УДК 532.546

Х. М. Гамзаев, канд. техн. наук
Азербайджанская государственная нефтяная академия
(Азербайджан, AZ 1010, Баку, проспект Азадлыг, 20,
тел. (994 12) 563-01-22, E-mail: xan.h@rambler.ru)

Моделирование упругого режима разработки пластов системой гидродинамически несовершенных скважин

Рассмотрены вопросы моделирования упругого режима нефтяных пластов, разрабатываемых системой гидродинамически несовершенных скважин. Предложена математическая модель движения жидкости в системе пласт—скважина и на основе этой модели разработана методика расчета упругого режима пластов.

Розглянуто питання моделювання пружного режиму нафтових пластів, що розробляються системою гідродинамічно недосконалих шпар. Запропоновано математичну модель руху рідини у системі пласт—шпара і на основі цієї моделі розроблено методику розрахунку пружного режиму пластів.

Ключевые слова: пласт, упругий режим, гидродинамически несовершенная скважина, моделирование скважин.

Известно, что составление прогнозов и расчеты процессов разработки нефтяных месторождений в упругом режиме основаны на теории фильтрации однофазных жидкостей. В качестве математической модели процесса разработки используется система уравнений, включающая дифференциальное уравнение неразрывности однофазного фильтрационного потока, закон фильтрации и уравнения состояния жидкостей и пористой среды [1]. При этом геометрическая конфигурация пласта, а также свойства породы и жидкостей считаются известными. Для однозначного определения полей давления система уравнений дополняется начальными и граничными условиями, описывающими начальное состояние пласта и его взаимодействие с окружением. Граничные условия задаются относительно давления или расхода жидкостей (или их комбинации) на контуре пласта и скважин.

Обычно скважины моделируют с помощью точечных источников (стоков), определяемых функцией Дирака, за исключением односкважинных систем в цилиндрических координатах. Необходимо заметить, что данный подход обусловлен малостью радиуса скважины по сравнению с размерами нефтяных месторождений. Однако относительно граничных условий на скважинах следует отметить одно очень важное обстоятельство. При определении граничных условий традиционно предполагают, что все скважины являются гидродинамически совершенными и условия на скважинах, точнее на забоях скважин, известны или реализуются по заранее заданной программе. Однако эти предположения, как правило, не выполняются.

Во-первых, режим работы эксплуатационных скважин, т. е. их дебиты и забойные давления, устанавливаются в зависимости от условий в системе пласт—скважина, а также в результате взаимодействия скважин. Следовательно, давление и дебит жидкостей на эксплуатационных скважинах невозможно регулировать по заранее заданной программе.

Во-вторых, при разработке пластовых систем продуктивные пласты из-за технических и технологических причин вскрываются скважинами, гидродинамически несовершенными по характеру вскрытия пласта. Такие скважины вскрывают пласт до подошвы, но сообщение с пластом происходит только через перфорационные отверстия в обсадной колонне и цементном камне или через специальные фильтры. Приток жидкости к перфорированной скважине, даже в горизонтальном однородном пласте постоянной толщины, перестает быть плоскорадиальным [2]. Перфорированный забой вызывает сгущение линий тока у перфорационных отверстий, что приводит к увеличению фильтрационного сопротивления по сравнению с открытым забоем и, следовательно, к дополнительной потере давления в пласте.

Изложенное свидетельствует о том, что для моделирования упругого режима разработки пластов очень важное значение имеет адекватное описание притока жидкости к гидродинамически несовершенным по характеру вскрытия пласта скважинам и правильное представление условия на несовершенных скважинах.

Постановка задачи и метод ее решения. Предположим, что двумерный пласт, расположенный в прямоугольной области $\overline{G} = \{0 \le x \le L_x,\ 0 \le y \le L_y\}$, разрабатывается системой скважин с перфорированными забоями в замкнуто-упругом режиме. Моделируя действия скважин точечными стоками, математическую модель упругого режима разработки пласта представим в следующем виде [1]:

$$b(x,y)\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x,y)\frac{\partial P}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(a(x,y)\frac{\partial P}{\partial y}\right) - \sum_{l=1}^{m} Q_l(t)\,\delta(x - x_l, y - y_l),$$

$$(x,y) \in G,\ 0 < t \le T; \tag{1}$$

$$P|_{t=0} = P_0(x,y), \tag{2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}\Big|_{x=0}=\frac{\partial P}{\partial x}\Big|_{x=L_x}=0,\quad \frac{\partial P}{\partial y}\Big|_{y=0}=\frac{\partial P}{\partial y}\Big|_{y=L_y}=0. \tag{3}$$

Здесь P — давление; $\delta(x-x_l, y-y_l)$ — функция Дирака; $Q_l(t)$, (x_l, y_l), $l=\overline{1,m}$ — дебиты и координаты скважин;

$$b(x,y)=\beta H(x,y);\ a(x,y)=\frac{k(x,y)\,H(x,y)}{\mu},$$

где μ — вязкость жидкости; $k(x,y)$, $H(x,y)$ и β — соответственно проницаемость, толщина и упругоемкость пласта.

Дебиты скважин $Q_l(t)$, $l=\overline{1,m}$, считаются неизвестными и наряду с функцией давления $P(x,y,t)$ подлежат определению. Очевидно, что для решения системы (1)—(3) необходимо задать дополнительные уравнения, определяющие дебиты скважин $Q_l(t)$, $l=\overline{1,m}$. Для вывода этих уравнений используем условия совместимости течения жидкости в пласте и в стволах скважин.

Предположим, что в окрестности каждой скважины существует круговая область с радиусом R_l, $l=\overline{1,m}$, в которой фильтрационный поток в каждый момент времени можно рассматривать как стационарный. В данной области из-за перфорации забоя скважины фильтрационный поток перестает быть плоскорадиальным и, согласно [3], образуются три зоны течения. В первой зоне, расположенной между стенкой скважины и цилиндрической поверхностью с радиусом $\theta_l = r_\omega + s_l$, где r_ω — радиус скважины, s_l — длина перфорационных каналов, течение жидкости происходит через перфорационные каналы. Для описания движения жидкости в этой зоне можно использовать уравнение Гагена—Пуазейля [3]

$$P_1^l - P_\omega^l = \frac{128 Q_l s_l \mu}{\pi\, d_l^4 N_l},\quad l=\overline{1,m}, \tag{4}$$

где P_1^l и P_ω^l — давление на поверхности θ_l и на забое скважины; d_l и N_l — диаметр и число перфорационных отверстий.

Во второй зоне, расположенной между цилиндрическими поверхностями θ_l и η_l, происходит сгущение линий тока и вблизи каждого перфорационного отверстия образуется радиально-сферическое течение жидкости. Предполагая, что объемный расход жидкости равномерно распределяется по перфорационным отверстиям, модель радиально-сферического фильтрационного потока во второй зоне можно представить в виде [3]

$$P_2^l - P_1^l = \frac{\mu Q_l}{2\pi N_l k_l}\left[\frac{2}{d_l}-\frac{1}{\eta_l-\theta_l}\right],\ l=\overline{1,m}, \tag{5}$$

где P_2^l — давление на поверхности η_l; k_l — проницаемость пласта в области $[r_\omega, R_l]$.

В третьей зоне, расположенной между цилиндрическими поверхностями η_l и R_l, происходит плоскорадиальное течение жидкости. Воспользовавшись моделью плоскорадиального фильтрационного потока, можно найти распределение давления в третьей зоне:

$$P_3^l(r) = P_2^l + \frac{Q_l \mu}{2\pi H_l k_l} \ln\frac{r}{\eta_l}, \quad \eta_l \le r \le R_l, \ l = \overline{1,m}, \tag{6}$$

где H_l — толщина пласта в области $[r_\omega, R_l]$. Среднее давление в этой зоне определяем по формуле

$$\overline{P_3^l} = \frac{2}{R_l^2 - \eta_l^2} \int_{\eta_l}^{R_l} P_3^l(r)\, r\, dr. \tag{7}$$

Подставляя (6) в (7) и интегрируя, получаем

$$\overline{P_3^l} - P_2^l = \frac{Q_l \mu}{2\pi H_l k_l (R_l^2 - \eta_l^2)} \left[R_l^2 \ln\frac{R_l}{\eta_l} - \frac{R_l^2 - \eta_l^2}{2} \right], \ l = \overline{1,m}. \tag{8}$$

Следует заметить, что размеры второй и третьей зон определяются параметром η_l, который, в свою очередь, зависит от плотности перфорации забоя, т. е. от числа перфорационных отверстий, приходящихся на единицу длины. Для определения параметра η_l используем равенства скоростей фильтрации на цилиндрической поверхности η_l, т. е. на границе второй и третьей зон, $Q_l / 2\pi\, \eta_l H_l = Q_l / 2\pi\, N_l (\eta_l - \theta_l)^2$. Отсюда находим

$$\eta_l = \theta_l + (1 + \sqrt{1 + 4 n_l \theta_l}) / 2 n_l, \tag{9}$$

где $n_l = N_l / H_l$ — плотность перфорации.

Как следует из (9), при увеличении плотности перфорации размер второй зоны уменьшается. Учитывая это, а также незначительную длину перфорационных отверстий, среднее давление в третьей зоне $\overline{P_3^l}$ приближенно можно принять равным среднему давлению $\overline{P_l}$ в круговой области $[r_\omega, R_l]$ стационарного течения жидкости. Тогда, складывая почленно уравнения (4), (5) и (8), получаем

$$\overline{P_l} - P_\omega^l = \lambda_l Q_l, \ l = \overline{1,m}, \tag{10}$$

где

$$\lambda_l = \frac{128 s_l \mu}{\pi d_l^4 N_l} + \frac{\mu}{2\pi N_l k_l} \left[\frac{2}{d_l} - \frac{1}{\eta_l - \theta_l} \right] + \frac{\mu}{2\pi H_l k_l (R_l^2 - \eta_l^2)} \left[R_l^2 \ln\frac{R_l}{\eta_l} - \frac{R_l^2 - \eta_l^2}{2} \right].$$

Теперь выведем уравнение, описывающее движение жидкости в стволе скважины. Предположим, что перепад давления в стволе скважины определяется гидростатическим напором, ускорением жидкости в скважине и потерей на вязкостное трение. Тогда, используя второй закон Ньютона, можно записать уравнение, описывающее динамику изменения расхода жидкости в стволе скважины:

$$\frac{Z_l \rho}{\pi r_\omega^2}\frac{dQ_l}{dt} + \rho g Z_l + \frac{8\mu Z_l}{\pi r_\omega^4} Q_l = P_\omega^l - P_u^l, \; l = \overline{1, m}, \tag{11}$$

где Z_l — длина скважины; P_u^l — давление на устье скважины; ρ — плотность жидкости; g —ускорение свободного падения. Первое слагаемое в левой части уравнения соответствует перепаду давления вследствие ускорения жидкости, второе — весу столба жидкости на единицу площади поперечного сечения скважины, третье — падению давления, обусловленному вязким трением. Если пренебречь ускорением жидкости в стволе скважины, то уравнение (11) можно записать в виде

$$P_\omega^l = P_u^l + \rho g Z_l + \frac{8\mu Z_l}{\pi r_\omega^4} Q_l.$$

Для совместимости условий течения жидкости в пласте с условиями течения в стволе скважины необходимо выполнение условия

$$\overline{P_l} - \lambda_l Q_l = P_u^l + \rho g Z_l + \frac{8\mu Z_l}{\pi r_\omega^4} Q_l,$$

откуда

$$Q_l = \frac{\overline{P_l} - \rho g Z_l - P_u^l}{\lambda_l + f_l}, \; l = \overline{1, m}, \tag{12}$$

где $f_l = \dfrac{8\mu Z_l}{\pi r_\omega^4}$. Очевидно, что подставив (12) в уравнение (1) и решив задачу (1) — (3), можно найти распределение давления в пласте. Поскольку невозможно найти аналитическое решение задачи (1) — (3), возникает необходимость в определении ее численного решения.

Построим в области $\Omega = G \times [0, T]$ неравномерную пространственно-временную сетку:

$$\omega = \{(x_i, y_j, t_n) : x_i = x_{i-1} + h_i^x, \; y_j = y_{j-1} + h_j^y, \; t_n = t_{n-1} + \tau_n,$$

$$i = \overline{1, N_x - 1}, \; j = \overline{1, N_y - 1}, \; n = \overline{1, N_t - 1},$$

$$x_0 = 0, \; x_{N_x} = L_x, \; y_0 = 0, \; y_{N_y} = L_y, \; t_0 = 0, \; t_{N_t} = T\},$$

где h_i^x, h_j^y, τ_n — неравномерные шаги по переменным $x, y,\ t$; N_x, N_y, N_t — число разбиения отрезков соответственно $[0, L_x]$, $[0, L_y]$, $[0, T]$. Предположим, что центры скважин попадают в узловые точки разностной сетки. Этого можно добиться изменением шагов сетки $h_i^x,\ h_j^y$ до наилучшего совпадения мест расположения скважин с узловыми точками и некоторым сдвигом отдельных скважин. Очевидно, что давление $P_{ij}^n \approx P(x_i, y_j, t_n)$, определяемое в узле разностной сетки ω, является средним давлением в блоке, окружающем данный узел. Следовательно, если в узле сетки расположена скважина, то для данного узла можно принять

$$P_{ij}^n = \overline{P}_l^{\,n}. \tag{13}$$

При этом радиус круговой области стационарного течения жидкости определяется как $R_l = \sqrt{h_{i+1/2}^x\, h_{j+1/2}^y / \pi}$, где $h_{i+1/2}^x = 0{,}5\,(h_i^x + h_{i+1}^x)$, $h_{j+1/2}^y = 0{,}5\,(h_j^y + h_{j+1}^y)$. Тогда, используя метод переменных направлений [4], задачу (1) — (3) с учетом (12), (13) можно аппроксимировать на сетке ω следующей системой разностных уравнений:

$$b_{ij}\frac{P_{ij}^{n+1/2}-P_{ij}^n}{\tau_n/2} = \frac{1}{h_{i+1/2}^x}\left[a_{i+1/2\,j}\frac{P_{i+1\,j}^{n+1/2}-P_{ij}^{n+1/2}}{h_{i+1}^x} - a_{i-1/2\,j}\frac{P_{ij}^{n+1/2}-P_{i-1\,j}^{n+1/2}}{h_i^x}\right]+$$

$$+\frac{1}{h_{j+1/2}^y}\left[a_{ij+1/2}\frac{P_{ij+1}^n-P_{ij}^n}{h_{j+1}^y} - a_{ij-1/2}\frac{P_{ij}^n-P_{ij-1}^n}{h_j^y}\right] - \sum_{l=1}^m \frac{P_{ij}^{n+1/2}-\rho\, g\, Z_l - P_u^l}{\lambda_l + f_l}\,\delta_{ij}^l; \tag{14}$$

$$b_{ij}\frac{P_{ij}^{n+1}-P_{ij}^{n+1/2}}{\tau_n/2} = \frac{1}{h_{i+1/2}^x}\left[a_{i+1/2\,j}\frac{P_{i+1\,j}^{n+1/2}-P_{ij}^{n+1/2}}{h_{i+1}^x} - a_{i-1/2\,j}\frac{P_{ij}^{n+1/2}-P_{i-1\,j}^{n+1/2}}{h_i^x}\right]+$$

$$+\frac{1}{h_{j+1/2}^y}\left[a_{ij+1/2}\frac{P_{ij+1}^{n+1}-P_{ij}^{n+1}}{h_{j+1}^y} - a_{ij-1/2}\frac{P_{ij}^{n+1}-P_{ij-1}^{n+1}}{h_j^y}\right] - \sum_{l=1}^m \frac{P_{ij}^{n+1}-\rho\, g\, Z_l - P_u^l}{\lambda_l + f_l}\,\delta_{ij}^l; \tag{15}$$

$$i = \overline{1, N_x - 1},\ j = \overline{1, N_y - 1},\ n = \overline{0, N_t - 1};$$

$$P_{ij}^0 = P_0(x_i, y_j),\ i = \overline{0, N_x},\ j = \overline{0, N_y};$$

$$P_{0j}^{n+1/2} = P_{1j}^{n+1/2},\ P_{N_x j}^{n+1/2} = P_{N_x - 1\, j}^{n+1/2};$$

$$P_{i0}^{n+1} = P_{i1}^{n+1},\ P_{iN_y}^{n+1} = P_{iN_y - 1}^{n+1},$$

где

$$a_{i\pm 1/2\, j}=\frac{2a_{ij}a_{i\pm 1\, j}}{a_{ij}+a_{i\pm 1\, j}};\;\; a_{ij\pm 1/2}=\frac{2a_{ij}a_{ij\pm 1}}{a_{ij}+a_{ij\pm 1}};$$

$$\delta_{ij}^{l}=\left\{\begin{matrix} 1/h_{i+1/2}^{x}h_{j+1/2}^{y}, & x_i=x_l, y_j=y_l \\ 0, & x_i\neq x_l\cup y_j\neq y_l \end{matrix}\right\}.$$

Определение P_{ij}^{n+1} из системы (14) , (15) осуществляется в два этапа. На первом этапе определяют промежуточные значения $P_{ij}^{n+1/2}$ из системы уравнений (14), а на втором этапе, пользуясь найденными значениями $P_{ij}^{n+1/2}$, находят P_{ij}^{n+1} из системы уравнений (15). Уравнение (14) является неявным только по переменной *x*, а уравнение (15) — по переменной *y*. Поэтому уравнения (14), (15) можно решить последовательным применением одномерных прогонок, сначала по направлению *x*, а затем по направлению *y*. Определив распределение давления в пласте P_{ij}^{n+1}, по формулам (12) и (10) находим дебиты и забойные давления перфорированных скважин на соответствующем временном слое. Заметим, что формула (12) позволяет также определить срок разработки пласта в упругом режиме.

На основе предложенного метода моделирования упругого режима разработки пласта проведен численный эксперимент. Рассмотрен нефтяной пласт, расположенный в прямоугольной области $\overline{G}=\{0\le x\le 1000$ м, $0\le y\le 1000$ м$\}$, вскрытый двумя перфорированными скважинами при начальном давлении $P_0(x,y)=250$ атм.

Координаты скважин (300 м, 400 м) и (600 м, 700 м), параметры пластовой системы: $\beta=10^{-9}$ Па $^{-1}$, $\mu=3\cdot 10^{-3}$ Па·с, $k(x,y)=5\cdot 10^{-12}$ м^2, $H(x,y)=12$ м, $\rho=800$ кг/м^3, $r_\omega=10$ см, $n_l=30$ отв./м, $Z_l=2500$ м, $s_l=2$ см, $d_l=1$ см, $P_u^l=0$, $l=1;\,2$. Численные расчеты проведены в равномерной разностной сетке с шагами $h_x=20$ м, $h_y=20$ м, $\tau=3$ ч.

В результате численных расчетов получено распределение давления в пласте, а также дебиты и давления на забоях скважин по времени. В ходе численного эксперимента обнаружено, что данный пласт можно эксплуатировать в упругом режиме в течение 63-х суток. При этом суммарная добыча нефти из пласта составит 57 569,92 м^3.

Таким образом, предложенный подход к моделированию упругого режима пластов, разрабатываемых системой гидродинамически несовершенных по характеру вскрытия пласта скважин, можно использовать для моделирования процессов, происходящих при разработке пластовых систем в упругом режиме.

Problems of modeling the elastic mode of the oil layers elaborated by the system of wells with punched hole are considered. The mathematical model of the liquid motion in the «layer-well» system is suggested. Based on this model the elastic mode calculation technique is developed.

1. *Кричлоу Г. Б.* Современная разработка нефтяных месторождений. Проблемы моделирования. — М. : Недра, 1979. — 303 с.
2. *Шуров В. И.* Технология и техника добычи нефти. — М. : Недра, 1983. — 510 с.
3. *Гамзаев Х. М.* Моделирование притока жидкости к скважине, гидродинамически несовершенной по характеру вскрытия пласта //Азербайджанское нефтяное хозяйство. — 2003. — № 5. — С. 2—5.
4. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. — М. : Наука, 1977. — 432 с.

Поступила 09.03.08

ГАМЗАЕВ Ханлар Мехвали оглы, канд. техн. наук, доцент кафедры прикладной математики Азербайджанской государственной нефтяной академии, которую окончил в 1976 г. Область научных исследований — математическое моделирование процессов в нефтегазодобыче, численные методы.