



УДК 681.3:519.711.3:517.958:621.313

В. Ф. Евдокимов *, чл.-кор. НАН Украины,
А. В. Жильцов *, канд. техн. наук, **И. П. Кондратенко** **, д-р техн. наук,
Е. И. Петрушенко *, канд. техн. наук, **А. П. Ращепкин** **, д-р техн. наук
*Ин-т проблем моделирования в энергетике им. Г. Е. Пухова НАН Украины,
(03164, Киев-164, ул. Генерала Наумова, 15,
тел.: (044) 4249160, E-mail: azhilt@mail.ru);
**Ин-т электродинамики НАН Украины
(03680, Киев-57, пр-т Победы 56,
тел.: (044) 4242414, E-mail: dep@ied.org.ua)

Двумерная интегро-дифференциальная модель распределения вихревых токов и электродинамических усилий в системе кристаллизатор — индукционный перемешиватель с массивным магнитопроводом

Предложена модель для расчета двумерного распределения вихревых токов и электродинамических усилий в системе кристаллизатор — индукционный перемешиватель с массивным магнитопроводом машины непрерывного литья заготовок. Моделирование выполнено в два этапа: на первом этапе решена система интегро-дифференциальных уравнений для вихревых токов в сечениях массивных проводников и токов намагниченности на границе магнитопровода, на втором — по рассчитанным токам найдено распределение электродинамических усилий в сечении заготовки.

Запропоновано модель для розрахунку двовимірного розподілу вихрових струмів та електродинамічних зусиль у системі кристаллизатор — індукційний перемішувач із масивним магнітопроводом машини безперервного лиття заготовок. Моделювання здійснено у два етапи: на першому етапі розв'язано систему інтегро-диференціальних рівнянь для вихрових струмів у перерізах масивних провідників і струмів намагніченості на межі магнітопроводу, на другому — за розрахованими струмами знайдено розподіл електродинамічних зусиль у перерізі заготовки.

К л ю ч е в ы е с л о в а: интегро-дифференциальная модель, вихревые токи, электродинамические усилия, индукционный перемешиватель, кристаллизатор, массивный магнитопровод.

В работах [1—6] рассмотрена и реализована двумерная интегро-дифференциальная модель для расчета вихревых токов (ВТ) и электродинамических усилий (ЭДУ) в системе кристаллизатор — индукционный перемешиватель (ИП) машины непрерывного литья заготовок (МНЛЗ) при условии, что магнитопровод выполнен из шихтованной стали. Однако в ряде случаев в указанных устройствах возникает необходимость в замене шихтованного

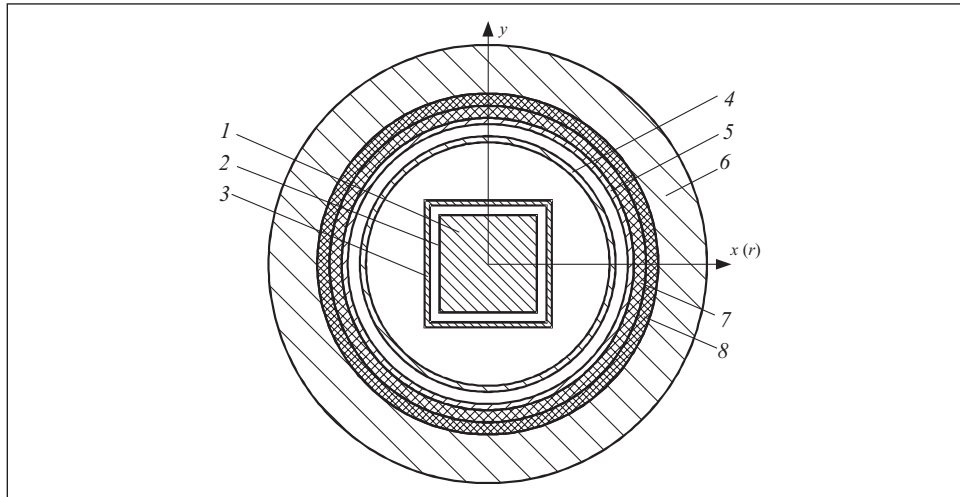


Рис. 1. Сечение модели системы кристаллизатор — ИП с массивным магнитопроводом: 1 — жидкая стальная заготовка; 2 — гильзовый медный кристаллизатор; 3 — обечайка из немагнитной стали; 4 — корпус кристаллизатора из немагнитной стали; 5 — арматура из немагнитной стали; 6 — массивный магнитопровод; 7 и 8 — трехфазные обмотки с двумя (вторая) и одной (первая обмотка) парами полюсов

магнитопровода массивным [7]. При этом требуется учитывать влияние вихревых токов, возникающих в последнем, на распределение ЭДУ в системе, в частности в жидкой заготовке.

При изучении протекающих в кристаллизаторе МНЛЗ процессов возникает необходимость решения связанных электродинамической и гидродинамической задач. Для их решения необходимо рассмотреть следующие подзадачи: 1) найти распределение ВТ и ЭДУ в жидкой заготовке на заданном в ней поле скоростей; 2) найти распределение скоростей в жидкой заготовке на заданном поле внешних сил, в том числе электродинамических.

Рассматриваемая двумерная интегро-дифференциальная модель распределения ВТ и ЭДУ в системе кристаллизатор — двухобмоточный ИП с массивным магнитопроводом на заданном поле скоростей в жидкой заготовке обобщает предложенную в работах [1—5] модель. Она позволяет исследовать влияние технологических и конструктивных параметров системы кристаллизатор — ИП на процесс перемешивания жидкого металла с более полным учетом реальной геометрии системы и электрофизических параметров материалов.

Исходные данные для разработки модели. На рис. 1 показано сечение конструкции системы кристаллизатор — ИП с массивным магни-

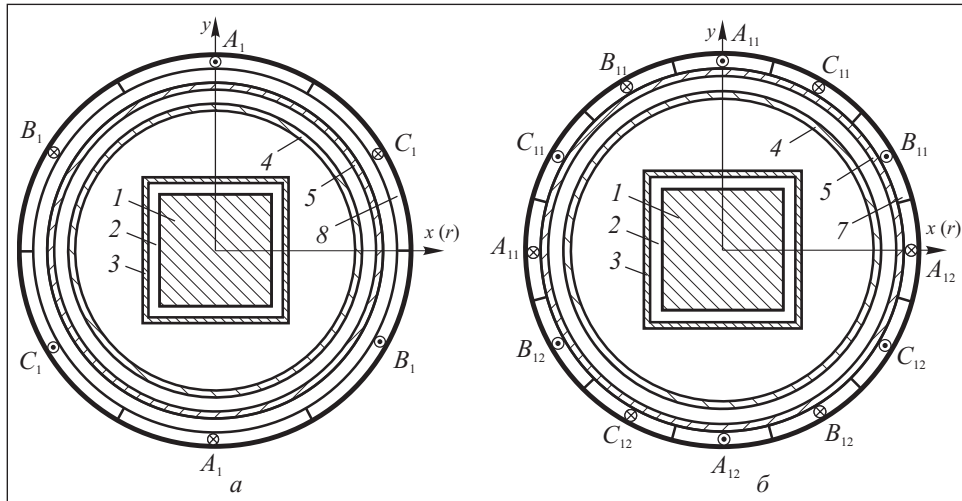


Рис. 2. Соединение катушек первой (а) и второй (б) обмоток

топроводом МНЛЗ. Первая обмотка выполнена с одной парой полюсов, вторая — с двумя. Обмотки размещены на внутренней поверхности гладкого массивного магнитопровода б. Сечения первой и второй обмоток плоскостью xOy декартовой системы координат xuz (ось z совмещена с осью системы, а оси x и y — с осями симметрии сечения) имеют форму колец (рис. 2). Каждая из обмоток имеет трехфазное исполнение.

В разработанной модели распределения ВТ и ЭДУ в системе токи в витках катушек обеих обмоток считаются заданными (рассматривается режим тока). Модель допускает любой закон изменения во времени этих токов. Однако наиболее просто реализуется и представляет большой практический интерес симметричная трехфазная система синусоидальных токов. В этом случае при принятых положительных направлениях токи в витках первой, второй и третьей фазы первой обмотки определяются соотношениями вида

$$i_A^{W_1}(t) = I_m^{W_1} \sin \omega t, \quad i_B^{W_1}(t) = I_m^{W_1} \sin \left(\omega t - \alpha_1 \frac{2\pi}{3} \right),$$

$$i_C^{W_1}(t) = I_m^{W_1} \sin \left(\omega t + \alpha_1 \frac{2\pi}{3} \right),$$

а второй обмотки — соотношениями

$$i_A^{W_2}(t) = I_m^{W_2} \sin \omega t, \quad i_B^{W_2}(t) = I_m^{W_2} \sin \left(\omega t - \alpha_2 \frac{2\pi}{3} \right),$$

$$i_C^{W_2}(t) = I_m^{W_2} \sin\left(\omega t + \alpha_2 \frac{2\pi}{3}\right),$$

где $\omega = 2\pi f$; f — частота токов в катушках обмотки; $I_m^{W_1}, I_m^{W_2}$ — амплитуда фазных токов в катушках первой и второй обмоток; $\alpha_1 \in \{-1; 1\}$; при $\alpha_1 = 1$ и расположении фазных катушек, показанном на рис. 2, а, направление вращения магнитного поля будем считать прямым; при $\alpha_1 = -1$ и расположении катушек, показанном на рис. 2, а, направление вращения магнитного поля будет обратным; α_2 — то же для второй обмотки.

Введем следующие обозначения: сечение плоскостью xOy заготовки — D_1 , гильзы — D_2 , обечайки — D_3 , корпуса — D_4 , арматуры — D_5 , обмоток — D_W ; D_6 — сечение массивного магнитопровода, внутренней границей которого является контур L_6^- , а внешней — контур L_6^+ ; $L_6 = L_6^- \cup L_6^+$; D^- — область не занятая проводниками; D — сечение всех массивных ферромагнитных проводников, $D = \bigcup_{m=1}^5 D_m$.

Граница между заготовкой и гильзой может быть как идеально проводящей, так и идеально изолированной. Если указанная граница идеально проводящая, то заготовку и гильзу следует рассматривать как одно массивное тело с неоднородной проводимостью. Если указанная граница — идеальный изолятор, то заготовку и гильзу следует рассматривать как два разных тела. Далее для определенности будем рассматривать только второй случай.

Удельные проводимости материалов заготовки γ_1 , гильзы γ_2 , обечайки γ_3 , корпуса γ_4 , арматуры γ_5 , магнитопровода γ_6 считаем заданными и постоянными. Абсолютная магнитная проницаемость материала магнитопровода $\mu = \text{const}$ задана. Частота f токов в обмотках ИП может изменяться в интервале $1 \leq f \leq 15$ Гц.

Постановка задачи моделирования магнитного поля в сечении системы. Конечная задача состоит в том, чтобы по заданной геометрии системы, электромагнитным характеристикам материалов, из которых изготовлены конструктивные элементы, электрическому соединению элементов, заданным токам в обмотках найти распределение вихревых токов и электродинамических усилий в сечении массивных проводников, в том числе и в жидкой стали. Для удобства вывода интегро-дифференциальных уравнений эту общую задачу разобьем на две подзадачи:

1) по заданному распределению токов в обмотках и вихревых токов в массивных проводниках найти распределение связанных токов намагниченности на границах сечения магнитопровода;

2) по заданному распределению токов в обмотках и токов намагниченности на границах сечения магнитопровода найти распределение вихревых токов в сечении массивных проводников.

В выбранной постановке задачи будем пренебрегать токами лобовых частей обмоток и считать, что векторы плотности тока в обмотках δ_W имеют вид

$$\delta_W(Q, t) = \mathbf{e}_z \delta_W(Q, t),$$

где $\delta_W(Q, t)$ — проекция вектора плотности тока в обмотках на ось z , которая не зависит от координаты z . Тогда

$$\delta(Q, t) = \mathbf{e}_z \delta(Q, t), \quad (1)$$

$$\mathbf{A}(Q, t) = \mathbf{e}_z A(Q, t), \quad (2)$$

$$\mathbf{B}(Q, t) = \mathbf{e}_x B_x(Q, t) + \mathbf{e}_y B_y(Q, t), \quad (3)$$

$$\mathbf{V}(Q, t) = \mathbf{e}_x V_x(Q, t) + \mathbf{e}_y V_y(Q, t), \quad (4)$$

где $A(Q, t)$ — проекция векторного потенциала на ось z , не зависящая от z ; $B_x(Q, t)$ и $B_y(Q, t)$ — проекции вектора магнитной индукции $\mathbf{B}(Q, t)$ на оси x и y , не зависящие от z ; $\delta(Q, t)$ — проекция вектора плотности тока в массивных проводниках на ось z , не зависящая от z ; $V_x(Q, t)$ и $V_y(Q, t)$ — проекции вектора скорости \mathbf{V} на оси x и y , не зависящие от z .

Переходя к решению первой подзадачи, сформулируем краевую задачу для расчета магнитного поля в плоскости xOy (см. рис. 1):

$$\begin{aligned} \Delta A &= -\mu_0 \delta_W(Q, t), \quad Q \in D_W; \\ \Delta A &= -\mu_0 \delta_m(Q, t), \quad Q \in D_m, \quad m=1, 2, \dots, 5; \\ \Delta A &= -\mu \delta_6(Q, t), \quad Q \in D_6; \\ \Delta A &= 0, \quad Q \in D^-, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\delta_m(M, t)$ — плотность тока в точке $Q \in D_m$, $m=1, 2, \dots, 6$, в момент времени t ; μ_0 — магнитная постоянная, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

Граничные условия для векторного потенциала на границе L_6 магнитопровода запишем так:

$$A^-(Q, t) = A^+(Q, t) \text{ на } L_6, \quad (6)$$

$$-\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A^-(Q, t)}{\partial n_Q} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial A^+(Q, t)}{\partial n_Q} \text{ на } L_6, \quad (7)$$

где $A^+(Q, t)$ и $A^-(Q, t)$ — предельные значения z -компоненты векторного потенциала при стремлении точки Q к границе L_6 соответственно с внешней

и внутренней стороны по отношению к ферромагнетику; $\partial A^-(Q, t)/\partial n_Q$ и $\partial A^+(Q, t)/\partial n_Q$ — то же для производной векторного потенциала по направлению внешней по отношению к границе ферромагнетика нормали \mathbf{n}_Q .

В рассматриваемой системе на бесконечности выполняется условие

$$A(\infty) = 0. \quad (8)$$

Поскольку токи прямого и обратного проводов в сечении каждой катушки обмотки D_W равны по величине и противоположны по направлению, полный ток в сечении D_W равен нулю:

$$I_W = \int_{D_W} \delta_W(M, t) ds_M = 0. \quad (9)$$

Поскольку массивные проводники не являются элементами какой-либо цепи, ток в сечении каждого из них также равен нулю:

$$I_m = \int_{D_m} \delta_m(M, t) ds_M = 0, \quad m = 1, 2, \dots, 6. \quad (10)$$

Таким образом, если считать распределение токов в системе заданным и удовлетворяющим условиям (9), (10), то для расчета магнитного поля в сечении, показанном на рис. 1, необходимо решить уравнения (5) с граничными условиями (6), (7) и условием на бесконечности (8).

Интегральная модель магнитного поля в сечении системы. Будем искать решение краевой задачи для уравнений (5) с граничными условиями (6), (7) и условием на бесконечности (8) в виде суммы

$$A(Q, t) = A_1(Q, t) + A_2(Q, t), \quad (11)$$

где $A_1(Q, t)$ — частное решение уравнений (5); $A_2(Q, t)$ — решение краевой задачи для соответствующей однородной системы уравнений.

Частное решение $A_1(Q, t)$ имеет вид

$$A_1(Q, t) = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{D_W} \delta_W(M, t) \ln \frac{1}{r_{QM}} ds_M + \frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{m=1}^5 \int_{D_m} \delta_m(M, t) \ln \frac{1}{r_{QM}} ds_M + \frac{\mu}{2\pi} \int_{D_6} \delta_6(M, t) \ln \frac{1}{r_{QM}} ds_M, \quad (12)$$

где r_{QM} — расстояние от точки Q до точки M .

Рассмотрим краевую задачу для $A_2(Q, t)$. Подставив $A(Q, t)$ в виде (11) в уравнения (5) и граничные условия (6), (7), получим

$$\Delta A_2 = 0, \quad Q \in D_W \cup D \cup D_6 \cup D^-, \quad (13)$$

$$A_2^- = A_2^+, \quad Q \in L_6, \quad (14)$$

$$-\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_2^-(Q, t)}{\partial n_Q} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_2^+(Q, t)}{\partial n_Q} + \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0 \mu} \frac{\partial A_1(Q, t)}{\partial n_Q}, \quad Q \in L_6. \quad (15)$$

Учитывая, что $A_1(\infty) = 0$, из (11) следует $A_2(\infty) = 0$.

Решение краевой задачи для уравнений (13) с граничными условиями (14), (15) будем искать в виде потенциала простого слоя, распределенного на границе сечения магнитопровода L_6 :

$$A_2(Q, t) = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{L_6} \sigma(M, t) \ln \frac{1}{r_{QM}} dl_M. \quad (16)$$

Здесь $\sigma(Q, t)$ — поверхностная плотность простого слоя токов намагниченности в точке Q в момент времени t .

При переходе через границу L_6 производная $\partial A_2(Q, t) / \partial n_Q$ претерпевает скачок:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_2^+(Q, t)}{\partial n_Q} &= \frac{\partial A_2(Q, t)}{\partial n_Q} - \frac{\mu_0}{2} \sigma(Q, t), \\ \frac{\partial A_2^-(Q, t)}{\partial n_Q} &= \frac{\partial A_2(Q, t)}{\partial n_Q} + \frac{\mu_0}{2} \sigma(Q, t). \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь прямое значение нормальной производной потенциала простого слоя токов имеет вид

$$\frac{\partial A_2(Q, t)}{\partial n_Q} = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{L_6} \sigma(M, t) \frac{(\mathbf{n}_Q, \mathbf{r}_{QM})}{r_{QM}^2} dl_M,$$

где $\partial A_2^+(Q, t) / \partial n_Q$ и $\partial A_2^-(Q, t) / \partial n_Q$ — предельные значения нормальной производной от потенциала простого слоя токов, когда точка Q стремится к границе L_6 соответственно со стороны магнитопровода и со стороны окружающей магнитопровод среды.

Подставив выражения (17) для нормальных производных в граничное условие (15), получим

$$\sigma(Q, t) - \frac{2\chi}{\mu_0} \frac{\partial A_2(Q, t)}{\partial n_Q} = \frac{2\chi}{\mu_0} \frac{\partial A_1(Q, t)}{\partial n_Q}, \quad Q \in L_6, \quad (18)$$

где $\chi = (\mu - \mu_0) / (\mu + \mu_0)$. Подставив в (18) выражения $\partial A_1(Q, t) / \partial n_Q$ и $\partial A_2(Q, t) / \partial n_Q$, получим

$$\sigma(Q, t) - \frac{\chi}{\pi} \int_{L_6} \sigma(M, t) \frac{(\mathbf{n}_Q, \mathbf{r}_{QM})}{r_{QM}^2} dl_M = \frac{\chi}{\pi} \sum_{m=1}^5 \int_{D_m} \delta_m(M, t) \frac{(\mathbf{n}_Q, \mathbf{r}_{QM})}{r_{QM}^2} ds_M +$$

$$+\frac{\chi}{\pi} \frac{\mu}{\mu_0} \int_{D_6} \delta_6(M, t) \frac{(\mathbf{n}_Q, \mathbf{r}_{QM})}{r_{QM}^2} ds_M + \frac{\chi}{\pi} \int_{D_W} \delta_W(M, t) \frac{(\mathbf{n}_Q, \mathbf{r}_{QM})}{r_{QM}^2} ds_M, Q \in L_6. \quad (19)$$

Систему уравнений (19) можно существенно упростить, если учесть, что границы магнитопровода L_6^+ и L_6^- являются окружностями [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\chi} \sigma^+(Q, t) - \int_{L_6^-} \sigma^-(M, t) \frac{(\mathbf{n}_Q, \mathbf{r}_{QM})}{r_{QM}^2} dl_M &= \sum_{m=1}^5 \int_{D_m} \delta_m(M, t) \frac{(\mathbf{n}_Q, \mathbf{r}_{QM})}{r_{QM}^2} ds_M + \\ &+ \frac{\mu}{\mu_0} \int_{D_6} \delta_6(M, t) \frac{(\mathbf{n}_Q, \mathbf{r}_{QM})}{r_{QM}^2} ds_M + \int_{D_W} \delta_W(M, t) \frac{(\mathbf{n}_Q, \mathbf{r}_{QM})}{r_{QM}^2} ds_M, Q \in L_6^+; \\ \frac{\pi}{\chi} \sigma^-(Q, t) - \int_{L_6^+} \sigma^+(M, t) \frac{(\mathbf{n}_Q, \mathbf{r}_{QM})}{r_{QM}^2} dl_M &= \sum_{m=1}^5 \int_{D_m} \delta_m(M, t) \frac{(\mathbf{n}_Q, \mathbf{r}_{QM})}{r_{QM}^2} ds_M + \\ &+ \frac{\mu}{\mu_0} \int_{D_6} \delta_6(M, t) \frac{(\mathbf{n}_Q, \mathbf{r}_{QM})}{r_{QM}^2} ds_M + \int_{D_W} \delta_W(M, t) \frac{(\mathbf{n}_Q, \mathbf{r}_{QM})}{r_{QM}^2} ds_M, Q \in L_6^-. \end{aligned} \quad (20)$$

Интегро-дифференциальная модель распределения вихревых токов в сечениях массивных проводников в системе при заданных токах намагниченности на границах сечения магнитопровода. В сечениях массивных проводников выполняется закон Ома, который запишем в виде

$$\begin{aligned} \delta_1(Q, t) &= \gamma_1 [E(Q, t) + |[\mathbf{V}(Q), \mathbf{B}(Q, t)]|], Q \in D_1; \\ \delta_m(Q, t) &= \gamma_m E(Q, t), Q \in D_m, m=2, 3, \dots, 6. \end{aligned} \quad (21)$$

В рассматриваемом случае \mathbf{V} и \mathbf{B} имеют вид (4) и (3). Поэтому

$$[\mathbf{V}, \mathbf{B}] = \mathbf{e}_z (V_x B_y - V_y B_x)$$

и следовательно,

$$|[\mathbf{V}(Q), \mathbf{B}(Q, t)]| = V_x(Q) B_y(Q, t) - V_y(Q) B_x(Q, t).$$

Из уравнения Максвелла $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ и соотношения $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ получаем

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi,$$

где φ — скалярный электрический потенциал. Отсюда следует, что в сечении массивных проводников с учетом (2)

$$E(Q, t) = -\frac{\partial A(Q, t)}{\partial t} + U(Q, t), \quad (22)$$

где

$$U(Q, t) = -\frac{\partial \varphi(Q, t)}{\partial z} = U(t), \quad Q \in D_m, \quad m=1, 2, \dots, 6;$$

$U(t)$ — напряжение, приходящееся на единицу длины соответствующего массивного проводника.

Подставляя в (22) выражение векторного потенциала A в виде суммы (11), где $A_1(Q, t)$ имеет вид (12), а $A_2(Q, t)$ — вид (16), и, учитывая равенства (21), получим систему интегро-дифференциальных (интегральных по пространственным переменным, дифференциальных по времени) уравнений, моделирующую распределение ВТ в сечении рассматриваемой магнитной системы:

$$\begin{aligned} & \frac{\delta_1(Q, t)}{\lambda \gamma_1} + \frac{\partial}{\partial t} \int_{D_1} \delta_1(M, t) \ln \frac{1}{r_{QM}} ds_M + \sum_{m=2}^5 \frac{\partial}{\partial t} \int_{D_m} \delta_m(M, t) \ln \frac{1}{r_{QM}} ds_M + \\ & + \frac{\mu}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \int_{D_6} \delta_6(M, t) \ln \frac{1}{r_{QM}} ds_M + \frac{\partial}{\partial t} \oint_{L_6} \sigma(M, t) \ln \frac{1}{r_{QM}} dl_M = \\ & = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{D_w} \delta_w(M, t) \ln \frac{1}{r_{QM}} ds_M + \frac{1}{\lambda} U_1(t) + \frac{1}{\lambda} |[\mathbf{V}(Q), \mathbf{B}(Q, t)]|, \quad Q \in D_1; \\ & \frac{\partial}{\partial t} \int_{D_1} \delta_1(M, t) \ln \frac{1}{r_{QM}} ds_M + \frac{\delta_q(Q, t)}{\lambda \gamma_q} + \sum_{m=2}^5 \frac{\partial}{\partial t} \int_{D_m} \delta_m(M, t) \ln \frac{1}{r_{QM}} ds_M + \\ & + \frac{\mu}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \int_{D_6} \delta_6(M, t) \ln \frac{1}{r_{QM}} ds_M + \frac{\partial}{\partial t} \oint_{L_6} \sigma(M, t) \ln \frac{1}{r_{QM}} dl_M = \\ & = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{D_w} \delta_w(M, t) \ln \frac{1}{r_{QM}} ds_M + \frac{1}{\lambda} U_q(t), \quad Q \in D_q, \quad q=2, 3, \dots, 5; \quad (23) \\ & \frac{\partial}{\partial t} \int_{D_1} \delta_1(M, t) \ln \frac{1}{r_{QM}} ds_M + \sum_{m=2}^5 \frac{\partial}{\partial t} \int_{D_m} \delta_m(M, t) \ln \frac{1}{r_{QM}} ds_M + \\ & + \frac{\delta_6(Q, t)}{\lambda \gamma_6} + \frac{\mu}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \int_{D_6} \delta_6(M, t) \ln \frac{1}{r_{QM}} ds_M + \frac{\partial}{\partial t} \oint_{L_6} \sigma(M, t) \ln \frac{1}{r_{QM}} dl_M = \\ & = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{D_w} \delta_w(M, t) \ln \frac{1}{r_{QM}} ds_M + \frac{1}{\lambda} U_6(t), \quad Q \in D_6, \end{aligned}$$

где $\lambda = \mu_0 / (2\pi)$; $U_q(t)$, $q = 1, 2, \dots, 6$, — напряжение, приходящееся на единицу длины соответствующего массивного проводника, как функция времени. Система уравнений (23) записана для случая, когда гильза и заготовка изолированы одна от другой.

Полная интегро-дифференциальная модель распределения вихревых токов в сечениях массивных проводников в системе. Интегральные уравнения (20) получены в предположении, что распределение вихревых токов в сечении массивных проводников известно. Интегро-дифференциальные уравнения (23) получены при заданных токах намагниченности на границах сечения магнитопровода L_6 . Объединив эти уравнения в одну систему, получим полную двумерную интегро-дифференциальную модель распределения вихревых токов в сечениях массивных проводников в системе с жидкими проводниками. Для краткости запишем ее в операторной форме:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\delta_1(Q, t)}{\lambda\gamma_1} + \frac{\partial}{\partial t} T_{D_1 D_1} \delta_1 + \sum_{m=2}^5 \frac{\partial}{\partial t} T_{D_1 D_m} \delta_m + \frac{\mu}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial t} T_{D_1 D_6} \delta_6 + \frac{\partial}{\partial t} T_{D_1 L_6} \sigma = \\
 & = -\frac{\partial}{\partial t} T_{D_1 D_W} \delta_W + \frac{1}{\lambda} U_1(t) + \frac{1}{\lambda} |[\mathbf{V}(Q), \mathbf{B}(Q, t)]|, Q \in D_1; \\
 & \frac{\partial}{\partial t} T_{D_q D_1} \delta_1 + \frac{\delta_q(Q, t)}{\lambda\gamma_q} + \sum_{m=2}^5 \frac{\partial}{\partial t} T_{D_q D_m} \delta_m + \frac{\mu}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial t} T_{D_q D_6} \delta_6 + \frac{\partial}{\partial t} T_{D_q L_6} \sigma = \\
 & = -\frac{\partial}{\partial t} T_{D_q D_W} \delta_W + \frac{1}{\lambda} U_q(t), Q \in D_q, q = 2, 3, \dots, 5; \\
 & \frac{\partial}{\partial t} T_{D_6 D_1} \delta_1 + \sum_{m=2}^5 \frac{\partial}{\partial t} T_{D_6 D_q} \delta_q + \frac{\delta_6(Q, t)}{\lambda\gamma_6} + \frac{\mu}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial t} T_{D_6 D_6} \delta_6 + \frac{\partial}{\partial t} T_{D_6 L_6} \sigma = \\
 & = -\frac{\partial}{\partial t} T_{D_6 D_W} \delta_W + \frac{1}{\lambda} U_6(t), Q \in D_6; \\
 & -P_{L_6^- D_1} \delta_1 - \sum_{m=2}^5 P_{L_6^- D_m} \delta_m - \frac{\mu}{\mu_0} P_{L_6^- D_6} \delta_6 + \frac{\pi}{\chi} \sigma^-(Q, t) - P_{L_6^- L_6^+} \sigma^+ = P_{L_6^- D_W} \delta_W, \\
 & \quad Q \in L_6^-, \\
 & -P_{L_6^+ D_1} \delta_1 - \sum_{m=2}^5 P_{L_6^+ D_m} \delta_m - \frac{\mu}{\mu_0} P_{L_6^+ D_6} \delta_6 + \frac{\pi}{\chi} \sigma^+(Q, t) - P_{L_6^+ L_6^-} \sigma^- = P_{L_6^+ D_W} \delta_W, \\
 & \quad Q \in L_6^+.
 \end{aligned} \tag{24}$$

где структура интегральных операторов имеет вид

$$\begin{aligned}
 T_{D_q D_m} \delta_m &= \int_{D_m} \delta_m(M, t) \ln \frac{1}{r_{QM}} ds_M, \quad Q \in D_q, \quad q, m=1, 2, \dots, 6; \\
 T_{D_q L_6} \sigma &= \int_{L_6} \sigma(M, t) \ln \frac{1}{r_{QM}} dl_M, \quad Q \in D_q, \quad q=1, 2, \dots, 6; \\
 P_{L_6^\pm D_m} \delta_m &= \int_{D_m} \delta_m(M, t) \frac{\cos(\mathbf{n}_Q, \mathbf{r}_{QM})}{r_{QM}} ds_M, \quad Q \in L_6^\pm, \quad m=1, 2, \dots, 6; \\
 P_{L_6^\mp L_6^\pm} \sigma^\pm &= \int_{L_6^\mp} \sigma^\pm(M, t) \frac{\cos(\mathbf{n}_Q, \mathbf{r}_{QM})}{r_{QM}} dl_M, \quad Q \in L_6^\mp.
 \end{aligned}$$

Система (24) записана для случая, когда гильза и заготовка изолированы одна от другой. Поскольку входящие в них напряжения на проводниках не известны, к ним необходимо добавить условия (10).

Расчет электродинамических усилий. Мгновенная объемная плотность ЭДУ в сечении заготовки с плотностью токов $\delta_1(Q, t)$, находящейся в магнитном поле $\mathbf{B}(Q, t)$, определяется так:

$$\mathbf{f}(Q, t) = [\delta_1(Q, t), \mathbf{B}(Q, t)],$$

где магнитная индукция определяется выражением

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}(Q, t) &= \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{D_W} \delta_W(M, t) \frac{[\mathbf{r}_{QM}, \mathbf{e}_z]}{r_{QM}^2} ds_M + \frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{m=1}^5 \int_{D_m} \delta_m(M, t) \frac{[\mathbf{r}_{QM}, \mathbf{e}_z]}{r_{QM}^2} ds_M + \\
 &+ \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{D_6} \delta_6(M, t) \frac{[\mathbf{r}_{QM}, \mathbf{e}_z]}{r_{QM}^2} ds_M + \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{L_6} \sigma(M, t) \frac{[\mathbf{r}_{QM}, \mathbf{e}_z]}{r_{QM}^2} dl_M.
 \end{aligned}$$

Учитывая (1), (3), приходим к выражению для вектора $\mathbf{f}(Q, t)$ следующего вида

$$\mathbf{f}(Q, t) = -\mathbf{e}_x \delta_1(Q, t), B_y(Q, t) + \mathbf{e}_y \delta_1(Q, t), B_x(Q, t).$$

На основании изложенного можно сделать вывод о том, что предложенная двумерная интегро-дифференциальная модель распределения вихревых токов и электродинамических усилий в системе кристаллизатор — ИП с массивным магнитопроводом МНЛЗ, позволяет моделировать магнитное поле только в сечении заготовки. Рассмотренный подход исключает избыточные вычисления, необходимые при использовании конечно-разностных и конечно-элементных методов.

The model of two-dimensional distribution of eddy currents and electrodynamic forces is developed for the system of crystallizer — two-winding induction mixer with large magnetic circuit. The simulation is made by two stages: at the first stage, the integral differential equations are solved relative to eddy currents defining a magnetic field in sections of large conductors and magnetization currents on the boundaries of magnetic circuit section. At the second stage the magnetic field and electrodynamic forces in liquid steel are calculated by the current distribution obtained.

1. *Найдек В. Л., Дубоделов В. И., Евдокимов В. Ф. и др.* Двумерная интегро-дифференциальная модель распределения вихревых токов и электродинамических усилий в системе кристаллизатор — индукционный перемешиватель машины непрерывного литья заготовок // *Электрон. моделирование*. — 2004. — **26**, № 1. — С. 125—144.
2. *Дубоделов В. И., Евдокимов В. Ф., Кондратенко И. П. и др.* Блочный алгоритм реализации двумерной интегральной модели распределения синусоидальных вихревых токов и электродинамических усилий в кристаллизаторе с индукционным перемешивателем // Там же. — 2005. — **27**, № 4. — С. 57—74.
3. *Евдокимов В. Ф., Петрушенко Е. И.* Интегральные уравнения для симметричных составляющих синусоидальных вихревых токов в сечении системы кристаллизатор—индукционный перемешиватель // Там же. — 2005. — **27**, № 1. — С. 73—96.
4. *Евдокимов В. Ф., Жильцов А. В., Петрушенко Е. И.* Двумерная интегральная модель распределения синусоидальных токов и электродинамических усилий в системе кристаллизатор — индукционный перемешиватель // Там же. — 2006. — **28**, № 2. — С. 3—16.
5. *Евдокимов В. Ф., Жильцов А. В., Петрушенко Е. И.* Блочный алгоритм компьютерной реализации двумерной интегральной модели распределения синусоидальных вихревых токов и электродинамических усилий в системе кристаллизатор — индукционный перемешиватель машины непрерывного литья блюмов и слябов // *Зб. наукових праць ІПМЕ ім. Г. Є. Пухова НАН України: Моделювання та інформаційні технології*. — 2006. — Вып.36. — С. 30—39.
6. *Евдокимов В. Ф., Жильцов А. В., Петрушенко Е. И.* Двумерная интегральная электромагнитогидродинамическая модель движения жидкой стали в системе кристаллизатор — индукционный перемешиватель // *Электрон. моделирование*. — 2006. — **28**, № 6. — С. 105—114.
7. *Шаханов С. И., Шифрин И. Н., Грачев В. Г. и др.* Влияние электромагнитного перешивания на качество непрерывного литья // *Черная металлургия*. — 2001. — № 10. — С. 26—30.

Поступила 09.01.07

ЕВДОКИМОВ Виктор Федорович, чл.-кор. НАН Украины, директор Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г. Е. Пухова НАН Украины. В 1963 г. окончил Харьковский политехнический ин-т. Область научных исследований — методы и устройства для математического моделирования, математическое и компьютерное моделирование энергетических систем.

ЖИЛЬЦОВ Андрей Владимирович, канд. техн. наук, докторант Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г. Е. Пухова НАН Украины. В 1997 г. окончил Симферопольский государственный университет им. М. В. Фрунзе (Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского). Область научных исследований — теоретические основы электротехники, моделирование электромагнитных полей.

КОНДРАТЕНКО Игорь Петрович, д-р техн. наук, ст. науч. сотр., зав. отделом Ин-та электродинамики НАН Украины. В 1979 г. окончил Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований — теоретические основы электротехники.

ПЕТРУШЕНКО Евгений Иванович, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., зав. отделом Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г. Е. Пухова НАН Украины. В 1963 г. окончил Ростовский государственный университет. Область научных исследований — моделирование электромагнитных полей.

РАЩЕПКИН Анатолий Павлович, д-р техн. наук, ст. науч. сотр. Ин-та электродинамики НАН Украины. В 1959 г. окончил Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований — электрические машины и аппараты.