсионные характеристики первой нормальной волны стального цилиндра

$r_1$	0.8				0.9			
$\zeta$	10	50	100	150	10	50	100	150
$\gamma_2$	6.6599	45.7576	92.4788	138.722	4.4881	42.9119	91.4973	138.590
$C_p/V_S$	0.6660	0.9152	0.9248	0.9251	0.4488	0.8582	0.9150	0.9239
$r_1$	0.95				0.99			
$\zeta$	10	50	100	150	80	100	130	150
$\gamma_2$	2.8315	35.7019	85.7795	134.905	28.1500	41.9770	65.7632	83.0790
$C_p/V_S$	0.2832	0.7141	0.8578	0.8994	0.3519	0.4198	0.5059	0.5539

Табл. 2. Дисперсионные характеристики первых двух нормальных волн стального цилиндра с  $r_1 = 0.3$ 

$\zeta$	10	20	40	60	80	100	150
$\gamma_{2,1}$	9.12573	18.43845	36.94051	55.45213	73.96651	92.48189	138.7721
$C_{p1}/V_S$	0.9126	0.9219	0.9235	0.9242	0.9246	0.9248	0.9251
$C_{R1}/V_S$	0.8895	0.9089	0.9177	0.9205	0.9218	0.9227	0.9237
$\gamma_{2,2}$	10.37049	19.06991	37.50783	55.99348	74.49243	92.99771	139.273
$C_{p2}/V_S$	1.0371	0.9535	0.9377	0.9332	0.9312	0.9300	0.9285
$C_{R2}/V_S$	0.9892	0.9668	0.9490	0.9419	0.9382	0.9358	0.9326

ется связь между  $X$  и  $Y$ . После этого все характеристики нормальной волны находятся с точностью до некоторого произвольного множителя. При фактической же реализации этой процедуры следует учесть особенности поведения коэффициентов системы (5) и соответствующие им физические особенности структуры волновых полей в окрестности корней дисперсионного уравнения. На первый взгляд, совершенно безразлично, из какого из двух соотношений определяется связь между величинами  $X$  и  $Y$ :

$$Y = y_{11}X = y_{12}X, \quad (20)$$

$$y_{11} = \frac{a_{11}}{a_{12}}, \quad y_{12} = \frac{a_{21}}{a_{22}}.$$

Однако с точки зрения практических вычислений эти соотношения неравноправны. Это связано с характером изменения коэффициентов пропорциональности как функций частоты в окрестности первого корня дисперсионного уравнения. Качественное представление об этих различиях дает рис. 3, на котором приведены графики зависимости  $y_{11}$  (кривая 1) и  $y_{12}$  (кривая 2) от частоты в окрестности первого корня дисперсионного уравнения (9). Корень дисперсионного уравнения определяется как точка пересечения этих кривых. Одна из кривых практически горизонтальна, в то

время как вторая характеризуется очень резкой изменчивостью в узкой окрестности корня. Очень малые изменения частоты (порядка долей процента) приводят к изменению множителя  $y_{11}$  на несколько порядков. В связи с этим для обеспечения приемлемой точности оценок при вычислении характеристик первой нормальной волны следует использовать второе уравнение системы (5).

В табл. 3 для случая  $nu = 0.29$ ,  $r_1 = 0.3$ ,  $\zeta = 50$  приведены значения  $y_{11}$  и  $y_{12}$  в окрестности первого корня дисперсионного уравнения, для которого  $a_{11} = 0$ . Видно, что при малом изменении частоты (от 46.19 до 46.2) коэффициент  $y_{11}$  изменяется на большую величину (от 252 до  $-182.5$ ). При этом  $y_{12}$  остается практически постоянным.

При подходе ко второму корню уравнения (9), в окрестности которого  $a_{22} = 0$ , необходимо находить  $X$  через  $Y$ , поскольку в окрестности второго корня отношение  $x_{11} = -a_{12}/a_{11}$  практически не меняется. Множитель же  $x_{12} = -a_{22}/a_{21}$  при малом изменении частоты изменяется на весьма большую величину. Значения  $x_{11}$  и  $x_{12}$  в окрестности второго корня уравнения (9) также приведены в табл. 3.

Таким образом, при исследовании кинематики первой нормальной волны необходимо использовать второе уравнение системы (5) для исключения одной из неизвестных ( $X$ ). При определе-

Табл. 3. Частотные зависимости коэффициентов алгебраической системы

$\gamma_2$	$y_{11}$	$y_{12}$	$\gamma_2$	$x_{11}$	$x_{12}$
46	11200	0.000075	46.74	-.00009507	49.688
46.19	252	0.000132	46.748	-.00009486	1.414
46.1957	2.66	0.000134	46.7482	-.00009486	.2222
46.195761	0.0218	0.000134	46.748237	-.00009486	.00184
46.19576150	0.000141	0.000134	46.74823732455	-.00009486	-.00009481
46.19576150016	0.000134	0.000134	46.749	-.00009484	-4.5371
46.2	-182.5	0.000136	46.75	-.00009481	-10.4698

нии кинематики второй нормальной волны для исключения одной из неизвестных ( $Y$ ) необходимо использовать первое уравнение системы (5). Указанные чисто вычислительные трудности оценок характеристик нормальных волн обусловлены физическими особенностями в их поведении. Дело в том, что в каждой из двух волн наблюдается ярко выраженная локализация волнового движения вблизи одной из поверхностей цилиндра. Как следствие, получаем специфическую плохо обусловленную систему уравнений (5).

Характер трансформации волнового движения с ростом волнового числа для первой нормальной волны в стальном цилиндре с  $r_1 = 0.3$  изображен на рис. 4. Здесь представлено изменение по радиусу цилиндра нормированных амплитуд радиального  $U_r^*(r) = U_r(r)/|U_{r\max}|$  и осевого  $U_z^*(r) = U_z(r)/|U_{z\max}|$  смещений для  $10 \leq \zeta \leq 100$ . Из графиков видно, что уже при  $\zeta = 10$  распределение смещений по толщине указывает на их локализацию вблизи внешней поверхности цилиндра. Однако здесь смещения вблизи внутренней поверхности цилиндра (особенно осевые) еще довольно велики. При  $\zeta = 20$  смещения на внутренней поверхности цилиндра становятся небольшими по сравнению со смещениями на внешней поверхности. При  $\zeta \geq 40$  распределение радиальных и осевых смещений по толщине цилиндра уже соответствует классической волне Рэлея на внешней поверхности полого цилиндра.

Для всех рассмотренных значений волновых чисел максимальные амплитуды радиальных смещений превосходят осевые. Обозначим отношение максимальных значений амплитуд радиальных смещений к осевым через  $u_{rz} = |U_{r\max}|/|U_{z\max}|$ . Для приведенных на рис. 4 случаев при  $\zeta = 20$   $u_{rz} = 1.69$ , при  $\zeta = 40$   $u_{rz} = 1.61$ , при  $\zeta = 100$   $u_{rz} = 1.52$ . С увеличением волнового числа значение  $u_{rz}$  уменьшается. При  $\nu = 0.29$  (стальной цилиндр) для классической волны Рэлея на поверх-

ности упругого полупространства отношение максимальных значений амплитуд поперечных смещений к продольным равно 1.513.

Для второй нормальной волны трансформация волнового движения с ростом волнового числа от 10 до 100 показана на рис. 5. На графиках вновь представлены распределения  $U_r^*(r)$  и  $U_z^*(r)$ . При  $\zeta = 10$  смещения максимальны на внутренней поверхности, хотя они не малы по всей толщине цилиндра. При  $\zeta = 20$  происходит заметная локализация смещений возле внутренней поверхности цилиндра, однако и на внешней поверхности имеют место незначительные смещения. При  $\zeta \geq 40$  характер распределения смещений по толщине цилиндра соответствует поверхностной волне Рэлея на внутренней поверхности. Аналогично первой нормальной волне, амплитуды радиальных смещений больше амплитуд осевых. Однако значения  $u_{rz}$  для второй нормальной волны несколько меньше, чем для первой нормальной волны. При  $\zeta = 20$   $u_{rz} = 1.40$ , при  $\zeta = 40$   $u_{rz} = 1.44$ , при  $\zeta = 100$   $u_{rz} = 1.47$ . В отличие от первой нормальной волны, здесь с повышением частоты значения  $u_{rz}$  увеличиваются.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследованы свойства поверхностных волн в упругом полом цилиндре. Анализ дисперсионного уравнения в области больших волновых чисел позволил выделить два уравнения для определения фазовой скорости поверхностной волны. Обнаружено, что в полом упругом цилиндре существуют две нормальные волны, предельным значением фазовой скорости для которых является скорость волны Рэлея. Показано, что поверхностные волны в полом цилиндре локализуются отдельно на внешней и внутренней поверхностях цилиндра. Получены асимптотические уравнения для определения дисперсионных свойств поверх-



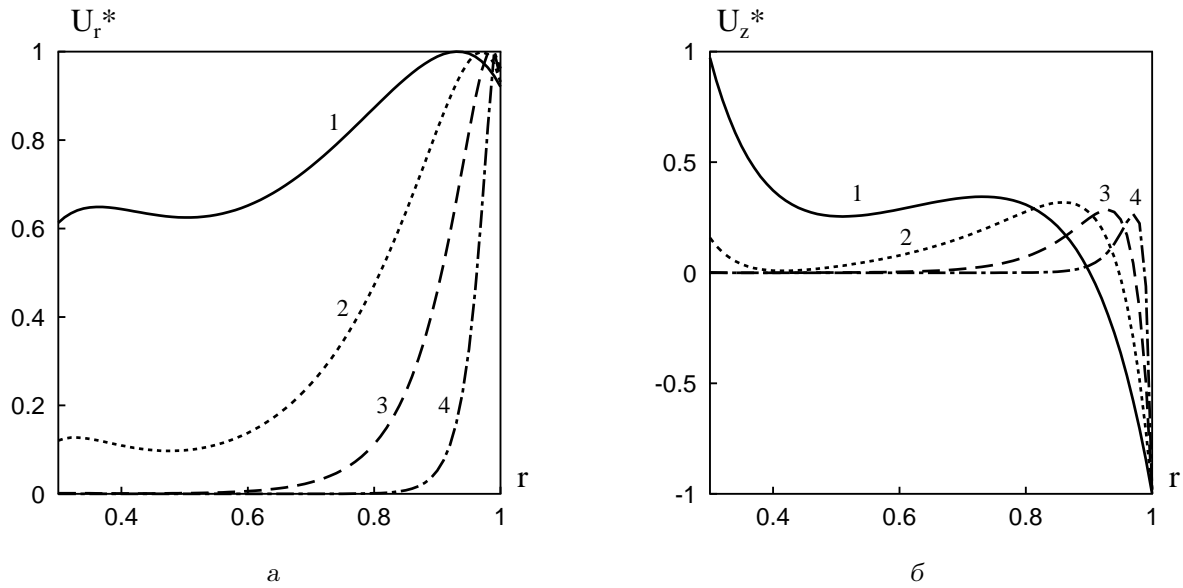


Рис. 4. Распределение по радиусу нормированных амплитуд смещений в первой нормальной волне:  
 1 –  $\zeta = 10$ , 2 –  $\zeta = 20$ , 3 –  $\zeta = 40$ , 4 –  $\zeta = 100$

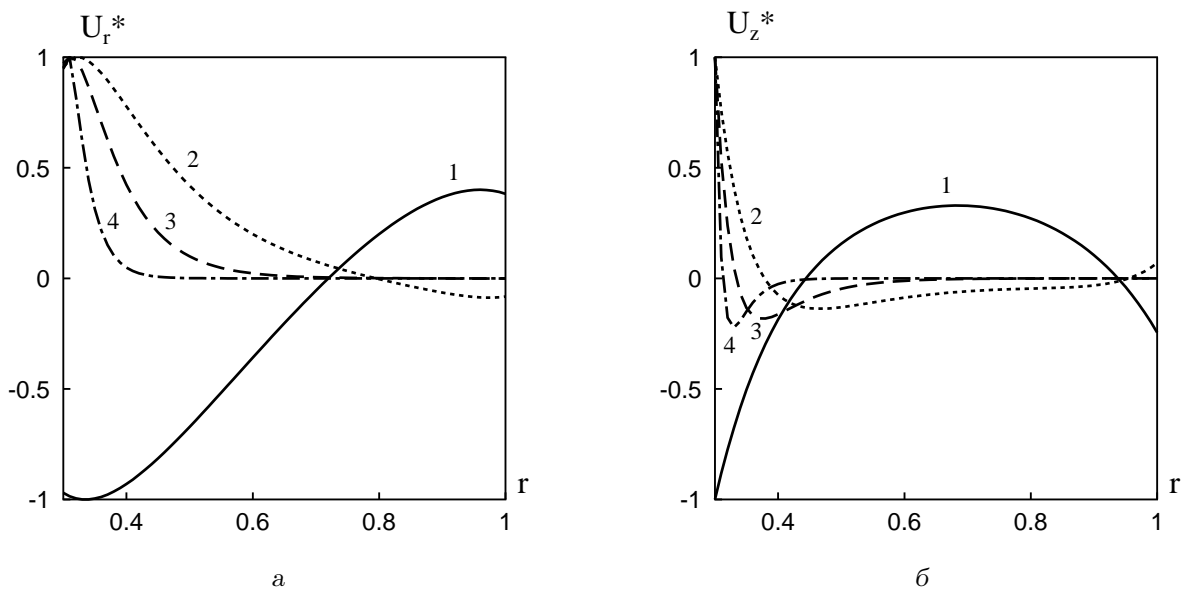


Рис. 5. Распределение по радиусу нормированных амплитуд смещений во второй нормальной волне:  
 1 –  $\zeta = 10$ , 2 –  $\zeta = 20$ , 3 –  $\zeta = 40$ , 4 –  $\zeta = 100$

ностных волн.

Разработана методика вычисления кинематических характеристик поверхностных волн в полуме́ре цилиндра. На конкретном примере показана трансформация волнового движения в диапазоне изменения волновых чисел от 10 до 100. С ростом волнового числа (уменьшением длины волны) пер-

вая нормальная волна формирует волновое возмущение, локализованное вблизи внешней поверхности цилиндра, а вторая – возмущение, локализованное на его внутренней поверхности. Соотношения между амплитудами смещений на внешней и внутренней поверхностях цилиндра изменяются при изменении волнового числа.

1. *Rayleigh J. W.* On waves propagated along the plane surface of an elastic solid // *Proc. Lond. Math. Soc.*– 1885/1886.– **17**, N 253.– P. 4–11.
2. *Фарнелл Дж.* Свойства упругих поверхностных волн // *Физ. акустика: Принципы и методы* (пер. с англ.)– 1973.– **6**.– С. 137–202.
3. *Викторов И. А.* Типы звуковых поверхностных волн в твердых телах // *Акуст. ж.*– 1979.– **25**, N 1.– С. 1–17.
4. *Oliver J.* A summary of observed seismic surface wave dispersion // *Bull. Seism. Soc. Amer.*– 1959.– **52**, N 1.– P. 81–90.
5. *Owen T. E.* Surface wave phenomena in ultrasonics // *Progr. Appl. Matter. Resch.*– 1964.– **6**.– P. 69–87.
6. *Überal H.* Surface waves in acoustics // *Phys. acoustics: Principles and methods.*– **10**.– 1973.– P. 1–60.
7. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах.– К.: Наук. думка, 1981.– 283 с.
8. *Гринченко В. Т., Комиссарова Г. Л.* Распространение волн в полом упругом цилиндре с жидкостью // *Прикл. мех.*– 1984.– **20**, N 8.– С. 25–29.
9. *Комиссарова Г. Л.* К решению задачи о распространении волн в цилиндре с жидкостью // *Прикл. мех.*– 1990.– **26**, N 8.– С. 25–29.
10. *Гринченко В. Т., Комиссарова Г. Л.* Свойства нормальных волн в упруго-жидкостных цилиндрических волноводах // *Акуст. вісн.*– 2000.– **3**, N 3.– С. 44–55.
11. *Комиссарова Г. Л.* Распространение нормальных волн в заполненных жидкостью тонкостенных цилиндрах // *Прикл. мех.*– 2002.– **38**, N 1.– С. 124–134.
12. *Гринченко В. Т., Комиссарова Г. Л.* Особенности динамического деформирования полого цилиндра // *Прикл. мех.*– 1986.– **22**, N 5.– С. 3–8.
13. *Rosenberg R. L., Thurston R. N.* Relationship between plate and surface modes of a tube // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1977.– **61**, N 6.– P. 1499–1502.
14. *Thurston R. N.* Elastic waves in rod and clad rods // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1978.– **64**, N 1.– P. 1–37.
15. *Гринченко В. Т.* Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров.– К.: Наук. думка, 1978.– 264 с.
16. *Vollman J., Dual J.* High-resolution analysis of the complex wave spectrum in a cylindrical shell containing a viscoelastic medium. Part I. Theory and numerical results // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1997.– **102**, N 2, Pt. 1.– P. 896–908.
17. *Vollmann J., Breu R., Dual J.* High-resolution analysis of the complex wave spectrum in a cylindrical shell containing a viscoelastic medium. Part II. Experimental results versus theory // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1997.– **102**, N 2, Pt. 1.– P. 909–920.