УДК 681.14

С. Д. Винничук, д-р техн. наук
Ин-т проблем моделирования
в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины
(Украина, 03164, Киев, ул.Генерала Наумова, 15,
тел.: (044) 4249171, E-mail: s_v@i.com.ua)

Особенности формирования уравнений второго закона Кирхгофа для задач расчета потокораспределения в распределительных системах сжимаемой жидкости

(Статью представила канд. техн. наук Э.П. Семагина)

Предложен подход к формированию зависимостей в уравнениях второго закона Кирхгофа для расчета потокораспределения в гидравлических распределительных системах сжимаемой жидкости, где перепад давления на элементе рассчитывается на основе газодинамических функций и гарантированно может быть найден только в направлении «против потока».

Запропоновано підхід до формування залежностей в рівняннях другого закону Кірхгофа при розрахунках потокорозподілу в гідравлічних розподільчих системах стискуваної рідини, де перепад тиску на елементі розраховується на основі газодинамічних функцій та гарантовано може бути знайдений тільки в напрямку «проти потоку».

Ключевые слова: распределительные системы сжимаемой жидкости, критический режим течения, законы Кирхгофа.

Постановка задачи. При расчетах гидравлических распределительных сетей (ГРС) определяют неизвестные значения расходов сжимаемой жидкости в ветвях (G_i, $i = 1 \div n$) и давлений в узлах (P_j, $j = 1 \div m$) сети, где на каждой из ветвей разница давлений в инцидентных ей узлах является перепадом давления (ΔP_i, $i = 1 \div n$). При этом (в общем виде) перепад давления на ветви — это функция расхода в ней, конструктивных параметров элементов ветви и режимных параметров на ее границах (давление, температура, влагосодержание (для воздуха)). При известных температурах (и влагосодержании для воздуха) число неизвестных окажется равным $n + m$. Относительно таких неизвестных может быть составлено n уравнений, связывающих давления в узлах, инцидентных ветви, с расходом в ветви, а также m линейных уравнений баланса массовых расходов в узлах (согласно закону сохранения массы, что отражено в первом законе Кирхгофа).

При расчетах ГРС несжимаемой жидкости такая система уравнений может быть разделена на две независимые составляющие: система n уравнений относительно неизвестных расходов в ветвях и система m уравнений относительно неизвестных давлений в узлах.

По известным расходам в ветвях и одному из давлений в узле ГРС находят давления во всех других узлах односвязной сети. Поэтому часто задачу расчета потокораспределения в ГРС несжимаемой жидкости рассматривают как задачу определения неизвестных расходов в ветвях. Тогда первая система из n уравнений будет включать m уравнений первого закона Кирхгофа, а также $n-m$ уравнений, получаемых при исключении неизвестных давлений в узлах из соотношений

$$P_{u1i} - P_{u2i} = f_i(G_i), \;\; i = 1 \div n, \tag{1}$$

где P_{u1i}, P_{u2i} — давления в узлах $u1_i, u2_i$, описывающих ветвь i. Каждое из таких $n-m$ уравнений оказывается уравнением второго закона Кирхгофа, а вся система $n-m$ уравнений — системой уравнений второго закона Кирхгофа для множества линейно-независимых контуров графа сети.

Простота записи первых m уравнений первого закона Кирхгофа (все они линейные) позволяет исключить эти уравнения из общей системы и свести задачу расчета расходов в ГРС к поиску $n-m$ контурных расходов методами контурных расходов (МКР), т. е. расходов в ветвях-хордах сети [1]. Для линейных функций $f_i(G_i)$ в соотношениях (1) систему уравнений порядка $n+m$ можно привести к m уравнениям относительно неизвестных давлений в узлах.

Следует заметить, что при расчете потокораспределения в ГРС отдают предпочтение МКР [1, 2] как более точным, поскольку для ГРС характерен большой (иногда до 12 порядков) разброс сопротивлений ветвей. Поэтому будем рассматривать только вопросы, связанные с составлением системы уравнений первого типа, а именно $n-m$ уравнений второго закона Кирхгофа для множества линейно-независимых контуров графа сети для ГРС сжимаемой жидкости.

В ГРС сжимаемой жидкости перепад давлений зависит от уровня давления, поэтому вместо соотношения (1) для ряда случаев может быть записано одно из соотношений:

$$\begin{aligned} P_{u1i} &= f_i(G_i, P_{u2i}), \; i = 1 \div n, \\ P_{u2i} &= f_i(G_i, P_{u1i}), \; i = 1 \div n\,. \end{aligned} \tag{2}$$

При расчете таких ГРС для определения неизвестных расходов в ветвях можно ограничиться составлением системы $n-m$ контурных уравнений второго закона Кирхгофа для множества линейно-независимых контуров

 ISSN 0204–3572. Electronic Modeling. 2008. V. 30. № 6

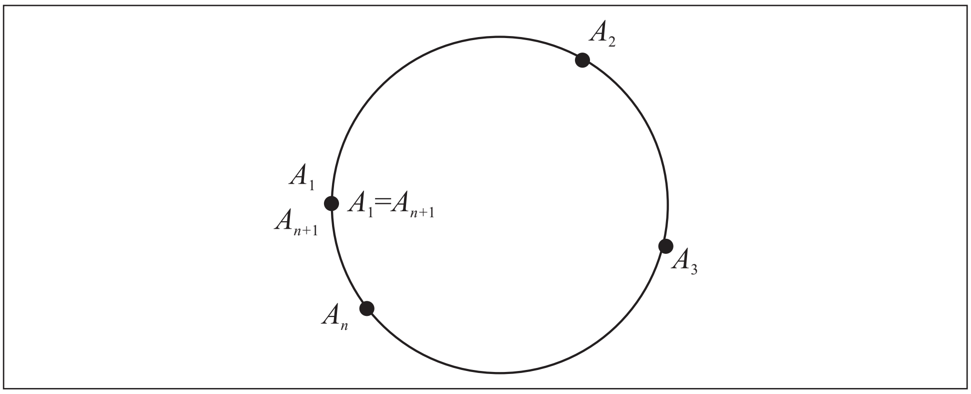

Рис. 1. Схема обхода контура сети

графа сети. Это следует из условия, согласно которому чтобы задать уровень давления, необходимо его задать хотя бы в одном из узлов ГРС, а для односвязного графа с кольцевой структурой от такого узла существует не менее двух путей, соединяющих его с серединой ветви-хорды. Построенная таким способом система контурных уравнений будет обладать следующим свойством: каждый из контуров начинается и заканчивается в узле с известным давлением. Поэтому, начиная с известного значения давления в одном из узлов, согласно соотношениям (2), можно определять давление на элементах путем последовательного расчета вдоль контура, как это схематически изображено на рис. 1, где контур сети представлен n ветвями, границы k-й ветви описывают узлы, представленные точками A_k и A_{k+1}, $k = 1 \div n+1$, $A_1 = A_{n+1}$, и каждая из ветвей может содержать произвольное число элементов (участков).

Для контура, изображенного на рис. 1, такой обход означает, что по давлению в точке A_1 можно найти давление в точке A_2, по давлению в точке A_2 — давление в точке A_3 и так далее. В конечном итоге по давлению в точке A_n определяется давление в точке A_{n+1}, которое должно совпадать с исходным давлением в точке A_1, где величина несовпадения определяет невязку на рассматриваемом контуре.

Необходимость в определении невязки следует из того, что система уравнений относительно неизвестных расходов оказывается нелинейной (все функции в соотношении (2) нелинейные) и может быть решена только численно, а на каждом итерационном шаге численного метода следует определять невязки в каждом из уравнений. Обход контура, как показано на рис. 1, дает возможность реализовать такую процедуру.

Последовательный обход элементов вдоль контура всегда позволяет определить разницу давлений на элементе ветви независимо от соотношения направлений контура и потока через элемент, что некорректно для ГРС сжимаемой жидкости в случаях критических режимов течения, когда нарушается соотношение (2), поскольку невозможно корректно определить перепад давления на элементе при его обходе «по потоку». Следовательно, возникает проблема определения невязки для контурных уравнений, т.е. численного решения системы уравнений относительно неизвестных расходов в ветвях таких ГРС.

Математическая модель элемента ГРС на основе газодинамических функций. Такой моделью является модель изоэнтропического течения вязкого сжимаемого газа в трубе постоянного сечения [3], в которой процессы характеризуются коэффициентом скорости $\lambda = v/a_{\text{кр}}$, где v — скорость потока; $a_{\text{кр}}$ — критическая скорость (скорость звука в потоке), равная для воздуха $18{,}3\sqrt{T^*}$; T^* — температура торможения.

Пусть P^*— полное, а P — статическое давление; G — расход на элементе; k — коэффициент адиабаты для воздуха, $k = 1{,}4$; газодинамические функции:

$$\tau(\lambda) = 1 - \lambda^2/6,\ \ \varepsilon(\lambda) = (1-\lambda^2/6)^{2,5},\ \ \pi(\lambda) = (1-\lambda^2/6)^{3,5} = P/P^*,$$

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2 + 2\ln(\lambda),\ q(\lambda) = 1{,}2^{2,5}\lambda\,\varepsilon(\lambda) = |\,G\,|\sqrt{T^*}/(0{,}3965\,F\,P^*);$$

$$y(\lambda) = q(\lambda)/\pi(\lambda).$$

Коэффициент скорости λ может изменяться от нуля до единицы, область значений функций $\tau(\lambda)$, $\varepsilon(\lambda)$ и $q(\lambda)$ — отрезок [0,1].

Перепад давления на элементе ГРС сжимаемой жидкости является функцией расхода G, температуры торможения T^*, конструктивных параметров, характеризующих элемент, а также уровня давления. Если $P_{1э}$ — полное давление на входе элемента (в направлении потока), $P_{2э}$ — давление на выходе элемента (в направлении потока), а ΔP — перепад давления на элементе, то зависимость для перепада давления на элементе ГРС можно записать в виде

$$\Delta P = P_{1э} - P_{2э}. \tag{3}$$

При этом если известно значение давления $P_{2э}$, то по нему (с учетом G и T^*) можно определить коэффициент скорости λ_2. Возможны два варианта его определения.

1. $P_{2э}$ — статическое давление. Тогда можно найти значение функции $y(\lambda_2)$, а по нему — и значение λ_2, которое не может быть больше единицы (скорость потока не может превышать скорость звука в потоке). Если окажется, что $\lambda_2 > 1$, то следует искать минимальное значение $P_э$ на срезе

выходного сечения элемента при условии равенства скорости потока и скорости звука в потоке, т. е. при $\lambda_2 = 1$:

$$P_{\text{э min}} = |\, G \,| \sqrt{T^*} / (0{,}3965\, F)\ .$$

2. $P_{2э}$ — полное давление. Тогда можно найти значение функции $q\,(\lambda_2)$. Если окажется, что $q\,(\lambda_2) > 1$, то согласно (3) будем искать минимальное значение давления на срезе выходного сечения (в направлении потока) элемента при условии равенства скорости потока и скорости звука в потоке ($\lambda_2 = 1$), что наблюдается при $q\,(\lambda_2) = 1$. Если $q\,(\lambda_2) < 1$, то по значению $q\,(\lambda_2)$ находим значение λ_2.

Для определения полного давления $P_{1э}$ следует определить λ_1, по нему определить $q\,(\lambda_1)$, а по значению $q\,(\lambda_2)$ — величину $P_{1э}$. Значение λ_1, согласно [3], находят из соотношения

$$\varphi\,(\lambda_1) - \varphi\,(\lambda_2) = 2\, k/(k + 1)\, \xi,$$

где коэффициент гидравлического сопротивления ξ определяется для несжимаемой жидкости с использованием справочной литературы, например [4].

Алгоритм определения перепада давления на элементе при расчете «по потоку» (если это возможно) аналогичен описанному. По $P_{1э}$ определятся значение $q\,(\lambda_1)$, по $q\,(\lambda_1)$ — значение λ_1, по λ_1 — значение $\varphi\,(\lambda_1)$, по $\varphi\,(\lambda_1)$ и ξ — значение $\varphi\,(\lambda_2)$, по $\varphi\,(\lambda_2)$ — значение λ_2, если $\varphi\,(\lambda_2) \geq 1$; по λ_2 — значение $q\,(\lambda_2)$, по $q\,(\lambda_2)$ — значение $P_{2э}$, а затем — перепад на элементе $\Delta P = P_{1э} - P_{2э}$.

На рис. 2 приведены зависимости расхода от давления для нелинейного гидравлического элемента как функции параметров F, P^*, T^*, ξ . Как видно из рис. 2, в общем виде характеристика участка является S-образной. Однако при изменении параметров ее форма меняется следующим образом:

прямо пропорционально изменению давления P^* (центральная симметрия);

пропорционально температуре T^* и площади проходного сечения элемента;

в зависимости от коэффициента сопротивления — при малых значениях коэффициента сопротивления характеристика приближается к вертикальной линии $P^*(G) = P^*$.

Следовательно, при изменении режимных данных, в том числе и при переходе от элемента к элементу, форма характеристики участка постоянно изменяется, хотя в общем виде остается S-образной. Это делает практически невозможным ее использование при ручных расчетах, а также затрудняет использование при графическом построении процесса формирования кон-

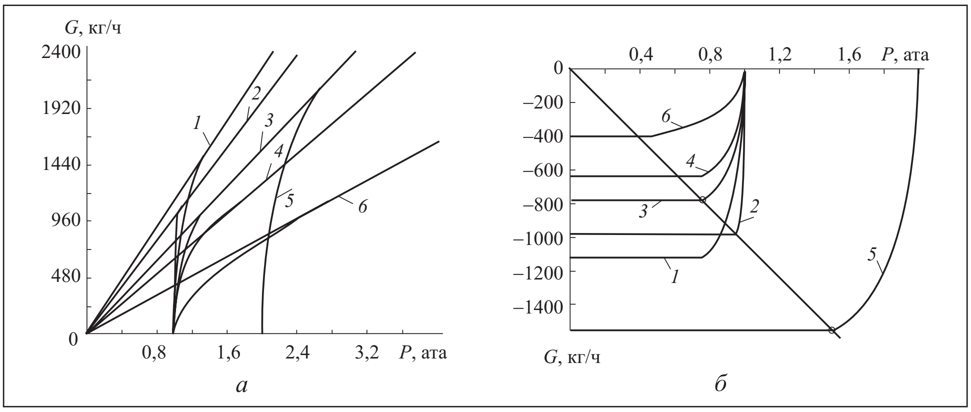

Рис. 2. Изменение типовой характеристики участка (эпюры давлений) при изменении одного из параметров: *а* — расчет «против потока»; *б* — расчет «по потоку»: *1* — $F_2 = 1{,}44{*}F_1$; *2* — $\xi_2 = 0{,}1{*}\xi_1$; *2, 5* — $P_2^* = 2{*}\,P_1^*$; *3* — $F_1 = 0{,}00125664$ м^2, $P_1^* = 1$атм., $T_1^* = 300$ К, $\xi_1 = 1$; *4* — $T_2^* = 1{,}5{*}T_1^*$; *6* — $\xi_2 = 10{*}\xi_1$

турной невязки. Поэтому все графические иллюстрации строились на основании множественных расчетов на ЭВМ.

Расчет контурной невязки для контура, содержащего две ветви. Рассмотрим одну из простейших ГРС, содержащую две параллельные абсолютно идентичные ветви, образующие цикл. Каждая из ветвей содержит три элемента (участка). Необходимо определить расходы в этих ветвях, если в остальных ветвях расходы известны. Расчетная схема системы приведена на рис. 3, на котором указаны все граничные условия и конструктивные характеристики элементов (для упрощения выкладок полагаем, что рассчитанные по конструктивным параметрам значения коэффициентов гидравлических сопротивлений определены в точке решения и нет необходимости в их пересчете при незначительном изменении расхода).

Очевидно, что точное решение задачи расчета расходов для этой ГРС определяется условием $G_1 = G_2 = 1000$ кг/ч. Допустим, что в ходе итерационного уточнения (любым из возможных методов) достигнуты близкие (но не совпадающие) значения расходов. При использовании численных методов для расчета расходов на каждой итерации следует определять перепады давления на всех элементах, общий перепад давления на каждой из ветвей, а по ним — погрешность в единственном уравнении второго закона Кирхгофа. Поскольку давления на границах между элементами неизвестны, в общую систему уравнений относительно неизвестных следует включать и эти давления. Значение P_1 можно найти, используя граничное давление P_0. На границах между элементами значения давлений совпадают. Поэтому, начиная с давления P_1, можно получить значения перепадов давлений на ветвях и значение невязки на контуре (см. рис. 3).

Пусть для определенности $P_1 = 1{,}05$. Рассмотрим три варианта итерационных значений расходов в параллельных ветвях:

1) $G_1 = 1000{,}001$, $G_2 = 999{,}999$;

2) $G_1 = 999{,}999$, $G_2 = 1000{,}001$;

3) $G_1 = 950$, $G_2 = 1050$.

Результаты соответствующих расчетов для вариантов 1 и 3 приведены на рис. 4. Для варианта 1 давление в конце контура оказывается равным 1,6935431714, что значительно превышает значение 1,05, несмотря на очень малое (0,0001%) отличие значений расходов от точного решения.

Для большей информативности в таблице приведены значения давлений на границах между элементами в направлении обхода контура при давлении в начале контура (элемент 0) $P_1 = 1{,}05$. В случае, когда $P_1 = 0{,}01$, значения давлений на границах между элементами будут такими же. Стрелкой указано направление расчета.

При значениях давления в начале контура, меньших 1,65 (вследствие критического режима течения на втором элементе), давление в его начале всегда будет одинаковым, а значит, неизменными будут и все последующие значения давления вдоль контура. Давление на границе между элементами находится в точке пересечения графика характеристик элемента с линией фиксированного значения расхода. Для $P = 2{,}094159003$ на границе между вторым и третьим элементами второй ветви значение максимального расхода, который может быть пропущен через третий элемент,

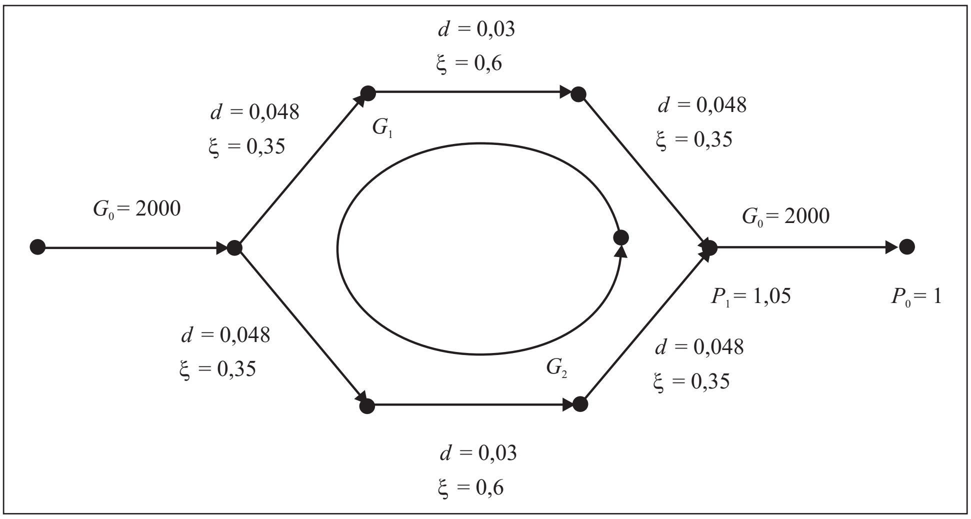

Рис. 3. Расчетная схема простейшей ГРС

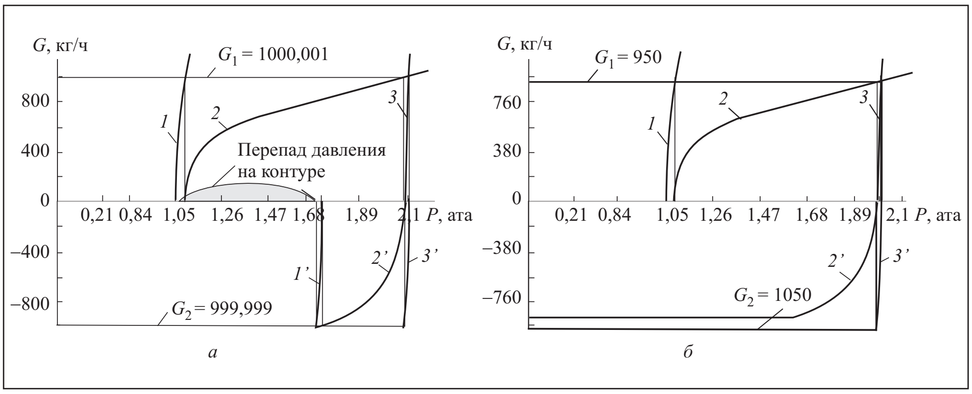

Рис. 4. Графики зависимости между давлением и расходом при определении невязки на контуре: *а* — вариант 1; *б* — вариант 3; *1* — *3* — элементы ветви 1; *1′*— *3′* — аналогичные элементы ветви 2

равно 1000,00100325. Поэтому для G_2 = 999,999 возможен расчет перепада давления в направлении потока и при этом отсутствует скачок уплотнения.

Следовательно, при обходе элементов вдоль контура, содержащего элемент с критическим режимом течения, нельзя гарантировать, что невязка на контуре (если ее удалось найти) определена корректно, как в приведенном примере.

Рассмотрим вариант 2. При расчетах с точностью до 10-ти десятичных разрядов оказывается, что давления на входе второго элемента второй ветви недостаточно для того, чтобы пропустить расход, равный 1000,001 кг/ч, при скорости потока, не превышающей скорости звука в потоке. Качественная картина такой ситуации представлена на рис. 4, *б* для варианта 3.

Из рис. 4, *б* видно, что прямая G_2 = 1050 не пересекается с характеристикой второго элемента второй ветви (при скорости потока, не превышаю-

Вариант	Ветвь	Давление (ата) на элементе							
		0		1		2		3	
1	1	1,05	→	1,09154648	→	2,094158926	→	2,112461144	→
	2	1,69354317	←	1,71665792	←	2,094159003	←	2,112461144	←
2	1	1,05	→	1,086809283	→	1,98944899	→	2,00683608	→
	2	G_2 = 1050 при G_{max} = = 948,04767698			←	1,98536053	←	2,00683608	←
3	1	1,05	→	1,09154648	→	2,094158926	→	2,112461144	
	2	1,05	←	1,09154628	←	2,094154738	←	2,112456919	

щей скорости звука в потоке, невозможен расход более $G_{\max} = 948{,}047677$, что меньше величины $G_2 = 1050$). Ситуация со значениями расходов $G_1 = 999{,}999$ и $G_2 = 1000{,}001$ точно такая же, только разница между G_2 и $G_{\max}$ будет иной (значительно меньшей, но положительной).

Как видим, для рассмотренной ГРС (а значит, и для многих других) нельзя пользоваться последовательным обходом вдоль контура при определении контурной невязки. Для первого варианта начальных значений расходов поиск невязки на контуре является некорректным, а для второго варианта ее в принципе невозможно найти. Поэтому предлагается отказаться от последовательного обхода ветвей и их элементов вдоль контура, а использовать для определения контурной невязки только обход против потока, начиная от значения давления в одном из узлов, описывающих ветвь. При таком способе расчета контурная невязка окажется равной 0,0000042 ата (см. таблицу, вариант 3), что соответствует близости итерационного значения расходов в ветвях к точному решению. Для таких задач расчетная схема будет двухуровневой: на одном уровне по давлениям в узлах и итерационных значениях расходов в ветвях формируются уравнения второго закона Кирхгофа относительно неизвестных расходов и определяются такие расходы, а на другом — уточняются давления в узлах по найденным новым итерационным значениям расходов в ветвях.

Из анализа математической модели элемента, используемой при практических гидравлических расчетах режимов ГРС сжимаемого воздуха, следует, что для пассивных элементов с критическим режимом течения зависимость (2) должна быть приведена к виду

$$P_{1э} = f(G_{iэ}, P_{2э}),\ G_{iэ} > 0,\ \ i = 1 \div n,$$

$$P_{2э} = f(G_{iэ}, P_{1э}),\ G_{iэ} < 0,\ \ i = 1 \div n.$$

При этом в ряде случаев, включая приведенный выше, невозможно обеспечить расчет поля давлений вдоль контура, что в свою очередь не дает возможности сформировать контурное уравнение (в первую очередь, определить невязку), а значит, и систему $n - m$ контурных уравнений второго закона Кирхгофа относительно расходов в ветвях-хордах. Для формирований таких уравнений требуется определение итерационных значений давлений в узлах ГРС. При известных давлениях возможно определение перепада давления на произвольной ветви ГРС, поскольку по отношению к одному из узлов расчет давления будет выполняться в направлении против потока.

Способ формирования контурной невязки на основании определения перепадов давлений на всех ветвях путем обхода против потока требует дополнительного определения давления в узлах. Следовательно, неизвестными оказываются и расходы в ветвях, и давления в узлах. Отдельно необходимо решать вопрос существования давления во внутренней точке узла [5].

Общая идея решения таких задач потокораспределения изложена в работе [6]. На основании найденных решений созданы прикладные программные разработки, позволяющие решать задачу расчета расходов в ветвях и давлений в произвольных точках для систем кондиционирования воздуха.

Особенности процессов течения сжимаемой жидкости, когда скорость потока не может превышать скорость звука в потоке, приводят к ситуациям, в которых невозможно определение потерь давления на элементах системы в направлении по потоку. Это потребовало разработки специального подхода к расчету перепадов давления на ветвях, а следовательно, и способа формирования зависимостей в уравнениях второго закона Кирхгофа и контурной невязки для них.

The approach for formation of dependences in the second Kirchhoff's law equations is suggested for calculation of the flow distribution in hydraulic distribution systems of compressible fluid, when the pressure drop at the element is calculated based on the gas-dynamic functions and can be reliably found only in the «contra-flow» direction.

1. *Меренков А. П., Хасилев В. Я.* Теория гидравлических цепей. — М. : Наука, 1985. — 280 с.
2. *Евдокимов А. Г., Тевяшев А. Д., Дубровский В. В.* Моделирование и оптимизация потокораспределения в инженерных сетях. — Изд. 2-е, перераб. и доп. — М. : Стройиздат, 1990. — 368 с.
3. *Абрамович Г. Н.* Прикладная газовая динамика. — Изд. 3-е, перераб. — М. : Наука, 1969. — 824 с.
4. *Идельчик И. Е.* Гидравлические сопротивления. — М. : Машиностроение, 1975. — 559 с.
5. *Винничук С. Д.* Понятие давления во внутренней точке узла сети несжимаемой жидкости со значимым влиянием узловых сопротивлений /Моделювання та інформаційні технології: Зб. наук. праць. Вип. 21. — Київ : ІПМЕ ім. Г. Є. Пухова НАН України, 2003. — С. 3—10.
6. *Винничук С. Д.* Общие вопросы методологии решения задач расчета потокораспределения в гидравлических сетях // Там же. — Київ : ІПМЕ ім. Г. Е. Пухова НАН України, 2002. — С. 67—76.

Поступила 04.10.07;
после доработки 11.06.08

ВИННИЧУК Степан Дмитриевич, д-р техн. наук, вед. нач. сотр. Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины. В 1977 г. окончил Черновицкий госуниверситет. Область научных исследований — разработка методов, моделей и программных средств для анализа распределительных систем сжимаемой и несжимаемой жидкости, в том числе авиационные системы кондиционирования воздуха; исследование системной противоаварийной частотной автоматики электроэнергетических систем.