



УДК 53.072.127 : 519.876.5

**А. Н. Гергега**, канд. техн. наук, **Т. Л. Лозовский**, аспирант  
Одесская государственная академия холода  
(Украина, 65026, Одесса, ул. Дворянская, 1/3,  
тел. (0482) 680777, E-mail: a.herega@gmail.com)

## **Моделирование самоорганизации динамических дисперсных систем. I. Спонтанная организация двухфазного потока**

*(Статью представил чл.-кор. НАН Украины В.В. Васильев)*

Описаны результаты моделирования работы оборудования (на примере воздушного центробежного фильтра) как открытой динамической системы с взаимодействующими уровнями. Исследованы режимы функционирования и процессы самоорганизации, зависимость уровня хаотичности двухфазного потока от интенсивности входящего потока и конструктивных особенностей оборудования.

Описано результати моделювання роботи обладнання (на прикладі повітряного відцентрового фільтра) як відкритої динамічної системи із взаємодіючими рівнями. Досліджено режими функціонування й процеси самоорганізації, залежність рівня хаотичності двофазного потоку від інтенсивності вхідного потоку й конструктивних особливостей обладнання.

*К л ю ч е в ы е с л о в а: триботехнические устройства, воздушный фильтр, двухфазный поток, динамическая система, итерационный алгоритм, хаос, странные аттракторы.*

Практическая задача определения условий интенсификации работы триботехнических устройств привела к необходимости их комплексного изучения. Создана математическая модель работы такого оборудования, и на примере воздушного центробежного фильтра [1], представленного в модели как трехуровневая открытая динамическая система с взаимодействующими уровнями, показана возможность исследования режима функционирования и процессов самоорганизации в нем.

**Центробежный фильтр как динамическая система.** Фильтр с обратными связями (ФОС) [2–5] представляет собой аппарат из последовательно соединенных криволинейных каналов (труб) постоянного сечения, в каждом

из которых запыленный воздушный поток движется по дуге окружности, совершает поворот на  $180^\circ$  и вследствие взаимного поперечного смещения каналов разделяется на две части: одна попадает в канал с меньшим радиусом кривизны, другая – с большим. Такая конструкция ФОС обеспечивает постоянное перемещение тяжелых частиц пыли в каналы с большим радиусом кривизны, выход частиц из фильтра и их улавливание, а также выход в атмосферу через торцевое отверстие в центре фильтра очищенного воздушного потока с остатками мелкой пыли. Очистка запыленного воздушного потока в ФОС осуществляется слоями пыли, циркулирующими по равновесным круговым орбитам. Именно в них частица пыли вовлекается в интенсивное взаимодействие, коагулирует, а затем переходит на более «высокие» орбиты (в пылевые потоки других каналов) и выводится из фильтра. Таким образом, эффективность работы ФОС во многом определяется интенсивностью процесса коагуляции [5].

В компьютерной модели ФОС рассматривается как открытая динамическая система с тремя взаимодействующими уровнями, соответствующими равновесным орбитам. В модели исследуется характер эволюции системы в зависимости от интенсивности входящего потока и конструктивных особенностей фильтра.

Модель описывается следующей системой уравнений:

$$\Phi 1(x, y, z) = \begin{cases} x_{n+1} = x_n - k_{xy} p x_n^2 + k_{yx} q y_n^2 + x_{\text{вх}}, \\ y_{n+1} = y_n + k_{xy} p x_n^2 - (k_{yx} + k_{yz}) q y_n^2 + k_{zy} r z_n^2, \\ z_{n+1} = z_n + k_{yz} q y_n^2 - (k_{zy} + k_{\text{вых}}) r z_n^2, \end{cases} \quad (1)$$

где  $x, y, z$  — динамические переменные, определяющие количество частиц на уровнях;  $k_{ij}$  — переходные коэффициенты, характеризующие статическое и динамическое взаимодействие уровней;  $p, q, r$  — распределяющие коэффициенты;  $x_{\text{вх}}$  — количество частиц, входящих на первый уровень;  $\{k_{ij}\}$  и  $\{p, q, r\} \in (0, 1)$ ,  $\{x, y, z\} \in R$ ,  $x_{\text{вх}} = \text{const} \in R^+$ .

Наличие в системе двух групп коэффициентов,  $k_{ij}$  и  $p, q, r$ , имеет конкретную физическую интерпретацию: коэффициенты  $k_{ij}$  описывают относительное поперечное смещение последовательных каналов инженерной конструкции и задают долю потока, переходящего из одного канала в другой, а коэффициенты  $p, q, r$  описывают распределение частиц по ширине канала конструкции, поэтому переход между каналами определяется произведением коэффициентов обеих групп. Таким образом, каждое из итерационных уравнений системы является билинейным по  $(p x_n)$  ( $k_{ij} x_n$ ) [4].

Рассматриваемая система не интегрируется в общем виде, ее решение может быть найдено лишь численно. При исследовании модели установ-

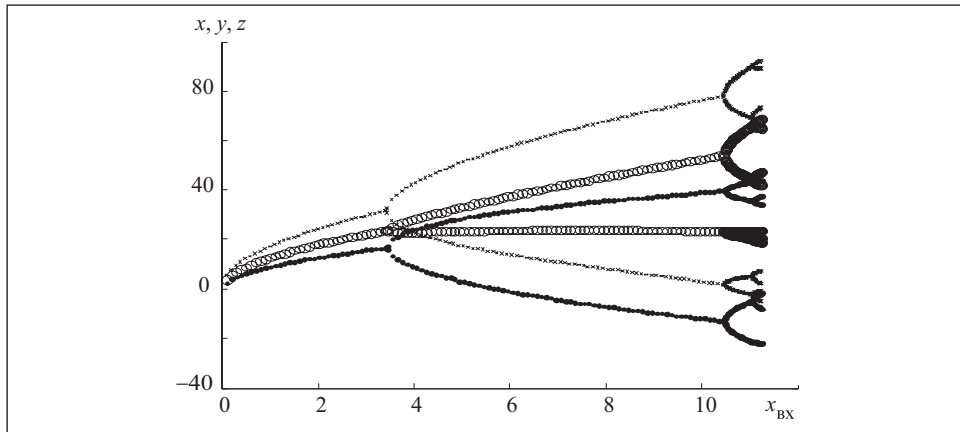


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма сценария удвоений периода (первые три бифуркации) для системы с параметрами:  $k_{xy} = 0,5$ ,  $k_{yx} = 0,4$ ,  $k_{yz} = 0,3$ ,  $k_{zy} = 0,3$ ,  $k_{вых} = 0,4$ ,  $p = 0,08$ ,  $q = 0,02$ ,  $r = 0,015$

лено, что область существования устойчивых фазовых траекторий ограничена. Система имеет стационарное решение, получаемое аналитически:

$$x_{ст} = \sqrt{\frac{x_{вх}}{k_{xy} p} \left( 1 + \frac{k_{yx}}{k_{yz}} \left( 1 + \frac{k_{zy}}{k_{вых}} \right) \right)},$$

$$y_{ст} = \sqrt{\frac{x_{вх}}{k_{yz} q} \left( 1 + \frac{k_{zy}}{k_{вых}} \right)}, \quad (2)$$

$$z_{ст} = \sqrt{x_{вх} / k_{вых} r}.$$

При увеличении значения  $x_{вх}$  возможны два варианта эволюции системы. В первом варианте возникает каскад бифуркаций удвоений периода и реализуется сценарий Фейгенбаума [6, 7] перехода к хаосу (рис. 1). Отношения между интервалами последовательных бифуркаций с погрешностью 1,3 % совпадают с универсальной константой Фейгенбаума  $\delta_F = 4,669\dots$ . При этом в фазовом пространстве наблюдаются аттракторы, состоящие из  $2^n$  точек (рис. 2).

Во втором варианте после периодического режима возникает ситуация, аналогичная бифуркации Хопфа [7, 8], приводящей к возникновению квазипериодического режима и появлению в фазовом пространстве аттрактора в виде двух замкнутых линий (рис. 3). Дальнейшее увеличение значения  $x_{вх}$  приводит к бифуркации, в результате которой наступает хаотический режим,

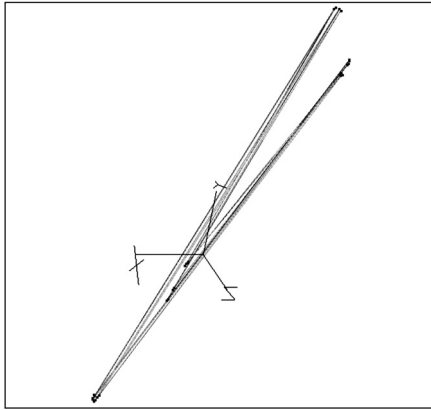


Рис. 2. Аттрактор, состоящий из 32-х точек; возникает при  $k_{xy}=0,5$ ,  $k_{yx}=0,4$ ,  $k_{yz}=0,3$ ,  $k_{zy}=0,3$ ,  $k_{вых}=0,4$ ,  $p=0,05$ ,  $q=0,085$ ,  $r=0,04$ ,  $x_{вх}=6,44$  после четырех бифуркаций удвоения периода

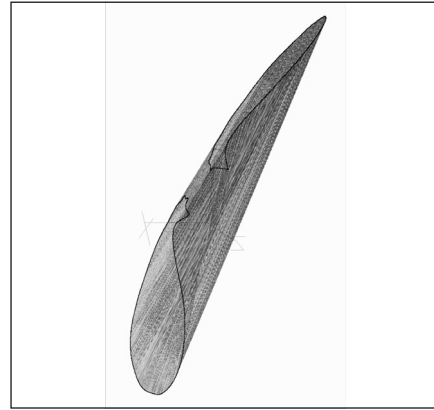


Рис. 3. Аттрактор, возникающий при  $k_{xy}=0,5$ ,  $k_{yx}=0,4$ ,  $k_{yz}=0,3$ ,  $k_{zy}=0,3$ ,  $k_{вых}=0,4$ ,  $p=0,065$ ,  $q=0,03$ ,  $r=0,03$ ,  $x_{вх}=6,05$

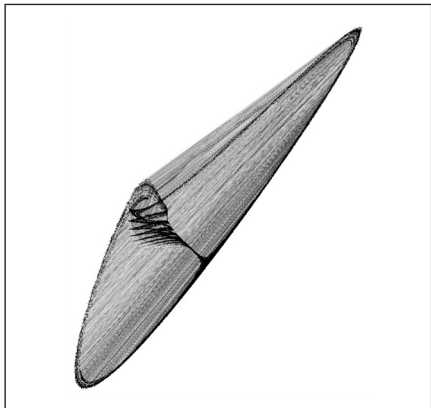


Рис. 4. Странный аттрактор, возникающий при  $k_{xy}=0,5$ ,  $k_{yx}=0,4$ ,  $k_{yz}=0,3$ ,  $k_{zy}=0,3$ ,  $k_{вых}=0,4$ ,  $p=0,008$ ,  $q=0,005$ ,  $r=0,0057$ ,  $x_{вх}=39,65$

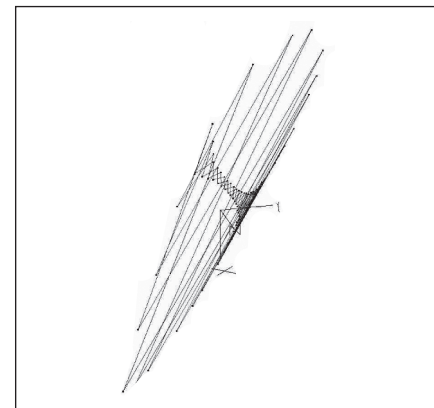


Рис. 5. Аттрактор в режиме синхронизации с управляющими параметрами  $k_{xy}=0,5$ ,  $k_{yx}=0,4$ ,  $k_{yz}=0,3$ ,  $k_{zy}=0,3$ ,  $k_{вых}=0,4$ ,  $p=0,008$ ,  $q=0,005$ ,  $r=0,0057$ ,  $x_{вх}=38$

при этом в фазовом пространстве появляется странный аттрактор (рис. 4). Выяснилось, что при реализации квазипериодического режима в модели может возникать синхронизация. Тогда в системе наблюдается режим с зависящим от степени синхронизации периодом (рис. 5).

Если в системе уравнений (1) используются иные переходные и распределяющие коэффициенты, это, естественно, меняет сценарий эволюции ди-

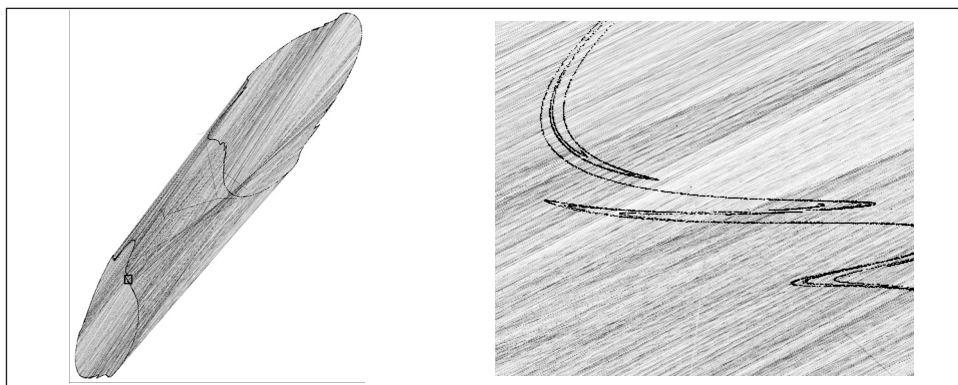


Рис. 6. Странный аттрактор в системе при управляющих параметрах  $k_{xy} = 0,5$ ,  $k_{yx} = 0,1$ ,  $k_{yz} = 0,8$ ,  $k_{zy} = 0,2$ ,  $k_{вых} = 0,4$ ,  $p = 0,05$ ,  $q = 0,05$ ,  $r = 0,045$ ,  $x_{вх} = 11,6$ ; справа — увеличенный фрагмент аттрактора

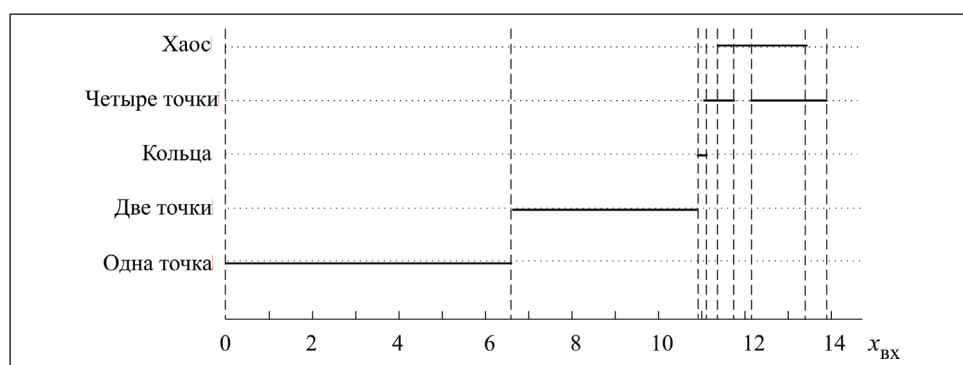


Рис. 7. Бифуркационная диаграмма системы (1) с управляющими параметрами  $k_{xy} = 0,5$ ,  $k_{yx} = 0,1$ ,  $k_{yz} = 0,8$ ,  $k_{zy} = 0,2$ ,  $k_{вых} = 0,4$ ,  $p = 0,05$ ,  $q = 0,05$ ,  $r = 0,045$

намической системы (рис. 6). На рис. 7 представлена бифуркационная диаграмма сценария развития хаоса.

Кроме рассмотренных сценариев развития хаоса в системе могут наблюдаться различные их комбинации. Дальнейшее возрастание значения  $x_{вх}$  системы, уже находящейся в режиме детерминированного хаоса, приводит к изменению формы хаотического аттрактора: возникает перемежаемость, когда хаотическое поведение системы на какой-то промежуток времени сменяется периодическим. На рис. 8 перемежаемости соответствует некоторое уплотнение отрезков, соединяющих точки фазовой траектории, при этом в системе наблюдается мультиаттрактивность и гистерезис по параметру  $x_{вх}$ .

**Модификация модели.** В описанном выше алгоритме реализована обычная итерационная процедура: значения динамических переменных  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , определяющих число частиц на уровнях, фиксируются после каждой

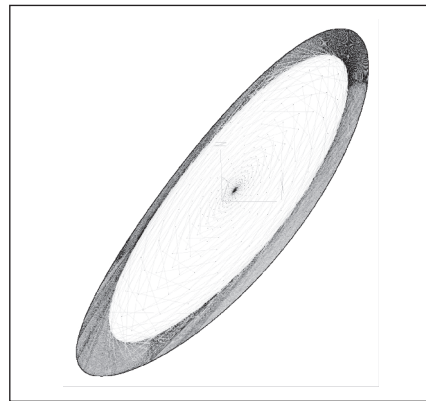
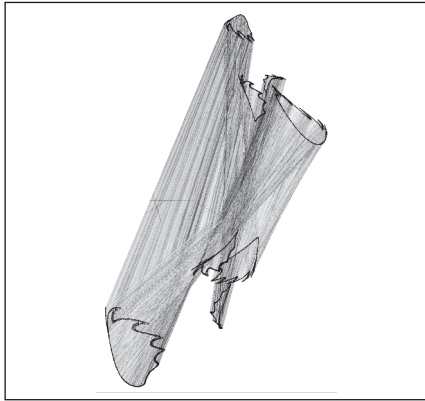


Рис. 8. Странный аттрактор, возникающий при  $k_{xy} = 0,1$ ,  $k_{yx} = 0,1$ ,  $k_{yz} = 0,1$ ,  $k_{zy} = 0,1$ ,  $k_{вых} = 0,2$ ,  $p = 1$ ,  $q = 1$ ,  $r = 1$ ,  $x_{вх} = 1,546$

Рис. 9. Аттрактор квазипериодического режима: фазовая траектория движется от стационарного состояния (точка в центре) к аттрактору в виде кольца ( $k_{xy} = 0,5$ ,  $k_{yx} = 0,1$ ,  $k_{yz} = 0,1$ ,  $k_{zy} = 0,4$ ,  $k_{вых} = 0,5$ ,  $p = 0,05$ ,  $q = 0,02$ ,  $r = 0,01$ ,  $x_{вх} = 30$ )

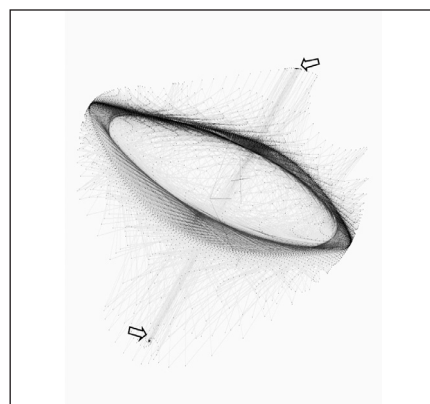
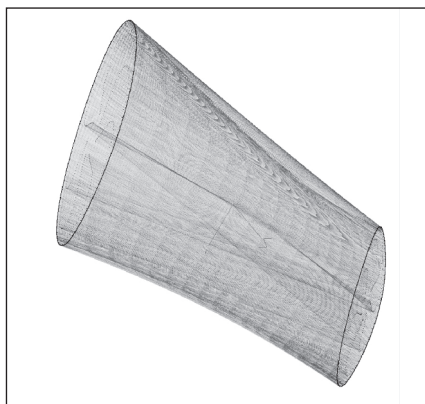


Рис. 10. Аттрактор квазипериодического режима с двумя некратными частотами, возникший после потери устойчивости периодическим аттрактором из двух точек: фазовая траектория по спиральям движется от устойчивого ранее аттрактора из двух точек к новому устойчивому аттрактору ( $k_{xy} = 0,5$ ,  $k_{yx} = 0,2$ ,  $k_{yz} = 0,2$ ,  $k_{zy} = 0,4$ ,  $k_{вых} = 0,5$ ,  $p = 1$ ,  $q = 1$ ,  $r = 1$ ,  $x_{вх} = 0,748$ )

Рис. 11. Аттрактор периодического режима, состоящий из двух точек: фазовая траектория покидает потерявший устойчивость аттрактор в виде кольца и притягивается к двум точкам (указаны стрелками);  $k_{xy} = 0,5$ ,  $k_{yx} = 0,2$ ,  $k_{yz} = 0,2$ ,  $k_{zy} = 0,4$ ,  $k_{вых} = 0,5$ ,  $p = 1$ ,  $q = 1$ ,  $r = 1$ ,  $x_{вх} = 0,713$

итерации и изменяются лишь при получении рассчитанных на их основе новых значений всех трех переменных. Смысл модифицированного алгоритма заключается в последовательном учете изменений значений уже рассчитанных переменных при расчете других переменных в текущей итерации. Эта «бифуркация» алгоритма расчета приводит к изменению пути эволюции системы.

Как и в первом алгоритме, при малых значениях  $x_{\text{вх}}$  в системе существует стационарное состояние, определяемое соотношениями (2). Когда с возрастом  $x_{\text{вх}}$  система выходит из стационарного состояния, часто возникает бифуркация, аналогичная бифуркации Хопфа, и рождается квазипериодический режим с двумя некрратными частотами и аттрактором в виде кольца (рис. 9).

При параметрах  $k_{xy} = 0,5, k_{yx} = 0,2, k_{yz} = 0,2, k_{zy} = 0,4, k_{\text{вых}} = 0,5, p = 1, q = 1, r = 1$  в системе реализуется интересный сценарий развития хаоса: после бифуркации удвоения периода из стационарного состояния рождается периодический режим с аттрактором из двух точек, из которого, в свою очередь, возникает квазипериодический режим и аттрактор в виде двух колец (рис. 10). При увеличении  $x_{\text{вх}}$  кольца деформируются и теряют устойчивость, а фазовая траектория притягивается к устойчивому аттрактору, состоящему из одного кольца. В системе наблюдается мультиаттрактивность, так как аттрактор, состоящий из одного кольца, появился до того, как аттрактор, состоящий из двух колец, потерял устойчивость, при этом каждый из них имел собственную область притяжения.

При возрастании бифуркационного параметра  $x_{\text{вх}}$  аттрактор, состоящий из одного кольца, теряет устойчивость и фазовая траектория притягивается к периодическому аттрактору из двух точек (рис. 11). Дальнейшее увеличение значения  $x_{\text{вх}}$  приводит к появлению хаотического аттрактора в виде кольца. При этом на кольце постепенно возникают складки, количество и размер которых увеличивается с возрастанием значения  $x_{\text{вх}}$ , и в какой-то момент рождается странный аттрактор (рис. 12). На рис. 13 представлена бифуркационная диаграмма описанного сценария.

Третья модификация модели предполагает возможность дополнительного выхода из первого канала ФОС. Учесть это обстоятельство можно введением в систему уравнений дополнительного переходного коэффициента  $k_{\text{вых1}}$ , который указывает, какая доля частиц пыли, находящихся в первом канале, покидает фильтр через этот выход:

$$\Phi 3(x, y, z) = \begin{cases} x_{n+1} = x_n - (k_{xy} + k_{\text{вых1}}) p x_n^2 + k_{yx} q y_n^2 + x_{\text{вх}}, \\ y_{n+1} = y_n + k_{xy} p x_n^2 - (k_{yx} + k_{yz}) q y_n^2 + k_{zy} r z_n^2, \\ z_{n+1} = z_n + k_{yz} q y_n^2 - (k_{zy} + k_{\text{вых}}) r z_n^2. \end{cases} \quad (3)$$

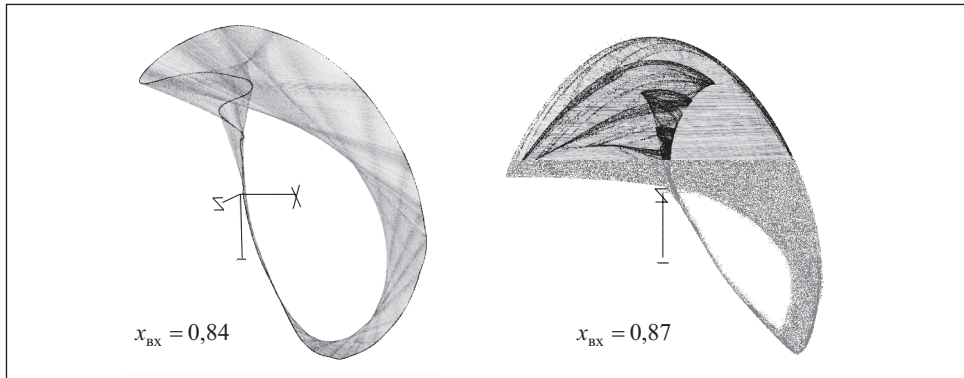


Рис. 12. Странный аттрактор со складками и его эволюция при увеличении значения  $x_{BX}$  ( $k_{xy} = 0,5, k_{yx} = 0,2, k_{yz} = 0,2, k_{zy} = 0,4, k_{вых} = 0,5, p = 1, q = 1, r = 1$ )

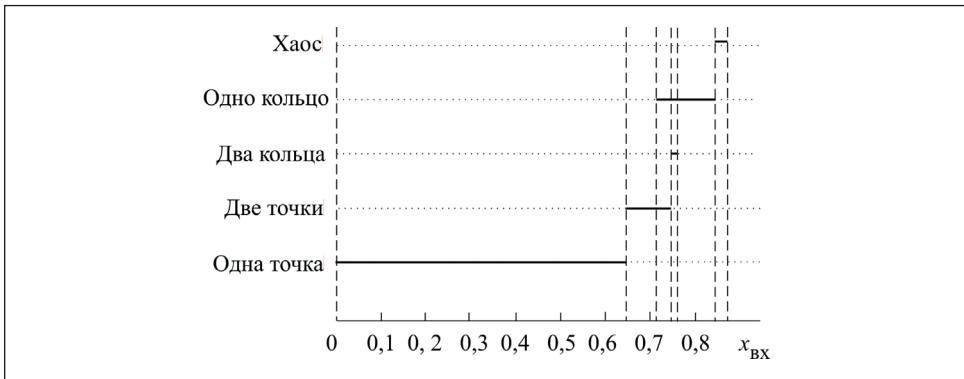


Рис. 13. Бифуркационная диаграмма для второго варианта динамической системы ( $k_{xy} = 0,5, k_{yx} = 0,2, k_{yz} = 0,2, k_{zy} = 0,4, k_{вых} = 0,5, p = 1, q = 1, r = 1$ )

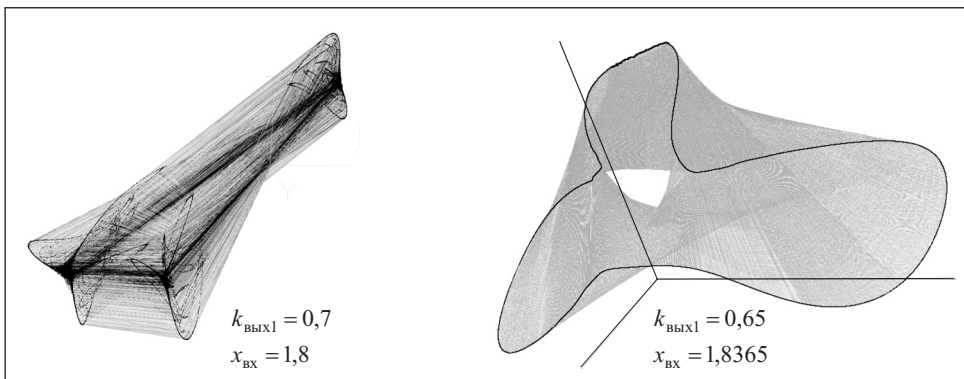


Рис. 14. Странный аттрактор режима с перемежаемостью ( $k_{xy} = 0,5, k_{yx} = 0,4, k_{yz} = 0,3, k_{zy} = 0,3, k_{вых} = 0,4, p = 1, q = 1, r = 1$ )



Стационарное решение этой системы имеет вид

$$x_{\text{ст}} = \sqrt{\frac{x_{\text{вх}}}{\left[ k_{xy} + k_{\text{вых1}} \left( \frac{k_{yx}}{k_{yz}} \left( \frac{k_{zy}}{k_{\text{вых}}} + 1 \right) + 1 \right) \right]} p \left( \frac{k_{yx}}{k_{yz}} \left( \frac{k_{zy}}{k_{\text{вых}}} + 1 \right) + 1 \right)},$$

$$y_{\text{ст}} = \sqrt{\frac{x_{\text{вх}} - k_{\text{вых1}} p x_{\text{ст}}^2 \left( \frac{k_{zy}}{k_{\text{вых}}} + 1 \right)}{k_{yz} q}},$$

$$z_{\text{ст}} = \sqrt{\frac{x_{\text{вх}} - k_{\text{вых1}} p x_{\text{ст}}^2}{k_{\text{вых}} r}}.$$

В системе, как и в двух предыдущих, наблюдаются два сценария перехода к хаосу с возрастанием  $x_{\text{вх}}$  (через каскад удвоений периода и через квазипериодические режимы), возможна мультиаттрактивность, наблюдается режим перемежаемости. На рис. 14 представлены возникающие в системе (3) аттракторы.

**Выводы.** Предложенная математическая модель позволяет изучать воздушный центробежный фильтр с обратными связями как открытую нелинейную динамическую систему. Модель сформулирована как универсальная, что дает возможность исследовать развитие во времени абстрактных систем, состоящих из подсистем, взаимодействующих по произвольным законам.

Апробирована методика численного решения системы  $n$  нелинейных итерационных уравнений, в связи с чем появилась возможность поиска путей интенсификации работы центробежного фильтра без натурных экспериментов.

Полученные результаты являются промежуточным итогом изучения системы. Одним из направлений дальнейших исследований может быть моделирование динамических систем с произвольным числом взаимодействующих уровней, анализ топологических свойств  $n$ -мерных сечений Пуанкаре, исследование возможностей классификации процессов эволюции системы по результатам размерностного анализа.

Results of equipment work modeling are described as an open dynamic system with interactive levels an example of air centrifugal filter. Operating regimes and self-organization processes, a randomness two-phase flow level dependence on incoming flow intensity and constructive equipment features are studied.

1. Буров А. И. Гидравлика стратифицированных криволинейных течений в аппаратах с обратными связями. — Автореф. дис. ... д-ра техн. наук. — Л., 1991.
2. Гереча А. Н. Модель коагуляции в циркулирующем потоке. / IV Сибирский конгресс по индустриальной и прикладной математике (ИНПРИМ—2000) — Новосибирск, 2000.
3. Гереча А. Н. Иерархическая модель кластерообразования в многоуровневой системе. // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. — 2003. — № 12. — С. 88—91.
4. Асланов А. М., Гереча А. Н., Лозовский Т. Л. Коагуляция частиц в стохастических системах. Классификация потоков. // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. — 2004. — № 15. — С. 19—23.
5. Асланов А. М., Гереча А. Н., Лозовский Т. Л. Две модели стохастических процессов в центробежных фильтрах с обратными связями. // ЖТФ — 2006. — № 6. — С. 134—135.
6. Фейгенбаум М. Универсальность в поведении нелинейных систем. // УФН — 1983. — Т. 141, вып. 2. — С. 343 — 374.
7. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. — М. : Мир, 1991. — 368 с.
8. Лихтенберг А., Либман М. Регулярная и стохастическая динамика. — Череповец: Меркурий-пресс, 2000. — 528 с.

Поступила 11.10.07

*ГЕРЕГА Александр Николаевич, канд. техн. наук, доцент, зав. кафедрой информационно-управляющих систем Одесской государственной академии холода. В 1982 г. окончил Одесский госуниверситет. Область научных исследований — компьютерное материаловедение, фрактальные кластеры, математическое моделирование, динамические системы, детерминированный хаос.*

*ЛОЗОВСКИЙ Тарас Леонтьевич, аспирант Одесской государственной академии холода, которую окончил в 2007 г. Область научных исследований — детерминированный хаос, математическое моделирование.*