УДК 519.6

С. В. Ковбасюк, М. Ю. Ракушев, кандидаты техн. наук
Житомирский военный ин-т им. С.П. Королева
Национального авиационного университета
(Украина, 10004, Житомир, проспект Мира, 22,
тел.(0412) 33-14-35, E-mail: androidz@pisem.net)

Метод решения вариационного уравнения для задачи Коши на основе дифференциальных преобразований

(Статью представила канд. техн. наук Э.П. Семагина)

Предложен метод расчета матрицы частных производных от текущего решения обыкновенного дифференциального уравнения по начальным условиям и параметрам, входящим в его правую часть, на основе дифференциальных преобразований. Отличительной особенностью метода является комбинированная схема использования одно- и двухмерных дифференциальных преобразований соответственно при прямом и обратном преобразованиях.

Запропоновано метод розрахунку матриці часткових похідних від поточного розв'язку звичайного диференціального рівняння за початковими умовами і параметрами, які входять до його правої частини, на основі диференціальних перетворень. Особливість методу полягає у комбінованій схемі використання одно- та двовимірних диференціальних перетворень відповідно при прямому та оберненому перетворенні.

К л ю ч е в ы е с л о в а: задача Коши, матрица частных производных, вариационное уравнение, многомерные дифференциальные преобразования.

При численном решении задач, связанных с анализом сложных динамических систем, в случаях, когда математическая модель такой системы представлена задачей Коши для обыкновенного дифференциального уравнения, часто возникает необходимость рассчитывать матрицу частных производных от текущего решения дифференциального уравнения по начальным условиям и (или) параметрам, входящим в его правую часть. Такая необходимость возникает, например, при расчете и анализе точностных характеристик динамической системы или при определении параметров ее модели по данным проведенных измерений [1].

Наилучшим способом численного расчета такой матрицы частных производных по критерию точность—вычислительная сложность является метод вариаций [1]. В этом методе расчет матрицы частных производных основан на интегрировании вариационного дифференциального уравнения для исходной задачи Коши. При этом вариационное уравнение определяется из дифференциального уравнения исходной задачи Коши путем аналитического дифференцирования. Однако провести такую аналитическую операцию, при сложной правой части дифференциального уравнения, методически сложно.

Основой формализованного математического аппарата дифференциальных преобразований является операция численно-аналитического дифференцирования, реализованная в виде соответствующих рекуррентных алгебраических зависимостей [2, 3]. Это позволяет с любой наперед заданной точностью методически просто проводить операцию дифференцирования любого порядка и для любой сложной функции, что является основной трудностью при реализации метода вариаций.

Метод вариаций для расчета матрицы частных производных от решения обыкновенного дифференциального уравнения по начальным условиям и параметрам, входящим в его правую часть, – это совместное интегрирование векторного дифференциального уравнения (решение исходной задачи Коши)

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y, \lambda), \;\; t > t_0, \;\; y(t_0) = y_0, \tag{1}$$

и матричного вариационного (по отношению к (1)) дифференциального уравнения [1]

$$\frac{d}{dt}\delta y = \phi(t, y, \lambda), \;\; t > t_0, \;\; \delta y(t_0) = \left\| E_n \quad 0_{n\times m} \right\|, \tag{2}$$

где y — вектор-функция (решение исходной задачи Коши) размером n; t — независимая переменная; y_0 — вектор начальных условий размером n; λ — вектор параметров размером m; $f(t, y, \lambda)$ — заданная вектор-функция, непрерывно дифференцируемая по y и λ , размером n; $\delta y = \left\| \frac{\partial y}{\partial y_0} \quad \frac{\partial y}{\partial \lambda_0} \right\|$ — искомая блочная матрица частных производных по начальным условиям y_0 и параметрам λ размером $n \times (n+m)$; $\phi(t, y, \lambda) = \left\| \frac{\partial f(t, y, \lambda)}{\partial y_0} \quad \frac{\partial f(t, y, \lambda)}{\partial \lambda} \right\|$ — блочная матрица, получаемая в результате операции аналитического дифференцирования правой части (1) по векторам y_0 и λ размером $n \times (n+m)$; E_n — единичная матрица размером $n \times n$; $0_{n\times m}$ — нулевая матрица размером $n \times m$.

Для удобства последующих выкладок введем в рассмотрение блочный вектор

$$q_0^T = \left\| y_0^T \; \lambda^T \right\|.$$

Тогда

$$\delta y = \frac{\partial y}{\partial q}, \phi(t, y, \lambda) = \frac{\partial f(t, y, \lambda)}{\partial q}.$$

Мерность применяемых дифференциальных преобразований определяется количеством одновременно рассматриваемых независимых переменных. В задаче расчета искомой матрицы частных производных их общее количество равно $n+m+1$ (переменная t и $n + m$ составляющих вектора q). Однако если проводить расчет искомой матрицы по столбцам (аналогично традиционному методу вариаций), то переменные целесообразно рассматривать попарно (переменная t и поочередно каждая из компонент вектора q). Вследствие этого трехмерное дифференциальное преобразование распадается на два простых двухмерных (t и поочередно каждая из компонент вектора q).

Двухмерными дифференциальными преобразованиями называют функциональные преобразования вида (без потери общности дальнейших выкладок рассмотрим дифференциально-тейлоровкие (ДТ) преобразования) [3]:

$$Z(k_1, k_2) = \frac{H_1^{k_1} H_2^{k_2}}{k_1! k_2!} \left[\frac{\partial^{k_1+k_2} z(w_1, w_2)}{\partial w_1^{k_1} \partial w_2^{k_2}} \right]_{w_1^*, w_2^*}, \tag{3}$$

$$z(w_1, w_2) = \sum_{k_2=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^{\infty} \left[\frac{(w_1^* - w_1)^{k_1} (w_2^* - w_2)^{k_2}}{H_1^{k_1} H_2^{k_2}} Z(k_1, k_2) \right], \tag{4}$$

где w_1, w_2 — аргументы, по которым проводится преобразование; w_1^*, w_2^* — значение аргументов, при котором проводится преобразование; H_1 и H_2 — отрезки аргументов, на которых функция $z(w_1, w_2)$ представляется рядом Тейлора соответственно по w_1 и w_2; k_1, k_2 — целочисленные аргументы, $k_{1,2} = 0, 1, \ldots$; $Z(k_1, k_2)$ — дискретная функция по аргументам k_1, k_2.

Выражение (3) представляет собой прямое преобразование, позволяющее по оригиналу $z(w_1, w_2)$ найти изображение $Z(k_1, k_2)$. Обратное преобразование, восстанавливающее оригинал $z(w_1, w_2)$ в виде отрезка двухмерного ряда Тейлора, определяется выражением (4). ДТ-изображение $Z(k_1, k_2)$ принято называть Т-спектром, а значение функции $Z(k_1, k_2)$ при конкретных значениях аргументов k_1, k_2 — Т-дискретами [3].

Определим двухмерный Т-спектр $Y(k_t, k_q)$ функции $y(t, q) = y(t, y_0, \lambda)$ при $k_t = 0, 1, \ldots$ и $k_q = 0, 1$. Для этого применим прямое двухмерное ДТ-преобразование (3) к исходной задаче Коши (1) [3]:

$$Y(k_t + 1, k_q) = \frac{H_t}{k_t + 1} F[T(k_t, k_q), Y(k_t, k_q), \Lambda(k_t, k_q)], \tag{5}$$

$$Y(0,0)=y_0,\ Y(0,1)=H_q\|E_n \quad 0_{n\times m}\|, \tag{6}$$

$$T(k_t,k_q)=\frac{H_t^{k_t}H_q^{k_q}}{k_t!k_q!}\left[\frac{\partial^{k_t+k_q}t}{\partial t^{k_t}\partial q^{k_q}}\right]_{t_0,q_0}=t_0\text{ъ}(k_t,k_q)+H_t\text{ъ}(k_t-1,k_q), \tag{7}$$

$$\Lambda(k_t,k_q)=\frac{H_t^{k_t}H_q^{k_q}}{k_t!k_q!}\left[\frac{\partial^{k_t+k_q}\lambda}{\partial t^{k_t}\partial q^{k_q}}\right]_{t_0,q_0}=\lambda\text{ъ}(k_t,k_q)+H_q\|0_{m\times n}\ E_m\|\text{ъ}(k_t,k_q-1) \tag{8}$$

(Т-спектр (6) получаем из начальных условий для (1) и (2)). Здесь $Y(k_t,k_q)$, $F[\,]$, $T(k_t,k_q)$, $\Lambda(k_t,k_q)$ — соответственно двухмерные Т-спектры функции $y(t,q)$, правой части исходной задачи Коши (1), переменной t (полученной из (3) для оригинала $z(t,\lambda)=t$) и параметра λ (полученного из (3) для оригинала $z(t,\lambda)=\lambda$); H_t и H_q — отрезки аргументов соответственно по t и по компонентам вектора q; $\text{ъ}(k_t-a,k_q-b)$ — двухмерная тейлоровская единица [3],

$$\text{ъ}(k_t-a,k_q-b)=\begin{cases}1 \text{ при } k_t=a \text{ и } k_q=b,\\ 0 \text{ при } k_t\neq a \text{ или } k_q\neq b;\end{cases}$$

E_m — единичная матрица размером $m\times m$; $0_{m\times n}$ — нулевая матрица размером $m\times n$.

Обратное двухмерное ДТ-преобразование (4) выполним для всего интервала приращений по переменной $t\in[t_0,t_0+H_t]$ при значениях приращений по компонентам вектора q, равных H_q, с учетом того, что в (5) Т-спектр $Y(k_t,k_q)$ вычислялся только для $k_q=0$, 1:

$$y(t,q=q_0+H_q)\approx\sum_{k_q=0}^{1}\sum_{k_t=0}^{\infty}\frac{(t-t_0)^{k_t}}{H_t^{k_t}k_t!}Y(k_t,k_q)\Rightarrow \tag{9}$$

$$\Rightarrow y(t,q=q_0+H_q)\approx\sum_{k_t=0}^{\infty}\frac{(t-t_0)^{k_t}}{H^{k_t}k_t!}Y(k_t,k_q=0)+\sum_{k_t=0}^{\infty}\frac{(t-t_0)^{k_t}}{H^{k_t}k_t!}Y(k_t,k_q=1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t,q=q_0+H_q)\approx\sum_{k_t=0}^{\infty}\frac{(t-t_0)^{k_t}}{k_t!}\frac{\partial^{k_t}y(t,q=q_0)}{\partial t^{k_t}}+$$

$$+H_q\sum_{k_t=0}^{\infty}\frac{(t-t_0)^{k_t}}{k_t!}\frac{\partial^{k_t+1}y(t,q=q_0)}{\partial t^{k_t}\partial q}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t, q=q_0+H_q) \approx y(t, q=q_0)+$$
$$+\frac{H_q}{1!}\frac{\partial y(t, q=q_0)}{\partial q}=y(t)+H_q\delta y(t). \qquad (10)$$

Для получения искомой матрицы частных производных необходимо продифференцировать (10) по H_q. Эту операцию, исходя из тождественности (9) и (10), запишем в виде

$$\delta y(t)=Д_{k_q}\left\{\sum_{k_q=0}^{1}\sum_{k_t=0}^{\infty}\frac{(t-t_0)^{k_t}}{H_t^{k_t}k_t!}Y(k_t,\ k_q)\right\}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \delta y(t)=\frac{1}{H_q}\sum_{k_t=0}^{\infty}\frac{(t-t_0)^{k_t}}{H_t^{k_t}k_t!}Y(k_t, k_q+1), \qquad (11)$$

где $Д_{k_q}\{\}$ — операция дифференцирования в области изображений [3]. Вследствие того что введенный в (6) и (8) отрезок аргумента H_q при дифференцировании по k_q в (11) сокращается (см. (10) и (11)), при расчетах можно положить

$$H_q=1. \qquad (12)$$

Таким образом, метод решения вариационного уравнения для задачи Коши на основе дифференциальных преобразований с учетом (5)—(8), (11), (12) представим в следующем виде.

Прямое преобразование — последовательное, сначала при $k_q=0$ для $k_t=0,\ 1,\ ...,$ затем при $k_q=1$ для $k_t=0,\ 1,\ ...,$ определение двухмерного Т-спектра $Y(k_t, k_q)$:

$$Y(0,0)=y_0,\ \ Y(0,1)=(E_n\ 0_{n\times m}),$$
$$Y(k_t+1, k_q)=\frac{H_1}{k_t+1}F[T(k_t, k_q),\ Y(k_t, k_q), \Lambda(k_t, k_q)], \qquad (13)$$
$$T(k_t, k_q)=t_0ъ(k_t, k_q)+H_tъ(k_t-1, k_q),$$
$$\Lambda(k_t, k_q)=\lambdaъ(k_t, k_q)+\|0_{m\times n}\ E_m\|ъ(k_t, k_q-1);$$

обратное преобразование:

$$y(t)=\sum_{k_t=0}^{\infty}\left(\frac{t-t_0}{H_t}\right)^{k_t}Y(k_t, k_q=0),$$
$$\delta y(t)=\sum_{k_t=0}^{\infty}\left(\frac{t-t_0}{H_t}\right)^{k_t}Y(k_t, k_q=1). \qquad (14)$$

Искомую матрицу частных производных δy определяем последовательно для каждого столбца. При этом Т-спектр $Y(k_t,0)$ рассчитываем только один раз, а Т-спектр $Y(k_t,1)$ пересчитываем для каждого столбца δy при соответствующих столбцах из $Y(0,1)=(E_n\ 0_{n\times m})$ и $\Lambda(k_t,k_q)$.

Для исследования сходимости предлагаемого метода (13), (14) рассмотрим расчет искомой матрицы частных производных методом вариаций (1), (2) на основе одномерных (только по переменной t) ДТ-преобразований (которые получаем из (3), (4) подстановкой $k_2=0$):

прямое преобразование —

$$Y(k_t+1)=\frac{H_t}{k_t+1}F(k_t),\ Y(0)=y_0,$$
$$\delta Y(k_t+1)=\frac{H_t}{k_t+1}\Phi(k_t),\ \ \delta Y(0)=\|E_n\quad 0_{n\times m}\|, \tag{15}$$

где $Y(k_t)$, $\delta Y(k_t)$, $F(k_t)$, $\Phi(k_t)$ — одномерные Т-спектры функций соответственно $y(t)$, $\delta y(t)$, $f(t,y,\lambda)$, $\phi(t,y,\lambda)$;

обратное преобразование —

$$y(t)=\sum_{k_t=0}^{\infty}\left(\frac{t-t_0}{H_t}\right)^{k_t}Y(k_t),$$
$$\delta y(t)=\sum_{k_t=0}^{\infty}\left(\frac{t-t_0}{H_t}\right)^{k_t}\delta Y(k_t). \tag{16}$$

Выражения (14) и (16) тождественны, так как с учетом (3)

$$Y(k_t,k_q=0)=Y(k_t),\ \ Y(k_t,k_q=1)=\delta Y(k_t).$$

Таким образом, предлагаемый метод решения (14), (15) является не чем иным, как методом вариаций (1), (2), в котором операция определения вариационного уравнения от исходной задачи Коши (2) проводится численно-аналитически в области Т-спектров. С учетом этого все характеристики по сходимости предлагаемого метода (14), (15) будут совпадать с такими же характеристиками классического метода вариаций (1), (2) на основе одномерных ДТ-преобразований (15), (16). Вследствие изложенного сходимость предлагаемого метода абсолютно не зависит от величины H_q. Вопросы сходимости вычислительных схем решения обыкновенных дифференциальных уравнений на основе одномерных ДТ-преобразований детально рассмотрены в [4].

Пример. Необходимо рассчитать матрицу частных производных от решения задачи Коши по начальным условиям и параметрам, входящим в правую часть дифференциального уравнения $\delta y = \left(\dfrac{\partial y}{\partial y_0} \quad \dfrac{\partial y}{\partial \lambda} \right)$, на момент времени $t = 0,85$ для следующей задачи Коши:

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{y}{t+\lambda}}, \ t > 0, \ y_0 = 10, \ \lambda = 1. \tag{17}$$

Уравнение (17) является уравнением Лагранжа и имеет аналитическое решение [6]. Для расчета δy методом вариаций (1), (2) необходимо предварительно путем аналитического дифференцирования найти из (17) вариационные дифференциальные уравнения

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial y}{\partial y_0} = \frac{1}{2\sqrt{y\,(t+\lambda)}}\frac{\partial y}{\partial y_0}, \ t > 0, \ \frac{\partial y(t=0)}{\partial y_0} = 1, \tag{18}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial y}{\partial \lambda} = \frac{1}{2\sqrt{y\,(t+\lambda)}}\frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{1}{2(t+\lambda)}\sqrt{\frac{y}{t+\lambda}}, \ t > 0, \ \frac{\partial y(t=0)}{\partial \lambda} = 0. \tag{19}$$

Искомую матрицу частных производных рассчитываем совместным интегрированием (17) — (19). Проведем такую операцию одномерными ДТ-преобразованиями:

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{y}{t+\lambda}} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f, \\ f_1 = \sqrt{f_2}, \ f_2 = \sqrt{\dfrac{y}{t+\lambda}}, \end{cases} \Rightarrow \tag{20}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} H_t = 0{,}85, \ t_0 = 0, Y(0) = 10, Y(k_t+1) = \dfrac{H_t}{k_t+1} F_1(k_t), \\ F_1(k_t) * F_1(k_t) = F_2(k_t), \ F_2(k_t) * (T(k_t) + \lambda ъ(k_t)) = Y(k_t), \\ T(k_t) = t_0 ъ(k_t) + H_t ъ(k_t - 1), \end{cases} \tag{21}$$

$$y\,(t = H_t = 0{,}85) = \sum_{k_t=0}^{k_{\max 0}} Y(k_t); \tag{22}$$

$$\frac{d}{dt}\delta y_{y_0} = \frac{1}{2\sqrt{y\,(t+\lambda)}}\delta y_{y_0} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\delta y_{y_0} = \phi_1 \delta y_{y_0}, \\ \phi_1 = \dfrac{1}{2\phi_2}, \ \phi_2 = \sqrt{\phi_3}, \phi_3 = y\,(t+\lambda), \end{cases} \Rightarrow \tag{23}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \delta Y_{y_0}(0)=1,\ \delta Y_{y_0}(k_t+1)=\dfrac{H_t}{k_t+1}\Phi_1(k_t)*\delta Y_{y_0}(k_t), \\ \Phi_1(k_t)*\Phi_2(k_t)=\dfrac{1}{2}ъ(k_t),\ \Phi_2(k_t)*\Phi_2(k_t)=\Phi_3(k_t), \\ \Phi_3(k_t)=Y(k_t)*(T(k_t)+\lambda ъ(k_t)), \end{cases} \tag{24}$$

$$\frac{\partial y}{\partial y_0}(t=H_t=0,85)=\sum_{k_t=0}^{k_{\max 1 y_0}}\delta Y_{y_0}(k_t); \tag{25}$$

$$\frac{d}{dt}\delta y_\lambda=\frac{1}{2\sqrt{y(t+\lambda)}}\delta y_\lambda-\frac{1}{2(t+\lambda)}\sqrt{\frac{y}{t+\lambda}}\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\delta y_\lambda=\phi_1\delta y_\lambda-\phi_4 f, \\ \phi_1=\dfrac{1}{2\phi_2},\ \phi_2=\sqrt{\phi_3}, \\ \phi_3=y(t+\lambda),\ \phi_4=\dfrac{1}{2(t+\lambda)}, \end{cases} \Rightarrow \tag{26}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \delta Y_\lambda(0)=1,\ \delta Y_\lambda(k_t+1)=\dfrac{H_t}{k_t+1}(\Phi_1(k_t)*\delta Y_\lambda(k_t)-\Phi_4(k_t)*F_1(k_t)), \\ \Phi_1(k_t)*\Phi_2(k_t)=\dfrac{1}{2}ъ(k_t),\ \Phi_2(k_t)*\Phi_2(k_t)=\Phi_3(k_t), \\ \Phi_3(k_t)=Y(k_t)*(T(k_t)+\lambda ъ(k_t)),\ \Phi_4(k_t)*(T(k_t)+\lambda ъ(k_t))=ъ(k_t), \end{cases} \tag{27}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda}(t=H_t=0,85)=\sum_{k_t=0}^{k_{\max 1\lambda}}\delta Y_\lambda(k_t); \tag{28}$$

Таблица 1

Метод расчета	Т-спектр	Значения	
		0	1
Одномерные ДТ-преобразования на основе (21), (24), (27)	$Y(k_t)$	10	2,687936
	$\delta Y_{y_0}(k_t)$	1	0,134397
	$\delta Y_\lambda(k_t)$	0	–1,343968
Разработанный на основе (29)	$Y(k_t, k_q=0)$	10	2,687936
	$Y(k_t, k_q=1)$ для $\partial y/\partial y_0$	1	0,134397
	$Y(k_t, k_q=1)$ для $\partial y/\partial \lambda$	0	–1,343968

где $f_{1,2,3}$ — дополнительные обозначения; * — операция одномерной алгебраической свертки [3]; $k_{\max 0}$ — максимальный номер учитываемой при восстановлении Т-дискреты; $\delta y_{y_0} = \frac{\partial y}{\partial y_0}$; $\delta y_\lambda = \frac{\partial y}{\partial \lambda}$; $\phi_{1,2,3,4}$ — дополнительные обозначения; $k_{\max 1 y_0}$, $k_{\max 1\lambda}$ — максимальный номер учитываемой при восстановлении Т-дискреты.

Проведем расчет искомой матрицы частных производных δy разработанным методом (13), (14). Для этого достаточно записать Т-модель решения исходной задачи Коши на основе одномерных ДТ-преобразований (21), (22), затем заменить в этой Т-модели одномерные ДТ-преобразования на двухмерные и учесть в ней Т-спектр параметра λ (8):

$$H_t = 0{,}85,\ t_0 = 0,\ Y(0,0) = 10,$$

$$Y(0,1) = \begin{cases} 1 & \text{для } \partial y / \partial y_0, \\ 0 & \text{для } \partial y / \partial \lambda, \end{cases}$$

$$Y(k_t+1, k_q) = \frac{H}{k_t+1} F(k_t, k_q), \tag{29}$$

$$F(k_t,k_q) * F(k_t,k_q) = F_2(k_t,k_q), F_2(k_t,k_q) * [T(k_t,k_q) + \Lambda(k_t,k_q)] = Y(k_t,k_q),$$

$$T(k_t,k_q) = t_0 ъ(k_t,k_q) + H_t ъ(k_t-1,k_q),$$

$$\Lambda(k_t,k_q) = \begin{cases} \lambda ъ(k_t,k_q) & \text{для } \partial y/\partial y_0, \\ \lambda ъ(k_t,k_q) + ъ(k_t,k_q-1) & \text{для } \partial y / \partial \lambda, \end{cases}$$

$$y(t = H_t = 0{,}85) = \sum_{k_t=0}^{k_{\max 0}} Y(k_t, 0),$$

$$\delta y(t = H_t = 0{,}85) = \sum_{k_t=0}^{k_{\max 1}} Y(k_t, 1), \tag{30}$$

где * – операция двухмерной алгебраической свертки [3].

Т-спектра при k_t				
2	3	4	5	10
–0,390561 –0,028559 0,676154	0,165989 0,0121384 –0,453354	–0,088181 –0,006448 0,329026	0,052468 0,00384 –0,248238	0,007895 –0,000577 0,076832
–0,390561 –0,028559 0,676154	0,165989 0,0121384 –0,453354	–0,088181 –0,006448 0,329026	0,052468 0,00384 –0,248238	0,007895 –0,000577 0,076832

Искомую матрицу частных производных δy в (32), (33) определяем последовательно для каждого элемента. При этом Т-спектр $Y(k_t, 0)$ рассчитываем только один раз, а Т-спектр $Y(k_t, 1)$ пересчитываем для каждого элемента $\partial y / \partial y_0$ и $\partial y / \partial \lambda$, причем от элемента к элементу изменяются не используемые математические зависимости, а только Т-спектр начальных условий $Y(0,1)$ и Т-спектр параметра λ.

Результаты моделирования для $t = H_t = 0{,}85$ приведены в табл. 1, 2. В табл. 2 в качестве эталона приведены значения, полученные из аналитического решения задачи (17) [6].

Из приведенных данных видно, что результаты расчета искомой матрицы частных производных одномерными ДТ-преобразованиями методом вариаций и разработанным методом совпадают. Таким образом, разработанный метод позволяет в численно-аналитическом виде проводить расчет матрицы частных производных от решения задачи Коши по начальным условиям и параметрам, входящим в правую часть дифференциального уравнения.

Исходя из необходимой точности расчета можно определять различное количество Т-дискрет при $k_q = 0$ для $Y(k_t = 0 \dots k_{\max 0}, 0)$ (расчет y) и при $k_q = 1$ для $Y(k_t = 0 \dots k_{\max 1}, 1)$ (расчет δy). При этом необходимо выполнять условие $k_{\max 0} \geq k_{\max 1}$. Значения $k_{\max 1}$ для расчета различных элементов искомой матрицы частных производных δy также могут быть различными.

Организация припасовывания для вычислительной схемы (29), (30) на основе разработанного метода (14), (15) проводится аналогично одномер-

Таблица 2

Метод расчета	$k_{\max 0}$	y	$k_{\max 1}$	Элементы матрицы частных производных	
				$\partial y / \partial y_0$	$\partial y / \partial \lambda$
Одномерные ДТ-преобразования на основе (22), (25), (28)	5	12,427650	3	1,117975	−1,121168
			5	1,115364	−1,040380
	10	12,404145	5	1,115364	−1,04038
			7	1,114551	−0,999047
			10	1,113645	−0,898354
Разработанный на основе (30)	5	12,427650	3	1,117975	−1,121168
			5	1,115364	−1,040380
	10	12,404145	5	1,115364	−1,04038
			7	1,114551	−0,999047
			10	1,113645	−0,898354
Аналитический	—	12,407475	—	1,113888	−0,932687

ным ДТ-преобразованиям при решении задачи Коши [3—5]. В этом случае значения независимой переменной t и начальных условий $Y(0,0) = y(t)$, $Y(0,1) = \delta y(t)$ должны изменяться при движении по вычислительной сетке, начиная с $t = t_0$. Для расчета можно использовать не только ДТ-преобразования, но и любые другие типы дифференциальных преобразований [3].

Выводы. При расчете разработанным методом (29), (30) используется только исходная задача Коши и вариационное уравнение определяется численно-аналитически в области изображений, а не аналитически, как в классическом методе вариаций, что свидетельствует о математической простоте предлагаемого метода.

Во всех известных подходах к применению дифференциальных преобразований прямое и обратное преобразование проводятся на основе дифференциальных преобразований одинаковой мерности [3, 5]. Отличительной особенностью предлагаемого метода является комбинированная схема использования дифференциальных преобразований различной мерности: двухмерных — для прямого преобразования и одномерных – для обратного преобразования.

Таким образом, в предлагаемом методе в результате замены методически сложного аналитического этапа классического метода вариаций численно-аналитически в области дифференциальных спектров устранен главный недостаток классического метода – методическая сложность реализации.

The method of partial derivative matrix calculation is suggested from the current solution of the ordinary differential equation on its initial conditions and parameters, included into its right-hand side, on the basis of differential transforms. The feature of the method is the combined algorithm of the use of one and two-dimensional differential transforms at direct and reverse transforms, respectively.

1. *Жданюк Б. Ф.* Основы статистической обработки траекторных измерений. — М. : Сов. радио, 1978. — 384 с., ил.
2. *Ковбасюк С. В., Ракушев М. Ю.* Расчет матрицы частных производных от текущих элементов орбиты космического аппарата на основе дифференциальных преобразований // Двойные технологии. — 2004. — № 2. — С. 15—18.
3. *Пухов Г. Е.* Дифференциальные преобразования и математическое моделирование физических процессов. — К. : Наук. думка, 1986. — 159 с.
4. *Коваль Н. В., Семагина Э. П.* Об устойчивости алгоритмов решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений методом дифференциального преобразования // Теоретическая электротехника. — 1985. — Вып. 39. — С. 108—118.
5. *Пухов Г. Е.* Дифференциальные спектры и модели. — К. : Наук. думка, 1990. — 184с.
6. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 2. — М. : Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1972. — 576 с.

Поступила 30.05.07;
после доработки 16.07.08

КОВБАСЮК Сергей Валентинович, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., вед. науч. сотр. научного центра Житомирского военного ин-та им. С.П. Королева Национального авиационного университета. В 1983 г. окончил Житомирское училище радиоэлектроники ПВО, в 1988 г. – Военную инженерную радиотехническую академию ПВО, в 1991 г. – адъюнктуру при Военной инженерной радиотехнической академии ПВО. Область научных исследований – наземные средства космической инфраструктуры Украины.

РАКУШЕВ Михаил Юрьевич, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., ст. науч. сотр. научного центра Житомирского военного ин-та им. С.П. Королева Национального авиационного университета. В 1999 г. окончил Житомирский военный ин-т радиоэлектроники, в 2004 г. — адъюнктуру при Житомирском военном ин-те радиоэлектроники. Область научных исследований – баллистико-навигационное обеспечение управления полетом космических аппаратов, математическое моделирование и дифференциальные преобразования.