УДК.531.36

Б. Атажанов, д-р физ.-мат. наук
Национальный университет Узбекистана
(Узбекистан, 100095, Ташкент, ВУЗ городок, ул. Университетская, 1,
тел.: (8-371) 396-49-30; E-mail: atajanov_b@rambler.ru)

Об устойчивости и стабилизации стационарного движения схвата манипулятора

(Статью представил чл.-кор. НАН Украины А.А. Мартынюк)

Рассмотрена задача устойчивости и стабилизации движения манипулятора до неасимптотической устойчивости по всем переменным многозвенного манипулятора.

Розглянуто задачу стійкості та стабілізації руху маніпулятора до неасимптотичної стійкості по всім змінним багатоланкового маніпулятора.

Ключевые слова: манипулятор, избыточная координата, стационарное движение, устойчивость и стабилизация движения.

Создание математической модели манипулятора, анализ и синтез динамических свойств его систем управления — сложные задачи. Для описания моделирования динамики таких систем в настоящее время интенсивно разрабатываются различные методы. Одним из таких методов является метод избыточных координат [1].

Основная идея этого метода состоит в исключении зависимых вариаций, что является линейной задачей в отличие от нелинейной задачи исключения лишних координат при введении независимых обобщенных координат. При этом отпадает необходимость использовать громоздкие выражения для зависимых координат системы, так как нет необходимости отыскивать аналитические выражения для зависимых координат через обобщенные. Этот метод может быть использован для эффективного решения задач динамики многозвенного манипулятора, в которых уравнения геометрических связей неразрешимы в явном аналитическом виде относительно зависимых координат.

Методом, предложенным в [2], решена задача об устойчивости и стабилизации стационарных движений схвата манипулятора с двумя вращательными и одной поступательной кинематическими парами [3]. При этом схват осуществляет движение по параболоиду вращения.

Кинетическая и потенциальная энергии манипулятора имеют вид [3, 4]

$$T_0 = \frac{1}{2} I_1(\varphi)\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} I_2(\varphi)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2 (\dot{\varphi}_1^2 \sin^2\varphi + \dot{\varphi}^2) +$$

$$+ \frac{1}{2} m_3 (s^2 (\dot{\varphi}_1^2 \sin^2\varphi + \dot{\varphi}^2 s^2 + \dot{s}^2),$$

$$\Pi = m_3 g s \cos\varphi.$$

Здесь

$$I_1(\varphi) = I_{z1} + (I_{z2} + I_{z3})\cos^2\varphi + (I_{y2} + I_{y3})\sin^2\varphi,$$

$$I_2 = I_{x2} + I_{x3},$$

где $I_{z1}, I_{z2}, I_{z3}, I_{y2}, I_{y3}$ — моменты инерции относительно осей z, y систем, связанных со звеньями 1, 2, 3 в центрах масс; φ, φ_1, s — координаты системы.

Уравнения для параболоида вращения

$$\frac{x^2}{q^2} + \frac{y^2}{q^2} = 2z$$

выразим в координатах системы-манипулятора:

$$x = s\sin\varphi_1 \sin\varphi, \; y = s\cos\varphi_1 \sin\varphi, \; z = h + s\cos\varphi,$$

где h — конструктивная постоянная величина. Тогда уравнение геометрической связи

$$s^2 \sin^2\varphi - 2q^2 (h + s\cos\varphi) = 0,$$

в дифференциальном виде разрешенной относительно $\dot{s}$, имеет вид

$$\dot{s} = \frac{s^2\cos\varphi + q^2 s}{q^2\cos\varphi + s\sin^2\varphi} - \sin\varphi\,\dot{\varphi}.$$

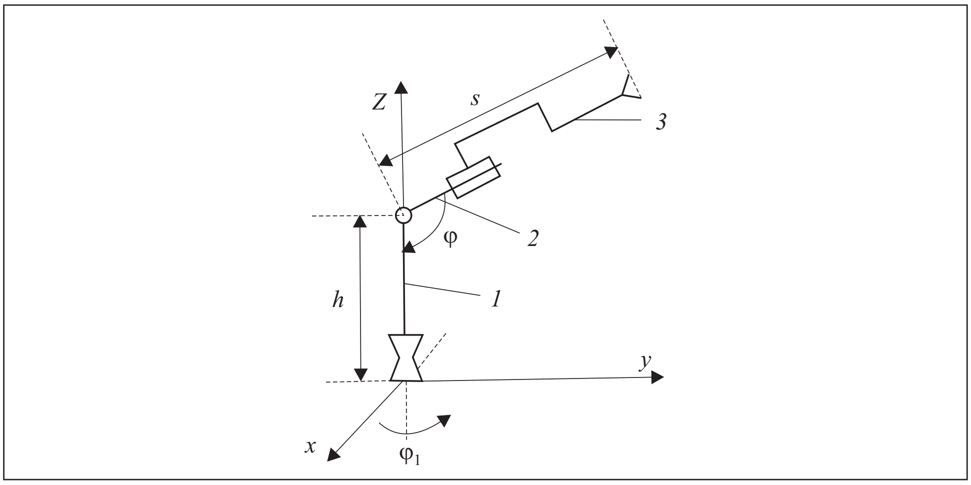
Координата φ_1 — циклическая в смысле определений [1, 5]. Кинетическая энергия системы с учетом уравнения связи имеет вид

$$T^* = \frac{1}{2} A_1(\varphi, s)\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} A_2(\varphi, s)\dot{\varphi}^2.$$

Здесь

$$A_1(\varphi, s) = I_1(\varphi) + m_2 l_2^2 \sin^2\varphi + m_3 s^2 \sin^2\varphi,$$

$$A_2(\varphi, s) = I_2(\varphi) + m_2 l^2 + m_3 s^2 + m_3 \left(\frac{s^2\cos\varphi + q^2 s}{s\sin^2\varphi - q^2\cos\varphi}\right)^2 \sin^2\varphi.$$



Введя импульс по циклической координате φ_1,

$$p = \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\varphi}_1} = A_1 \dot{\varphi}_1 \Rightarrow \dot{\varphi}_1 = A_1^{-1} p,$$

составим функцию Рауса:

$$R = T^* - p\dot{\varphi}_1 = \frac{1}{2} A_2 \dot{\varphi}_2^2 - \frac{p^2}{2A_1} - \Pi .$$

Пусть на систему действует диссипативная сила $Q_\varphi = D\dot{\varphi}$ сила вязкого трения в подшипнике вокруг оси вращения механизма *2* (см. рисунок). Составим уравнения движения манипулятора согласно [1] в переменных Рауса [5]:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial R}{\partial \varphi} - B_{13}\frac{\partial R}{\partial s} = Q_\varphi ,$$

$$\dot{p} = 0, \ \dot{s} = B_{13}\dot{\varphi},$$

где

$$B_{13} = \left(\frac{s^2 \cos\varphi + q^2 s}{q^2 \cos\varphi - s \sin^2 \varphi} \right) \sin\varphi .$$

Система уравнений допускает стационарное движение, в частности

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \ s = \pm\sqrt{2hq}, \ p = \pm\sqrt{g}\frac{A_{10}}{q} = \frac{I_{z1} + I_{y2} + I_{y3} + m_2 l_2^2 + m_3 s^2}{q},$$

которое определяется из уравнений

$$\frac{p^2}{2A_1^2}\frac{\partial A_1}{\partial \varphi}+\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}+B_{13}\left[\frac{p^2}{2A_1^2}\frac{\partial A_1}{\partial s}+\frac{\partial \Pi}{\partial s}\right]=0,$$

$$s^2\sin^2\varphi-2q^2(h+s\cos\varphi)=0.$$

Введя выражения для возмущений

$$\varphi=x+\frac{\pi}{2},\ \ s=s_0+\eta,\ \ p=p_0+y,$$

где

$$s_0=\sqrt{2h}q,\ \ p=\sqrt{g}\frac{A_{10}}{q},$$

составим квазилинейные уравнения возмущенного движения:

$$A_{20}\ddot{x}+D\dot{x}+Hy+Mx+K\eta=\Phi_1(x,\dot{x},y,\eta),$$

$$\dot{y}=\Phi_2(x,\dot{x},y,\eta),$$

$$\dot{\eta}=B_{130}\dot{x}+\Phi_3(x,\dot{x},y,\eta).$$

Здесь Φ_1, Φ_2, Φ_3 — нелинейные члены, $\Phi_2(0, 0, y, \eta)=\Phi_3(0, 0, y, \eta)\equiv 0$; $A_{20}=I_2+m_2 l_2+2m_3 q^2 h+m_3 q^4$;

$$H=[2m_3\sqrt{2h}q^3-I_{z1}]\frac{\sqrt{g}}{qA_{10}};\ \ K=m_3 g\left(1{,}5-\frac{8m_3}{A_{10}}hq^2\right);$$

$$M=m_3 g\left[2h-q^2-\frac{2h\sqrt{2h}}{q}\right]-\tilde{I}\frac{g}{q^2};\ \ \tilde{I}=I_{z2}+I_{z3}-I_{y2}-I_{y3}-m_2 l_2^2.$$

Характеристическое уравнение первого приближения

$$\begin{vmatrix} A_{20}\lambda^2+D\lambda+M & 0 & K \\ 0 & \lambda & 0 \\ -B\lambda & 0 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^2(A_2\lambda^2+D\lambda+M+KB)=0$$

имеет два нулевых корня. Условия асимптотической устойчивости по отдельным переменным имеют вид $D>0$, $M+KB>0$. Тогда все корни характеристического уравнения, кроме двух нулевых, будут иметь отрицательные действительные части.

Итак, выполнены все условия теоремы Ляпунова — Малкина об устойчивости в особенном случае двух нулевых корней [4]. В этом случае стационарное движение устойчиво по переменным s, p и асимптотически устойчиво по отношению к переменным φ, $\dot{\varphi}$. Если хотя бы одно из неравенств имеет противоположный знак, то стационарное движение схвата манипулятора будет неустойчиво (согласно теореме Ляпунова о неустойчивости по первому приближению). Если отсутствует диссипативная сила, то устойчивость стационарного движения возможна лишь в критическом случае по Ляпунову — для двух нулевых и одной пары чисто мнимых корней [4]. Тогда неравенство $M+KB>0$ является необходимым условием устойчивости стационарного движение манипулятора.

Теперь рассмотрим в постановке [3] задачу стабилизации стационарных движений манипулятора с позиций теории управления, т. е. с приложением управляющих сил u по циклическим импульсам. Уравнения первого приближения имеют вид

$$\dot{\eta}=B\dot{x},$$

$$A\ddot{x}+Mx+Hy+K\eta=0,$$

$$\dot{y}=u,$$

Для управляемой подсистемы, приведенной к нормальной форме

$$\dot{x}=x_1,$$

$$\dot{x}_1=M_1x+H_1y,$$

$$\dot{y}=u,$$

получим достаточное условие стабилизируемости

$$rankW=rank\,(Q,PQ,P^2Q)\neq H_1^2\neq 0,$$

где $M_1=A^{-1}(M+KB)$; $H_1=A^{-1}H$;

$$P=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ M_1 & 0 & H_1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix};\; Q=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix};\; PQ=\begin{pmatrix}0\\H_1\\0\end{pmatrix};\; P^2Q=\begin{pmatrix}H_1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Тогда существует управление $u=m_1x+m_2x_1+m_3y$, которое стабилизирует движение до асимптотической устойчивости по части фазовых переменных. При этом, коэффициенты управления m_1, m_2, m_3 можно выразить через параметры системы аналогично [3], поскольку уравнения первого приближения совпадают:

$$m_1=-\frac{(a_1M_1+a_3)}{\Delta};\; m_2=-\frac{H_1(a_2+M_1)}{\Delta};\; m_3=-\frac{H_1^2a_1}{\Delta};$$

$$\Delta = H_1^2;\ a_1 = 1 + \sqrt{2M_1 + 2\sqrt{M_1^2 + H_1^2}};$$
$$a_2 = \sqrt{M_1^2 + H_1^2} + \sqrt{2M_1 + 2\sqrt{M_1^2 + H_1^2}};\ a_3 = \sqrt{M_1^2 + H_1^2}.$$

Как и в [3], условие $\Delta \neq 0$ совпадает с достаточным условием разрешимости задачи стабилизации.

Рассмотрим задачу наблюдаемости в системе при наличии возможно меньшего объема измерительной информации о возмущениях фазовых переменных. Условие полной наблюдаемости по измерению возмущения позиционной координаты выполняется. По измерениям позиционной скорости и циклического импульса условие наблюдаемости не выполнено. Полная система соответствует критическому случаю (один нулевой корень), поэтому устойчивость стационарного движения схвата манипулятора устанавливается по теореме Ляпунова—Малкина об устойчивости в особенном случае. Тогда управление $u = m_1 x + m_2 x_1 + m_3 y$ обеспечивает асимптотическую устойчивость по позиционным координатам и скоростям, циклическим импульсам и устойчивость по координатам, соответствующим зависимым скоростям.

In the work the problem of stability and stabilization of manipulator motion is considered up to the non-asymptotic stability on all variables of the multilink manipulator.

1. *Шульгин М. Ф.* О некоторых дифференциальных уравнениях аналитической динамики и их интегрировании//Тр. Среднеазийского ун-та. — 1958. — С. 144—183.
2. *Красинский А. Я.* О стабилизации установившихся движений систем с циклическими координатами. // ПММ. — 1992. — 56, вып.6. — С. 939—949.
3. *Механика* промышленных роботов: Учеб. пособие для втузов. В 3-х кн. / Под ред. К. В. Фролова, Е. И. Воробьева. — М. : «Высшая школа», 1998. — 304 с.
4. *Черноуско Ф. Л., Болотник Н.Н., Градецкий В.Г.* Манипуляционные роботы: динамика, управление, оптимизация. — М. : Наука, 1989. — 456 с.
5. *Красинский А. Я., Атажанов Б., Хайдаров И. К.* К устойчивости стационарных движений систем с избыточными координатами // Проблемы механики. — 2002. — № 6. — С.3—8.
6. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. — М. : Наука. — 1966. — 530 с.
7. *Красовский Н. Н.* Проблема стабилизации управляемых движений / Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. Дополнение 4. — М. : Наука, 1966. — С.475— 514.

Поступила 05.03.08

АТАЖАНОВ Бахтияр, д-р физ.-мат. наук, доцент каф. теоретической и прикладной механики Национального университета Узбекистана. В 1976 г. окончил Ташкентский госуниверситет. Область научных исследований – устойчивость, управление и стабилизация движений механических систем.