УДК 519.21

А. В. Макаричев, канд. физ.-мат. наук
Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет
(Украина, 61002, Харьков, ул. Петровского, 25,
тел. 7073737, E-mail: amakarichev@mail.ru)

Надежность комплексов сложных восстанавливаемых систем с временным резервом и возвращением восстановленных элементов в системы с минимальным внутренним резервом. II

Найдено асимптотическое распределение времени безотказной работы комплексов сложных восстанавливаемых систем (СВС) с временным резервом и возвращением восстановленных элементов в системы с минимальным внутренним резервом с момента установления исправности всех элементов всех СВС. Исследование проведено для комплексов СВС с марковским потоком отказов элементов, произвольной функцией распределения времени обслуживания элементов СВС, число которых возрастает обратно пропорционально интенсивности отказов так, что суммарная нагрузка на систему обслуживания требований в порядке их поступления ограничена сверху величиной, меньшей единицы.

Знайдено асимптотичний розподіл часу безвідмовної роботи комплексів складних відновлювальних систем (СВС) з часовим резервом і поверненням відновлених елементів у системи з мінімальним внутрішнім резервом з моменту встановлення справності усіх елементів усіх СВС. Дослідження проведено для комплексів СВС з марковським потоком відмовлень елементів, довільною функцією розподілу часу обслуговування елементів СВС, число яких зростає зворотньо пропорційно інтенсивності їх відмовлень так, що сумарне навантаження на систему обслуговування вимог у порядку їх надходження є обмеженим зверху величиною, меншою за одиницю.

К л ю ч е в ы е с л о в а: сложные восстанавливаемые системы, временной резерв, возвращение элементов, минимальный внутренний резерв.

Лемма 10. Пусть $\rho < 1$ и существует конечный момент $m_s < \infty$. Тогда при $N \to \infty$

$$\left| E \int_\Delta \ldots \int B_0^-(1,0,x_1,\ldots,x_s,\xi)\, dx_1 \ldots dx_s - E \int_\Delta \ldots \int B_0(1,0,x_1,\ldots,x_s,\xi)\, dx_1 \ldots dx_s \right| \to 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем любое число $\varepsilon > 0$. Из леммы 7 следует, что существует такое $z = z(\varepsilon)$, что для любого $z \ge z(\varepsilon)$

$$\int\limits_{\Delta\setminus\Delta(z)}\!\!\cdots\!\int B_\lambda(1,0,x_1,\ldots,x_s)\,dx_1\ldots dx_s<\frac{\varepsilon}{6}. \tag{14}$$

Поскольку $\lambda(0)\le\lambda$, из леммы 5, приведенной в работе [1], следует, что для любого $\xi\ge 0$

$$\begin{aligned} B_0^-(1,0,x_1,\ldots,x_s,\xi)&\le B_\lambda(1,0,x_1,\ldots,x_s),\\ B_0(1,0,x_1,\ldots,x_s,\xi)&\le B_\lambda(1,0,x_1,\ldots,x_s). \end{aligned} \tag{15}$$

Из (14) и (15) следует, что для любого $\xi\ge 0$

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\Delta\setminus\Delta(z)}\!\!\cdots\!\int B_0^-(1,0,x_1,\ldots,x_s,\xi)\,dx_1\ldots dx_s<\frac{\varepsilon}{6},\\ &\int\limits_{\Delta\setminus\Delta(z)}\!\!\cdots\!\int B_0(1,0,x_1,\ldots,x_s,\xi)\,dx_1\ldots dx_s<\frac{\varepsilon}{6}. \end{aligned} \tag{16}$$

Из аксиомы непрерывности теории вероятностей для выбранного ε существует такое натуральное число $l=l(\varepsilon)$, что для всех $l\ge l(\varepsilon)$

$$P(\Pi_{\lambda(0)}(z)>l)<\frac{\varepsilon}{6|\Delta(z)|}. \tag{17}$$

Отсюда и из неравенства $x_1<x_s<z$ следует

$$P(\Pi_{\lambda(0)}(x_1)>l)<P(\Pi_{\lambda(0)}(z)>l)<\frac{\varepsilon}{6|\Delta(z)|}. \tag{18}$$

Пусть C_l — случайное событие, состоящее в том, что совпадут моменты возникновения первых l требований двух пуассоновских потоков с параметрами $\lambda(0)$ и $\lambda_-(0)$ (второй поток получается из первого путем просеивания). Тогда $P(C_l)=(1-N^{-1})^l\to 1$ при $N\to\infty$. Отсюда следует, что для выбранного $\varepsilon>0$ существует такое $l=l(\varepsilon)$, что для любого $l\ge l(\varepsilon)$

$$P(C_l)>1-\frac{\varepsilon}{6|\Delta(z)|}. \tag{19}$$

Пусть $C=\{\Pi_{\lambda(0)}(z)\le l\}\,C_l$ и $I(C)$ — индикатор случайного события C. Тогда для любого $\xi\ge 0$

$$B_0^-(1,0,x_1,x_2,\ldots,x_s,\xi)=P\{\varsigma_0^->x_1,\|e(x_1-0)\|\ge 1,\eta_{\text{ост}}(x_1)>x_s-x_1+\xi\}=$$

$$=P\{\varsigma_0^- I(C)>x_1, I(C)\|e(x_1-0)\|\ge 1,\eta_{\text{ост}}(x_1)\,I(C)>x_s-x_1+\xi\}+$$

$$+P\{\varsigma_0^- I(\bar{C})>x_1, I(\bar{C})\| e(x_1-0)\|\geq 1, \eta_{\text{ост}}(x_1)\, I(\bar{C})>x_s-x_1+\xi\}, \qquad (20)$$

$$B_0(1,\ 0,\ x_1,\ x_2,\ ...,\ x_s,\ \xi)=P\{\varsigma_0>x_1, \| e(x_1-0)\|\geq 1, \eta_{\text{ост}}(x_1)>x_s-x_1+\xi\}=$$

$$=P\{\varsigma_0 I(C)>x_1, I(C)\| e(x_1-0)\|\geq 1, \eta_{\text{ост}}(x_1)\, I(C)>x_s-x_1+\xi\}+$$

$$+P\{\varsigma_0 I(\bar{C})>x_1, I(\bar{C})\| e(x_1-0)\|\geq 1, \eta_{\text{ост}}(x_1)\, I(\bar{C})>x_s-x_1+\xi\}. \qquad (21)$$

Из построения случайного события следует, что для любого $\xi\geq 0$

$$\{\varsigma_0^-(\omega,\alpha)\, I(C)>x_1, I(C)\| e(x_1-0)\|\geq 1, \eta_{\text{ост}}(x_1)\, I(C)>x_s-x_1+\xi\}=$$

$$=\{\varsigma_0(\omega,\alpha)\, I(C)>x_1, I(C)\| e(x_1-0)\|\geq 1, \eta_{\text{ост}}(x_1)\, I(C)>x_s-x_1+\xi\}. \qquad (22)$$

Поскольку для любого $\xi\geq 0$ с использованием (18) и (19)

$$P\{\varsigma_0^- I(\bar{C})>x_1, I(\bar{C})\| e(x_1-0)\|\geq 1, \eta_{\text{ост}}(x_1)\, I(\bar{C})>x_s-x_1+\xi\}\leq$$

$$\leq P(\bar{C})\leq P(\Pi_\lambda(x_1)>l)+P(\bar{C}_l)<\frac{\varepsilon}{3|\Delta(z)|} \qquad (23)$$

и аналогично для любого $\xi\geq 0$

$$P\{\varsigma_0 I(\bar{C})>x_1, I(\bar{C})\| e(x_1-0)\|\geq 1, \eta_{\text{ост}}(x_1)\, I(\bar{C})>x_s-x_1+\xi\}\leq$$

$$\leq P(\bar{C})\leq P(\Pi_\lambda(x_1)>l)+P(\bar{C}_l)<\frac{\varepsilon}{3|\Delta(z)|}, \qquad (24)$$

из (20) — (24) следует

$$\left|B_0^-(1,0,x_1,...,x_s,\xi)-B_0(1,0,x_1,...,x_s,\xi)\right|<\frac{2\varepsilon}{3|\Delta(z)|}. \qquad (25)$$

Из (25) и свойства интеграла для любого $\xi\geq 0$ вытекает

$$\left|\int\limits_{\Delta(z)}\!\!...\!\int B_0^-(1,0,x_1,...,x_s,\xi)\,dx_1\,...\,dx_s-\int\limits_{\Delta(z)}\!\!...\!\int B_0(1,0,x_1,...,x_s,\xi)\,dx_1\,...\,dx_s\right|\leq$$

$$\leq\int\limits_{\Delta(z)}\!\!...\!\int\left|B_0^-(1,0,x_1,...,x_s,\xi)-B_0(1,0,x_1,...,x_s,\xi)\right|dx_1\,...\,dx_s\leq$$

$$\leq\int\limits_{\Delta(z)}\!\!...\!\int\frac{2}{3|\Delta(z)|}\,dx_1\,...\,dx_s=\frac{2\varepsilon}{3}. \qquad (26)$$

Из (16) и (26) следует, что для любого $N \ge N(\varepsilon)$ и любого $\xi \ge 0$

$$\left| \int\limits_{\Delta} ... \int B_0^-(1,0, x_1, ..., x_s, \xi)\, dx_1 \dots dx_s - \int\limits_{\Delta} ... \int B_0(1,0, x_1, ..., x_s, \xi)\, dx_1 \dots dx_s \right| \le$$

$$\le \left| \int\limits_{\Delta \setminus \Delta(z)} ... \int B_0^-(1,0,x_1,...,x_s,\xi)\, dx_1 \dots dx_s \right| + \left| \int\limits_{\Delta \setminus \Delta(z)} ... \int B_0(1,0,x_1,...,x_s,\xi)\, dx_1 \dots dx_s \right| +$$

$$+ \left| \int\limits_{\Delta(z)} ... \int B_0^-(1, 0, x_1, ..., x_s, \xi)\, dx_1 \dots dx_s - \int\limits_{\Delta(z)} ... \int B_0(1,0,x_1,...,x_s,\xi)\, dx_1 \dots dx_s \right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Отсюда для любого $N \ge N(\varepsilon)$ справедливо неравенство

$$\left| E \int\limits_{\Delta} ... \int B_0^-(1,0, x_1, ..., x_s, \xi)\, dx_1 \dots dx_s - E \int\limits_{\Delta} ... \int B_0(1,0,x_1,...,x_s, \xi)\, dx_1 \dots dx_s \right| < \varepsilon.$$

Отсюда и определения предела последовательности следует утверждение леммы 10. Лемма 10 доказана.

Лемма 11. Пусть $p<1$ и существует конечный момент $m_s < \infty$. Тогда при $N \to \infty$

$$\left| J_{1,N} - E \int\limits_{\Delta} ... \int B_0(1,0, x_1, ..., x_s, \xi)\, dx_1 \dots dx_s \right| \to 0\,.$$

Доказательство. Для простоты введем обозначения

$$J_N^{(1)} = E \int\limits_{\Delta} ... \int B\,(1,0,x_1,...,x_s,\xi)\, dx_1 \dots dx_s,$$

$$J_N^{(2)} = E \int\limits_{\Delta} ... \int B_0^-(1,0,x_1,...,x_s,\xi)\, dx_1 \dots dx_s,$$

$$J_N^{(3)} = E \int\limits_{\Delta} ... \int B_0(1,0,x_1,...,x_s,\xi)\, dx_1 \dots dx_s.$$

Из лемм 8—10 следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие натуральные числа $N_1 = N_1(\varepsilon)$, $N_2 = N_2(\varepsilon)$, $N_3 = N_3(\varepsilon)$, что для любого натурального числа $N > N_1$

$$\left| J_{1,N} - J_N^{(1)} \right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

для любого $N > N_2$

$$\left| J_N^{(1)} - J_N^{(2)} \right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

для любого $N > N_3$

$$\left| J_N^{(2)} - J_N^{(3)} \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Пусть $N_0 = \max\{N_1, N_2, N_3\}$. Тогда для любого натурального числа $N > N_0$ справедливо неравенство

$$\left| J_{1,N} - J_N^{(3)} \right| \le \left| J_N - J_N^{(1)} \right| + \left| J_N^{(1)} - J_N^{(2)} \right| + \left| J_N^{(2)} - J_N^{(3)} \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon .$$

Лемма 11 доказана.

Лемма 12. Пусть $\rho < 1$ и существует конечный момент $m_s < \infty$. Тогда

$$E\int\limits_{\Delta}\dots\int B_0(1, 0, x_1, x_2, \dots, x_s, \xi)\, dx_1 dx_2 \dots dx_s = \frac{1}{(1-\rho_0)} \int\limits_{u \ge 0} dH(u) \int\limits_{t > u} \frac{(t-u)^{s-1}}{(s-1)!} \overline{G}(t)\, dt.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно предельной теореме для регенерирующих процессов [1, 2]

$$E\int\limits_{\Delta}\dots\int B_0(1, 0, x_1, x_2, \dots, x_s, \xi)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_s =$$

$$= E \int\limits_{x_1 > 0} dx_1 \int\limits_{0 < x_2 < \dots < x_s}\dots\int P\{\varsigma_0 > x_1, \| e(x_1 - 0) \| \ge 1, \eta_{\text{ост}}(x_1) > x_s - x_1 + \xi\}\, dx_2 \dots dx_s =$$

$$= \frac{m_1}{(1-\rho_0)} E \int\limits_{0 < x_2 < \dots < x_s} dx_2 \dots dx_s \int \frac{1}{m_1} \int\limits_{t > x_s} \overline{G}(t+\xi)\, dt =$$

$$= \frac{1}{(1-\rho_0)} E \int\limits_{0 < x_2 < \dots < x_s < t}\dots\int \overline{G}(t+\xi)\, dx_2 \dots dx_s dt =$$

$$= \frac{1}{(1-\rho_0)} \int\limits_{u \ge 0} dH(u) \int\limits_{t > 0} \frac{t^{s-1}}{(s-1)!} \overline{G}(t+u)\, dt = \frac{1}{(1-\rho_0)} \int\limits_{u \ge 0} dH(u) \int\limits_{t > u} \frac{(t-u)^{s-1}}{(s-1)!} \overline{G}(t)\, dt.$$

Лемма 12 доказана.

Пусть $B(n, x_1) = P\{\varsigma > x_1, \| e(x_1 - 0)\| \geq n\}$ — условная вероятность того, что период регенерации случайного процесса $\| e(x)\|$ — число требований в РО в момент времени x — комплекса N не закончится к моменту времени x_1 и в момент времени $x_1 - 0$ в РО комплекса N находится не менее, чем n требований при условии, что период регенерации начался в момент времени $x = 0$, в момент времени x_1 произошел отказ j_1-го элемента первой сложной системы и больше отказов в этой системе до момента времени x_1 не было.

Пусть $B_\lambda(n, x_1) = P\{\hat{\varsigma} > x_1, \| \hat{e}(x_1 - 0)\| \geq n\}$ — условная вероятность того, что период регенерации случайного процесса $\| \hat{e}(x)\|$ — число требований в РО в момент времени x — комплекса $\mathrm{N}_{\lambda,G}$ не закончится к моменту времени x_1 и в момент времени $x_1 - 0$ в РО комплекса $\mathrm{N}_{\lambda,G}$ находится не менее, чем n требований при условии, что период регенерации начался в момент времени $x = 0$.

Лемма 13. Пусть $\rho < 1$ и существует конечный момент $m_2 < \infty$. Тогда

$$\sum_{n \geq 1} \int_{x_1 > 0} B_\lambda(n, x_1)\, dx_1 = \left[m_1 + \frac{\lambda\, m_2}{2(1-\rho)} \right] (1-\rho)^{-1}.$$

Доказательство.

$$\sum_{n \geq 1} \int_{x_1 > 0} B_\lambda(n, x_1)\, dx_1 =$$

$$= \sum_{n \geq 1} \int_{x_1 > 0} P\{\hat{\varsigma} > x_1, \| \hat{e}(x_1 - 0)\| \geq n\}\, dx_1 = \sum_{n \geq 1} \int_{x_1 > 0} nP\{\hat{\varsigma} > x_1, \| \hat{e}(x_1 - 0)\| = n\}\, dx_1 =$$

$$= \sum_{n \geq 1} n \int_{x_1 > 0} P\{\hat{\varsigma} > x_1, \| \hat{e}(x_1 - 0)\| = n\}\, dx_1.$$

Из предельной теоремы для регенерирующих процессов [1, 2] следует

$$\int_{x_1 > 0} P\{\hat{\varsigma} > x_1, \| \hat{e}(x_1 - 0)\| = n\}\, dx_1 = \frac{1}{\lambda(1-\rho)}\, \hat{p}_n,$$

где $\hat{p}_n$ — стационарная вероятность того, что в РО комплекса $\mathrm{N}_{\lambda,G}$ находятся ровно n требований. Из двух последних равенств, формулы Литтла [4] и выражения для математического ожидания стационарного времени пребывания в однолинейном РО с дисциплиной обслуживания в порядке поступления требований [5] следует

$$\sum_{n \geq 1} \int_{x_1 > 0} B_\lambda(n, x_1)\, dx_1 =$$

$$=\sum_{n\ge 1} n \int_{x_1>0} P\{\hat\xi > x_1, \|\hat e(x_1-0)\| = n\}\, dx_1 = \sum_{n\ge 1} n\, \hat p_n \frac{1}{\lambda(1-\rho)} = \left[m_1 + \frac{\lambda m_2}{2(1-\rho)}\right](1-\rho)^{-1}.$$

Лемма 13 доказана.

Пусть $B_0^-(n,x_1)$ и $B_0(n,x_1)$ соответственно в комплексах $\mathrm{N}_{\lambda\_(0),G}$ и $\mathrm{N}_{\lambda(0),G}$ — условные вероятности того, что, начавшись в момент времени $x=0$, период регенерации не закончится до момента времени x_1 и в момент времени x_1-0 в РО комплексов находятся не менее n требований при условии, что период регенерации начался в момент времени $x=0$.

Лемма 14. $B(n,x_1) \le B_\lambda(n,x_1)$ и $B_0^-(n,x_1) \le B_0(n,x_1) \le B_\lambda(n,x_1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно теореме 1 из работы [3]

$$\{\varsigma(\omega) > x_1, \|e(x_1-0)[\omega]\| \ge n\} \subset \{\hat\xi(\omega) > x_1, \|\hat e(x_1-0)[\omega]\| \ge n\}.$$

Поэтому

$$B(n,x_1) = P\{\varsigma(\omega) > x_1, \|e(x_1-0)[\omega]\| \ge n\} \le$$
$$\le P\{\hat\xi(\omega) > x_1, \|\hat e(x_1-0)[\omega]\| \ge n\} = B_\lambda(n,x_1).$$

Первое неравенство доказано. Аналогично

$$\{\varsigma_0^-(\omega) > x_1, \left\|e_0^-(x_1-0)[\omega]\right\| \ge n\} \subset \{\varsigma_0(\omega) > x_1, \|e_0(x_1-0)[\omega]\| \ge n\} \subset$$

$$\subset \{\hat\xi(\omega) > x_1, \|\hat e(x_1-0)[\omega]\| \ge n\}.$$

Поэтому

$$B_0^-(n,x_1) \le B_0(n,x_1) \le B_\lambda(n,x_1).$$

Лемма 14 доказана.

Лемма 15. Пусть $\rho<1$ и существует конечный момент $m_2<\infty$. Тогда

$$\sum_{n\ge 1} \int_{x_1>0} B(n,x_1)\, dx_1 \le \left[m_1 + \frac{\lambda m_2}{2(1-\rho)}\right](1-\rho)^{-1},$$

$$\sum_{n\ge 1} \int_{x_1>0} B_0^-(n,x_1)\, dx_1 \le \left[m_1 + \frac{\lambda m_2}{2(1-\rho)}\right](1-\rho)^{-1},$$

$$\sum_{n\ge 1} \int_{x_1>0} B_0(n,x_1)\, dx_1 \le \left[m_1 + \frac{\lambda m_2}{2(1-\rho)}\right](1-\rho)^{-1}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение леммы 15 следует из лемм 13, 14 и монотонности интеграла. Лемма 15 доказана.

Лемма 16. Пусть $\rho<1$ и существует конечный момент $m_2<\infty$. Тогда

$$J_{2,N}\le\left[m_1+\frac{\lambda m_2}{2(1-\rho)}\right](1-\rho)^{-1}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения $J_{2,N}$, неравенств

$$\exp\{-\lambda(0)\,N^{-1}x_1\}\le 1,$$

$$E\exp\{-\lambda(e_1^j)\,N^{-1}[\eta_{\text{ост}}(x_1)+\eta_1+\ldots+\eta_k]\}\le 1,$$

монотонности интеграла и леммы 14 следует

$$J_{2,N}=\sum_{n\ge1}\sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_{x_1>0}\exp[-\lambda(0)\,N^{-1}\,x_1]\,P\{\varsigma>x_1,\|e(x_1-0)\|=n\}\times$$

$$\times E\exp\{-\lambda(e_1)\,N^{-1}[\eta_{\text{ост}}(x_1)+\eta_1+\ldots+\eta_k]\}\,dx_1\le$$

$$\le\sum_{n\ge1}\sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_{x_1>0}P\{\varsigma>x_1,\|e(x_1-0)\|=n\}\,dx_1=\sum_{n\ge1}\int\limits_{x_1>0}nP\{\varsigma>x_1,\|e(x_1-0)\|=n\}\,dx_1=$$

$$=\sum_{n\ge1}\int\limits_{x_1>0}P\{\varsigma>x_1,\|e(x_1-0)\|\ge n\}\,dx_1=\sum_{n\ge1}\int\limits_{x_1>0}B(n,x_1)\,dx_1\le$$

$$\le\sum_{n\ge1}\int\limits_{x_1>0}B_\lambda(n,x_1)\,dx_1=\left[m_1+\frac{\lambda m_2}{2(1-\rho)}\right](1-\rho)^{-1}.$$

Лемма 16 доказана.

Обозначим $\alpha_N(x_1)=E\exp[-\lambda(e_1^j)N^{-1}\eta_{\text{ост}}(x_1)]$.

Лемма 17. Для любого $x>0$ при $N\to\infty$ равномерно по $x_1\in[0,x]$

$$\alpha_N(x_1)\to 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем любое $x>0$ и зафиксируем. Пусть $x_1\in[0,x]$. Из определения $\alpha_N(x_1)$ следуют неравенства

$$1-\frac{\lambda(e_1^j)}{N}E\,\eta_{\text{ост}}(x_1)\le\alpha_N(x_1)\le 1. \tag{27}$$

Если $\overline{G}(x)=0$, то $\eta_{\text{ост}}(x_1)\le x-x_1\le x$, и из двух последних неравенств находим

$$1-\frac{\lambda(e_1^j)\,x}{N}\le\alpha_N(x_1)\le 1. \tag{28}$$

Если $\overline{G}(x)>0$, то для любого $t\in[0, x]$

$$E\eta_t = E(\eta - t|\eta > t) \le E(\eta|\eta > t) = \frac{\int\limits_{u>t} u dG(u)}{\overline{G}(t)} \le \frac{E\eta}{\overline{G}(x)} = \frac{m_1}{\overline{G}(x)}.$$

Отсюда и из (27) в этом случае получаем

$$1 - \frac{\lambda(e_1^j)}{N}\frac{m_1}{\overline{G}(x)} \le \alpha_N(x_1) \le 1. \tag{29}$$

Из (28) и (29) следует, что при $N\to\infty$ равномерно по $x_1\in[0,x]$

$$\alpha_N(x_1)\to 1.$$

Лемма 17 доказана.

Лемма 18. Пусть $\rho<1$ и существует конечный момент $m_s<\infty$.Тогда при $N\to\infty$

$$\left| J_{2,N} - \sum_{n\ge1}\int\limits_{x_1>0} B(n,x_1)dx_1 \right| \to 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\beta_N = E\exp\{-\lambda(e_1)N^{-1}\eta_1]$. Тогда из известного свойства преобразования Лапласа в силу независимости случайных величин $\eta_{\text{ост}}(x_1),\eta_1,\ldots,\eta_k$ и одинакового распределения случайных величин $\eta_1,\ldots,\eta_k$ получаем равенство

$$E\exp\{-\lambda(e_1)N^{-1}[\eta_{\text{ост}}(x_1)+\eta_1+\ldots+\eta_k]\} = \alpha_N(x_1)(\beta_N)^k.$$

Из леммы 15 следует

$$\sum_{n\ge1}\sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_{x_1>0} P\{\varsigma > x_1, \| e(x_1-0)\| = n\}\,dx_1 =$$

$$= \sum_{n\ge1}\int\limits_{x_1>0} B(n,x_1)\,dx_1 \le \left[m_1 + \frac{\lambda m_2}{2(1-\rho)}\right](1-\rho)^{-1}.$$

Отсюда и из леммы 16 следует, что для любого $\varepsilon>0$ существует такое натуральное число n_ε и такое действительное число z_ε, что для всех $l>n_\varepsilon$ и для всех $z>z_\varepsilon$

$$\sum_{n\ge1}\sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_{x_1>0} P\{\varsigma > x_1, \| e(x_1-0)\| = n\}\,dx_1 -$$

$$-\sum_{n=1}^{l-1}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^z P\{\varsigma > x_1, \|e(x_1-0)\| = n\}\, dx_1 < \frac{\varepsilon}{5}, \tag{30}$$

$$\Bigg| J_{2,N} - \sum_{n=1}^{l}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^z \exp[-\lambda(0)\, N^{-1}x_1]\, P\{\varsigma > x_1, \|e(x_1-0)\| =$$

$$= n\}\, \alpha_N(x_1)(\beta_N)^k\, dx_1 \Bigg| < \frac{\varepsilon}{5}\ . \tag{31}$$

Выберем $l > n_\varepsilon$ и зафиксируем. При $N \to \infty$

$$(\beta_N)^{l-1} \to 1,\ \exp[-\lambda(0)\, N^{-1}x_1] \to 1,\ \alpha_N(x_1) \to 1$$

равномерно по $x_1 \in [0, z]$, что вытекает из леммы 17. Отсюда следует, что существует натуральное число $N(\varepsilon) = N(\varepsilon, l, z)$ такое, что для всех $N > N(\varepsilon)$ справедливы неравенства

$$(\beta_N)^{l-1} > 1 - \frac{2\varepsilon}{5(l-1)\, lz},$$

$$\exp[-\lambda(0)\, N^{-1}x_1] > 1 - \frac{2\varepsilon}{5(l-1)\, lz},\ \ \alpha_N(x_1) > 1 - \frac{2\varepsilon}{5(l-1)\, lz}$$

равномерно по $x_1 \in [0, z]$. Отсюда следует, что для всех $N > N(\varepsilon, l, z)$

$$\exp[-\lambda(0)\, N^{-1}x_1](\beta_N)^{l-1}\alpha_N(x_1) > 1 - \frac{6\varepsilon}{5(l-1)lz}\ . \tag{32}$$

Из (31) и (32) следует

$$\Bigg| \sum_{n=1}^{l}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^z \exp[-\lambda(0)\, N^{-1}x_1]\, P\{\varsigma > x_1, \|e(x_1-0)\| = n\}\, \alpha_N(x_1)(\beta_N)^k\, dx_1 -$$

$$- \sum_{n=1}^{l}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^z P\{\varsigma > x_1, \|e(x_1-0)\| = n\}\, dx_1 \Bigg| < \frac{3\varepsilon}{5}\ . \tag{33}$$

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число $N(\varepsilon)$, что для любого целого числа $N > N(\varepsilon)$ из (30), (31), (33) получаем

$$\Bigg| J_{2,N} - \sum_{n \ge 1}\ \int_{x_1 > 0} B(n, x_1)\, dx_1 \Bigg| < \varepsilon.$$

Лемма 18 доказана.

ISSN 0204–3572. Electronic Modeling. 2008. V. 30. № 6

Лемма 19. Пусть $\rho<1$ и существует конечный момент $m_s<\infty$. Тогда

$$\sum_{n\ge 1}\int_{x_1>0} B(n,x_1)\,dx_1=\sum_{n\ge 1}\int_{x_1>0} B_0^-(n,x_1)\,dx_1 .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определений величин $B(n,x_1)$ и $B_0^-(n,x_1)$ следует, что

$$B(n,x_1)=B_0^-(n,x_1)\,.$$

Отсюда и из леммы 15 следует утверждение леммы 19. Она доказана.

Лемма 20. Пусть $\rho<1$ и существует конечный момент $m_s<\infty$. Тогда при $N\to\infty$

$$\left|\sum_{n\ge 1}\int_{x_1>0} B_0(n,x_1)\,dx_1-\sum_{n\ge 1}\int_{x_1>0} B_0^-(n,x_1)\,dx_1\right|\to 0\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы 15 следует, что для любого $\varepsilon>0$ существует такое натуральное число n_ε и такое действительное число z_ε, что для всех $l>n_\varepsilon$ и для всех $z>z_\varepsilon$

$$\sum_{n\ge 1}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_1>0} P\{\varsigma_0>x_1,\|e_0(x_1-0)\|=n\}\,dx_1-$$

$$-\sum_{n=1}^{l-1}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^z P\{\varsigma_0>x_1,\|e_0(x_1-0)\|=n\}\,dx_1<\frac{\varepsilon}{6}\,, \tag{34}$$

$$\sum_{n\ge 1}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_1>0} P\{\varsigma_0^->x_1,\left\|e_0^-(x_1-0)\right\|=n\}\,dx_1-$$

$$-\sum_{n=1}^{l-1}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^z P\{\varsigma_0^->x_1,\left\|e_0^-(x_1-0)\right\|=n\}\,dx_1<\frac{\varepsilon}{6}\,. \tag{35}$$

Как и прежде, $\Pi_\lambda(z)$ — число требований пуассоновского потока с параметром λ, возникших на промежутке $[0,z]$. Согласно аксиоме непрерывности теории вероятностей для выбранного ε существует такое натуральное число $l=l(\varepsilon)$, что для всех $l\ge l(\varepsilon)$

$$P(\Pi_{\lambda(0)}(z)>l)<\frac{\varepsilon}{3zl(l-1)}\,. \tag{36}$$

Отсюда и из неравенства $x_1<x_{sk}<z$ следует

$$P(\Pi_{\lambda(0)}(x_1)>l)<P(\Pi_{\lambda(0)}(z)>l)<\frac{\varepsilon}{3zl(l-1)}\,. \tag{37}$$

Пусть C_l — случайное событие, состоящее в том, что совпадут моменты возникновения первых l требований двух пуассоновских потоков с параметрами $\lambda(0)$ и $\lambda(0)_-$ (второй поток получается из первого путем просеивания). Тогда $P(C_l) = (1 - N^{-1})^l \to 1$ при $N \to \infty$. Отсюда следует, что для выбранного $\varepsilon > 0$ существует такое $l = l(\varepsilon)$, что для любого $l \geq l(\varepsilon)$

$$P(C_l) > 1 - \frac{\varepsilon}{3zl(l-1)}. \tag{38}$$

Пусть $C = \{(\Pi_{\lambda(0)}(z) \leq l)\} C_l$ и $I(C)$ — индикатор случайного события C. Тогда

$$P(\varsigma_0^- > x_1, \left\| e_0^-(x_1 - 0) \right\| = n) = P(\varsigma_0^- I(C) > x_1, \left\| e_0^-(x_1 - 0) \right\| I(C) = n) +$$
$$+ P(\varsigma_0^- I(\overline{C}) > x_1, \left\| e_0^-(x_1 - 0) \right\| I(\overline{C}) = n) \tag{39}$$

и

$$P(\varsigma_0 > x_1, \| e(x_1 - 0) \| = n) = P(\varsigma_0 I(C) > x_1, \left\| e_0(x_1 - 0) \right\| I(C) = n) +$$
$$+ P(\varsigma_0 I(\overline{C}) > x_1, \left\| e_0(x_1 - 0) \right\| I(\overline{C}) = n). \tag{40}$$

Из построения случайного события C следует

$$\{\varsigma_0 I(C) > x_1, \left\| e_0(x_1 - 0) \right\| I(C) = n\} = \{\varsigma_0^- I(C) > x_1, \left\| e_0^-(x_1 - 0) \right\| I(C) = n\}. \tag{41}$$

Поскольку (с использованием (37) и (38))

$$P(\varsigma_0 I(\overline{C}) > x_1, \left\| e_0(x_1 - 0) \right\| I(\overline{C}) = n) <$$
$$< P(\overline{C}) \leq P(\Pi_{\lambda(0)} > l) + P(\overline{C}_l) < \frac{2\varepsilon}{3zl(l-1)} \tag{42}$$

и аналогично

$$P(\varsigma_0^- I(\overline{C}) > x_1, \left\| e_0^-(x_1 - 0) \right\| I(\overline{C}) = n) < P(\overline{C}) < \frac{2\varepsilon}{3zl(l-1)}, \tag{43}$$

из (34) — (43) следует

$$\left| P(\varsigma_0 > x_1, \left\| e_0(x_1 - 0) \right\| = n) - P(\varsigma_0^- > x_1, \left\| e_0^-(x_1 - 0) \right\| = n) \right| < \frac{4\varepsilon}{3zl(l-1)}. \tag{44}$$

Согласно свойству интеграла из (44) получаем

$$\left| \sum_{n=1}^{l-1} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^z P(\varsigma_0 > x_1, \left\| e_0(x_1 - 0) \right\| = n)\, dx_1 - \sum_{n=1}^{l-1} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^z P(\varsigma_0^- > x_1, \left\| e_0^-(x_1 - 0) \right\| = \right.$$

$$=n)\,dx_1\big|\le\sum_{n=1}^{l-1}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^z\big|P(\varsigma_0>x_1,\|e_0(x_1-0)\|=$$

$$=n)-P(\varsigma_0^->x_1,\left\|e_0^-(x_1-0)\right\|=n)\big|\,dx_1\le$$

$$\le\sum_{n=1}^{l-1}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^z\frac{4\varepsilon}{3zl\,(l-1)}\,dx_1=\frac{2\varepsilon}{3}. \tag{45}$$

Из (34), (35) и (45) следует, что для любого $N>N(\varepsilon)$

$$\left|\sum_{n\ge1}\int_{x_1>0}B_0(x_1,n)\,dx_1-\sum_{n\ge1}\int_{x_1>0}B_0^-(x_1,n)\,dx_1\right|<\frac{\varepsilon}{6}+\frac{\varepsilon}{6}+\frac{2\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

Отсюда и согласно определению предела последовательности следует утверждение леммы 20. Лемма 20 доказана.

Лемма 21. Пусть $\rho<1$ и существует конечный момент $m_s<\infty$. Тогда при $N\to\infty$

$$\left|J_{2,N}-\sum_{n\ge1}\int_{x_1>0}B_0(n,x_1)\,dx_1\right|\to0.$$

Доказательство. Обозначим

$$J_N^{(1)}=\sum_{n\ge1}\int_{x_1>0}B(n,x_1)\,dx_1,\quad J_N^{(2)}=\sum_{n\ge1}\int_{x_1>0}B_0^-(n,x_1)\,dx_1,$$

$$J_N^{(3)}=\sum_{n\ge1}\int_{x_1>0}B_0(n,x_1)\,dx_1.$$

Тогда согласно леммам 18 и 20 для любого $\varepsilon>0$ существует такое натуральное число $N(\varepsilon)$, что для всех целых чисел $N>N(\varepsilon)$

$$\left|J_{2,N}-J_N^{(1)}\right|<\frac{\varepsilon}{2},\quad \left|J_N^{(2)}-J_N^{(3)}\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Согласно лемме 19 $J_N^{(1)}=J_N^{(2)}$. Из двух последних предложений следует, что для любого целого $N>N(\varepsilon)$

$$\left|J_{2,N}-J_N^{(3)}\right|=\left|J_{2,N}-J_N^{(1)}+J_N^{(1)}-J_N^{(2)}+J_N^{(2)}-J_N^{(3)}\right|\le$$

$$\le\left|J_{2,N}-J_N^{(1)}\right|+\left|J_N^{(1)}-J_N^{(2)}\right|+\left|J_N^{(2)}-J_N^{(3)}\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Отсюда и согласно определению предела последовательности следует утверждение леммы 21.

Лемма 22. Пусть $\rho<1$ и существует конечный момент $m_2<\infty$. Тогда

$$\sum_{n\geq 1}\int_{x_1>0} B_0(n,x_1)\,dx_1=\left[m_1+\frac{\lambda(0)\,m_2}{2(1-\rho_0)}\right](1-\rho_0)^{-1}.$$

Доказательство.

$$\sum_{n\geq 1}\int_{x_1>0} B_0(n,x_1)\,dx_1=$$

$$=\sum_{n\geq 1}\int_{x_1>0} P\{\varsigma_0>x_1,\|e_0(x_1-0)\|\geq n\}\,dx_1=\sum_{n\geq 1}\int_{x_1>0} nP\{\varsigma_0>x_1,\|e_0(x_1-0)\|=$$

$$=n\}\,dx_1=\sum_{n\geq 1}n\int_{x_1>0} P\{\varsigma_0>x_1,\|e_0(x_1-0)\|=n\}\,dx_1.$$

Согласно предельной теореме для регенерирующих процессов [1, 2]

$$\int_{x_1>0} P\{\varsigma_0>x_1,\|e_0(x_1-0)\|=n\}\,dx_1=\frac{1}{\lambda(0)(1-\rho_0)}\,p_n,$$

где p_n — стационарная вероятность того, что в РО комплекса $\mathrm{N}_{\lambda(0),G}$ находятся ровно n требований. Из двух последних равенств, формулы Литтла [2] и выражения для математического ожидания стационарного времени пребывания в однолинейном РО с дисциплиной обслуживания в порядке поступления требований [3] следует, что

$$\sum_{n\geq 1}\int_{x_1>0} B_0(n,x_1)\,dx_1=\sum_{n\geq 1}n\int_{x_1>0} P\{\varsigma_0>x_1,\|e_0(x_1-0)\|=n\}\,dx_1=$$

$$=\sum_{n\geq 1}np_n\,\frac{1}{\lambda(0)(1-\rho_0)}=\left[m_1+\frac{\lambda(0)\,m_2}{2(1-\rho_0)}\right](1-\rho_0)^{-1}.$$

Лемма 22 доказана.

Лемма 23. Пусть $\rho<1$ и существует конечный момент $m_s<\infty$. Тогда при $N\to\infty$

$$q_c(\pi)\sim\frac{\lambda(\pi)}{N^s\lambda(0)(1-\rho_0)}\left[\begin{array}{l}\lambda(0)\displaystyle\int_{u\geq 0}dH(u)\int_{t>u}\frac{(t-u)^{s-1}}{(s-1)!}\,\overline{G}(t)\,dt+\\ +\displaystyle\int_{u\geq 0}dH(u)\int_{t>u}\frac{(t-u)^{s-2}}{(s-2)!}\,\overline{G}(t)\,dt\left[1+\frac{\lambda^2(0)\,m_2}{2(1-\rho_0)}\right]\end{array}\right].$$

Доказательство. Из леммы 4 следует

$$q_c(\pi)=q_{0c}(\pi)+q_{1c}(\pi)+q_{2c}(\pi). \tag{46}$$

Из лемм 1, 2 и 3 соответственно следуют равенства

$$q_{0c}(\pi)=\frac{\lambda(\pi)}{\lambda(0)N^s}J_{0,N}\,,\;\; q_{1c}(\pi)=\frac{\lambda(\pi)}{N^s}J_{1,N}\,,\;\; q_{2c}(\pi)=\frac{\lambda(\pi)}{N^s}J_{0,N}J_{2,N}\,. \quad (47)$$

Из (46) и (47) следует

$$q_c(\pi)=\frac{\lambda(\pi)}{N^s}\left[\frac{J_{0,N}}{\lambda(0)}+J_{1,N}+J_{0,N}J_{2,N}\right]. \quad (48)$$

Из лемм 6, 11, 12, 21, 22 следует, что при $N\to\infty$

$$J_{0,N}\to\int\limits_{u\ge 0}dH(u)\int\limits_{t>u}\frac{(t-u)^{s-2}}{(s-2)!}\overline{G}(t)\,dt, \quad (49)$$

$$J_{1,N}\to\frac{1}{(1-\rho_0)}\int\limits_{u\ge 0}dH(u)\int\limits_{t>u}\frac{(t-u)^{s-1}}{(s-1)!}\overline{G}(t)\,dt, \quad (50)$$

$$J_{2,N}\to\left[m_1+\frac{\lambda(0)\,m_2}{2(1-\rho_0)}\right](1-\rho_0)^{-1}. \quad (51)$$

Из (48)—(51) и арифметических свойств пределов следует, что при $N\to\infty$

$$q_c(\pi)\sim\frac{\lambda(\pi)}{N^s}\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{\lambda(0)}\displaystyle\int\limits_{u\ge 0}dH(u)\int\limits_{t>u}\frac{(t-u)^{s-2}}{(s-2)!}\overline{G}(t)\,dt+\\ +\dfrac{1}{(1-\rho_0)}\displaystyle\int\limits_{u\ge 0}dH(u)\int\limits_{t>u}\frac{(t-u)^{s-1}}{(s-1)!}\overline{G}(t)\,dt+\\ +\displaystyle\int\limits_{u\ge 0}dH(u)\int\limits_{t>u}\frac{(t-u)^{s-2}}{(s-2)!}\overline{G}(t)\,dt\left[m_1+\frac{\lambda(0)\,m_2}{2(1-\rho_0)}\right](1-\rho_0)^{-1}\end{array}\right]=$$

$$=\frac{\lambda(\pi)}{N^s\lambda(0)(1-\rho_0)}\left[\begin{array}{l}\lambda(0)\displaystyle\int\limits_{u\ge 0}dH(u)\int\limits_{t>u}\frac{(t-u)^{s-1}}{(s-1)!}\overline{G}(t)\,dt+\\ +\displaystyle\int\limits_{u\ge 0}dH(u)\int\limits_{t>u}\frac{(t-u)^{s-2}}{(s-2)!}\overline{G}(t)\,dt\left[1+\frac{\lambda^2(0)\,m_2}{2(1-\rho_0)}\right]\end{array}\right].$$

Лемма 23 доказана.

Обозначим $q_{1\text{нс}}$ вероятность отказа комплекса на периоде регенерации в результате отказа его первой СВС по неслабомонотонному минимальному пути, т. е. состояние комплекса от начала периода регенерации до момента его первого на этом периоде отказа, происходящего в результате отказа его первой СВС, проходит путь, который не является слабомонотонным минимальным.

Лемма 24. Пусть $\rho<1$ и существует конечный момент $m_{s+1}<\infty$. Тогда при $N\to\infty$

$$q_{1\,\text{нс}} = O\left(N^{-(s+1)}\right).$$

Доказательство. Пусть $Q_{k,l}$ — вероятность того, что на периоде регенерации откажут не менее l требований из первых k СВС комплекса. Из определения следует, что $q_{1\,\text{нс}} \le Q_{1,s+1}$. Согласно лемме 13 из работы [4] при $N\to\infty$

$$Q_{1,s+1} = O\left(N^{-(s+1)}\right).$$

Из двух последних соотношений следует, что при $N\to\infty$

$$q_{1\,\text{нс}} = O\left(N^{-(s+1)}\right).$$

Лемма 24 доказана.

Обозначим q вероятность отказа комплекса на периоде регенерации, q_1 — вероятность того, что первый отказ комплекса на периоде регенерации произойдет в результате отказа первой СВС, и q_{1c} — вероятность того, что первый отказ комплекса на периоде регенерации произойдет по слабомонотонному минимальному пути в результате отказа первой СВС.

Лемма 25. Пусть $\rho<1$ и существует конечный момент $m_{s+1}<\infty$. Тогда при $N\to\infty$

$$q_1 \sim \frac{\sum\limits_{\pi\in\Pi_0^1}\lambda(\pi)}{N^s\lambda(0)(1-\rho_0)}\left[\begin{array}{l}\lambda(0)\int\limits_{u\ge 0} dH(u)\int\limits_{t>u}\dfrac{(t-u)^{s-1}}{(s-1)!}\,\overline{G}(t)\,dt+\\ +\int\limits_{u\ge 0} dH(u)\int\limits_{t>u}\dfrac{(t-u)^{s-2}}{(s-2)!}\,\overline{G}(t)\,dt\left[1+\dfrac{\lambda^2(0)\,m_2}{2(1-\rho_0)}\right]\end{array}\right].$$

Доказательство. Отказ комплекса на периоде регенерации в результате отказа первой СВС может произойти либо по слабомонотонному минимальному пути (состояние первой СВС до момента отказа проходит монотонный минимальный путь) либо по пути, не являющемуся слабомонотонным минимальным (состояние первой СВС проходит путь, не являющийся монотонным минимальным). Отсюда следует справедливость равенства $q_1 = q_{1\text{c}} + q_{1\,\text{нс}}$. По определению

$$q_{1\text{c}} = \sum_{\pi\in\Pi_0^1} q_{\text{c}}(\pi).$$

Из двух последних равенств и лемм 23, 24 следует

$$q_1 \sim q_{1c} \sim \frac{\sum\limits_{\pi\in\Pi_0^1}\lambda(\pi)}{N^s\lambda(0)(1-\rho_0)}\left[\begin{array}{l}\lambda(0)\int\limits_{u\ge 0} dH(u)\int\limits_{t>u}\frac{(t-u)^{s-1}}{(s-1)!}\overline{G}(t)\,dt+\\ +\int\limits_{u\ge 0} dH(u)\int\limits_{t>u}\frac{(t-u)^{s-2}}{(s-2)!}\overline{G}(t)\,dt\left[1+\frac{\lambda^2(0)\,m_2}{2(1-\rho_0)}\right]\end{array}\right].$$

Лемма 25 доказана.

Лемма 26. Пусть $\rho<1$ и существует конечный момент $m_{s+1}<\infty$. Тогда при $N\to\infty$

$$q \sim \sum_{\pi\in\Pi_0^1}\frac{\lambda(\pi)}{N^{s-1}}\left[\begin{array}{l}\lambda(0)\int\limits_{u\ge 0} dH(u)\int\limits_{t>u}\frac{(t-u)^{s-1}}{(s-1)!}\overline{G}(t)\,dt+\\ +\int\limits_{u\ge 0} dH(u)\int\limits_{t>u}\frac{(t-u)^{s-2}}{(s-2)!}\overline{G}(t)\,dt\left[1+\frac{\lambda^2(0)\,m_2}{2(1-\rho_0)}\right]\end{array}\right].$$

Доказательство. Обозначим q_k вероятность того, что первый отказ комплекса на периоде регенерации произойдет в результате отказа *k*-й СВС. Вследствие однотипности СВС комплекса согласно сделанным определениям эти вероятности для различных СВС совпадают: $q_1 = q_2 = \ldots = q_N$. Отсюда и из леммы 25 получим при $N\to\infty$

$$q = q_1 + q_2 + \ldots + q_N = Nq_1 \sim$$

$$\sim \frac{\sum\limits_{\pi\in\Pi_0^1}\lambda(\pi)}{N^{s-1}\lambda(0)(1-\rho_0)}\left[\begin{array}{l}\lambda(0)\int\limits_{u\ge 0} dH(u)\int\limits_{t>u}\frac{(t-u)^{s-1}}{(s-1)!}\overline{G}(t)\,dt+\\ +\int\limits_{u\ge 0} dH(u)\int\limits_{t>u}\frac{(t-u)^{s-2}}{(s-2)!}\overline{G}(t)\,dt\left[1+\frac{\lambda^2(0)m_2}{2(1-\rho_0)}\right]\end{array}\right].$$

Лемма 26 доказана.

Теорема 1. Пусть $\rho<1$ и существует конечный момент $m_{s+1}<\infty$. Тогда при $N\to\infty$

$$P(\Lambda\tau > x)\to\exp(-x),$$

где

$$\Lambda = \frac{\sum\limits_{\pi \in \Pi_0^1} \lambda(\pi)}{N^{s-1}} \left[\begin{array}{l} \lambda(0) \int\limits_{u \ge 0} dH(u) \int\limits_{t > u} \dfrac{(t-u)^{s-1}}{(s-1)!} \overline{G}(t)\, dt + \\ + \int\limits_{u \ge 0} dH(u) \int\limits_{t > u} \dfrac{(t-u)^{s-2}}{(s-2)!} \overline{G}(t)\, dt \left[1 + \dfrac{\lambda^2(0) m_2}{2(1-\rho_0)} \right] \end{array} \right].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условий леммы 26 и согласно теореме 5 из работы [1] следует, что при $N \to \infty$

$$r^{(1)} \sim r_0^{(1)} = T_{\lambda(0)} = \frac{1}{\lambda(0)(1-\rho_0)}, \quad r^{(2)} \sim r_0^{(2)}. \tag{52}$$

Из леммы 26 при $N \to \infty$ следует

$$q \sim CN^{-s+1}, \tag{53}$$

где

$$C = \frac{\sum\limits_{\pi \in \Pi_0^1} \lambda(\pi)}{\lambda(0)(1-\rho_0)} \left[\begin{array}{l} \lambda(0) \int\limits_{u \ge 0} dH(u) \int\limits_{t > u} \dfrac{(t-u)^{s-1}}{(s-1)!} \overline{G}(t)\, dt + \\ + \int\limits_{u \ge 0} dH(u) \int\limits_{t > u} \dfrac{(t-u)^{s-2}}{(s-2)!} \overline{G}(t)\, dt \left[1 + \dfrac{\lambda^2(0) m_2}{2(1-\rho_0)} \right] \end{array} \right].$$

Из теоремы 2 [5] следует, что при $\alpha_0 = \dfrac{r^{(2)}}{[r^{(1)}]^2} q \to 0$

$$P\left\{ \frac{q\tau}{r^{(1)}} > x \right\} \to \exp(-x) .$$

Отсюда и из (52), (53) следует, что при $N \to \infty$

$$P(\Lambda\tau > x) \to \exp(-x),$$

где

$$\Lambda = \frac{\sum\limits_{\pi \in \Pi_0^1} \lambda(\pi)}{N^{s-1}} \left[\begin{array}{l} \lambda(0) \int\limits_{u \ge 0} dH(u) \int\limits_{t > u} \dfrac{(t-u)^{s-1}}{(s-1)!} \overline{G}(t)\, dt + \\ + \int\limits_{u \ge 0} dH(u) \int\limits_{t > u} \dfrac{(t-u)^{s-2}}{(s-2)!} \overline{G}(t)\, dt \left[1 + \dfrac{\lambda^2(0) m_2}{2(1-\rho_0)} \right] \end{array} \right].$$

Теорема 1 доказана.

The asymptotic fault-free lifetime distribution is found for the set of complex restorable systems (CRS) with the time reserve and with the return of restored elements into the systems with the minimum internal reserve from the moment when the correct operation of all elements of all CRS is set. The study was carried out for the CRS sets with Markovian flow of element faults, arbitrary service time distribution function of CRS elements, the number of which increases inversely proportional to the fault rate, so that the total load of the request processing system is limited from above by the value less than one.

1. *Климов Г. П.* Стохастические системы обслуживания. — М. : Наука, 1967. — 244 с.
2. *Little J. D. C.* A Proof of the Queueing Formula $L = \lambda W$ // Operations Research. — 1961. — **9**. —P. 383—387.
3. *Саати Т. Л.* Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. — М. : Сов. Радио. — 1971. — 520 с.
4. *Макаричев А. В.* Надежность комплексов сложных восстанавливаемых систем// Электрон. моделирование. — 2004. — **26**, № 2. — С. 57—77.
5. *Соловьев А.Д.* Оценка надежности восстанавливаемых систем. — М. : Знание, 1987. — 60 с.

Поступила 17.03.08

МАКАРИЧЕВ Александр Владимирович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики Харьковского государственного автомобильно-дорожного технического университета. В 1981 г. окончил Московский госуниверситет. Область научных исследований – теория вероятностей и математическая статистика и их применение, теория массового обслуживания, математическая теория надежности, теория оптимизации характеристик случайных процессов, расширяющиеся комплексы сложных восстанавливаемых систем.