
УДК 512.972

Ю. Н. Минаев, д-р техн. наук
Национальный авиационный университет
(Украина, 03057, Киев, пр-т Космонавта Комарова, 1,
тел.: (044) 4067678, E-mail: minaev@iit.nau.edu.ua),

О. Ю. Филимонова, канд. техн. наук
Киевский национальный университет строительства и архитектуры
(Украина, 03037, Киев, Воздухофлотский пр-т, 31,
тел.: (044) 2415452, E-mail: filimonova@nm.ru)

Нечеткая математика на основе тензорных моделей неопределенности. II. Операции нечеткой математики в тензорном базисе

(Статью представил д-р техн. наук В.Г. Тоценко)

Рассмотрены проблемы, связанные с выполнением арифметических операций над нечеткими переменными, представленными в виде тензор-переменных (ТП). Показана адекватность операций, выполняемых над ТП и их инвариантами. Приведены примеры.

Розглянуто проблеми, пов'язані з виконанням арифметичних операцій з нечіткими змінними, які мають вигляд тензор-змінних (ТЗ). Показано адекватність операцій, які виконуються над ТЗ та їхніми інваріантами. Наведено приклади.

К л ю ч е в ы е с л о в а: нечеткая математика, тензор, инвариант.

Интеллектуальные вычисления (ИВ) — это компьютерные технологии, предназначенные для проведения интеллектуального анализа данных с помощью вычислительных процедур, в которых используются методы и модели, имитирующие умственную и поведенческую деятельность человека при решении конкретной прикладной задачи. В работах [1, 2] главный принцип ИВ, называемых мягкими вычислениями, определяется как терпимость к неточности и частичной истинности для достижения интерпретируемости, гибкости и низкой стоимости решений. По мнению авторов [1, 2], частичная истинность является основным признаком, по которому ИВ отличают от вычислений на основании искусственного интеллекта. Следует заметить, что имитация умственной и поведенческой деятельности присутствует (прямо или косвенно) во всех определениях, в частности, это проявляется в наличии самоорганизации или обучения (эти понятия, достаточно близки).

Интеллектуальные вычисления широко применяются для решения задач обработки, анализа и интерпретации нечеткой, недостоверной или противоречивой информации. В [3] рассмотрено тензорное моделирование неопределенности, предложено представление нечеткой переменной (НП), интервальной переменной (ИП) в виде тензора (тензор-переменная (ТП), тензор-интервал (ТИ)). Интеллектуальные вычисления, как правило, базируются на теории нечетких множеств, НП является основным объектом вычислительных процедур или обобщенно — процедур компьютерной обработки.

Предложенная в [3] тензорная концепция в нечетких множествах основана на том, что тензоры представляют собой физическое состояние информации, зависимой от избранной координатной системы, в которой она измеряется или воспроизводится. В данном случае система координат не является системой координат в математическом понимании, а означает точку зрения отдельного индивида (эксперта), которая, в частности, проявляется в назначении функции принадлежности (ФП) или способа получения (обработки) информации. В зависимости от свойств, которые нужно подчеркнуть, тензор может быть эквивалентно определен несколькими способами. Каждое из определений тензора есть взаимозависимым и часто не может обсуждаться отдельно [1]. В соответствии с принятой компонентной формой представления, тензор — это множество компонент, связанных с определенной системой координат, которая трансформируется согласно специальным правилам координатных систем. Трехмерный тензор второго порядка, выбранный базовым для представления НП (нечеткого числа (НЧ)), состоит из девяти компонент, объединенных в квадратную матрицу. Обратим внимание на то, что базовым является тензор второго ранга, рассматриваемый в матричном представлении.

Такой выбор базиса обусловлен, тем, что, во-первых, НП может быть представлена в виде треугольной ФП, во-вторых, интервальная форма определения переменной предусматривает наличие трех значений — максимального, минимального и среднего. В пользу тензорного представления НП (НЧ) свидетельствует также то обстоятельство, что тензоры высоких порядков имеют свойство свертки, согласно которому эти тензоры могут быть представлены тензорами более низких порядков. Это, во-первых, упрощает анализ, во-вторых, расширяет возможности моделирования НП и арифметических операций над ними. В частности, для тензорных моделей НП могут быть определены обратные величины, что невозможно в нечеткой математике, сформулированной на нечетких множествах. Полная обработка трансформационных правил для компонент является комплексной, содержит селекцию (часто произвольную) группы координатных трансформацион-

ных функций и связана компонентными трансформационными функциями, которые выделяют тензорные величины и сохраняют желательные инварианты.

Диада является основным базисным видом ТП. Как известно, диада имеет присоединенную матрицу — эквивалент внешнего произведения векторов. Диады — это отдельный вид тензоров. Рассмотрим некоторые операции над диадами. Сумма двух диад — это объект, определяемый равенством $(x\mu + y\nu) \bullet t = x(\mu \bullet t) + y(\nu \bullet t) (\forall t)$, трех диад $x\mu, y\nu, z\tau$ — равенством $(x\mu + y\nu + z\tau) \bullet t = x(\mu \bullet t) + y(\nu \bullet t) + z(\tau \bullet t)$. Матрица, связанная с суммой двух диад, определяется простым добавлением соответствующих матриц. Скалярное произведение диад имеет вид $[\gamma(x\mu)] \bullet t = \gamma x(\mu) \bullet t$ [4—7].

Тензор 3-го порядка $H = H_{ijk}e_i e_j e_k$ можно рассматривать как действие линейного оператора (вектора) на тензор 2-го порядка. Аналогично можно определить тензор 4-го порядка, используя новый объект — тетраду и так далее.

Математические операции в системе ТП. Тензор-переменную, моделирующую НП, можно рассматривать как матрицу (проекцию тензора) или совокупность инвариантов, однозначно и адекватно представляющих объект, т. е. НП. Рассмотрим основные операции над тензорами, позволяющие сделать обобщение операций над НП [4, 5, 7—9]:

транспонирование тензора A в тензор A^T — записывается в виде $u \bullet (A^T \bullet v) = u \bullet (A \bullet v) (\forall v)$ или в индексной нотации $u_i A_{ij}^T v_j = v_m A_{mn} u_n$;

умножение (левостороннее) вектора u на тензор $u \bullet A = A^T \bullet u$ или $A \bullet u = u \bullet A^T$ — результатом является вектор;

двустороннее умножение, $u \bullet A \bullet v = (u \bullet A) \bullet v = u \bullet (A \bullet v) = u_i A_{ij} v_j$;

Обозначив внутреннее произведение через «:», записываем $u \bullet A \bullet v = A : uv = uv : A$, для отдельной компоненты $A_{ij} = e_i \bullet A \bullet e_j = A : e_i e_j$;

композиция тензоров $A \bullet B$ имеет вид $A \bullet B = A_{ij} e_i e_j \bullet B_{kl} e_k e_l = A_{ij} B_{kl} e_i e_j \bullet e_k e_l = A_{ij} B_{kl} \delta_{jk} e_j e_l$, если $e_j \bullet e_k = \delta_{jk}$.

Если известно, что функция $f(x)$ линейная, то существует тензор 2-го порядка F , независимый от x , так что функция $f(x)$ может быть записана как $F \bullet x$. В индексной нотации уравнение $y = F \bullet x$ может быть записано в виде $y_j = F_{ij} \bullet x_j$. Эта форма используется при реализации операций над НП (НЧ). Тензор, связанный с композицией двух линейных преобразований, может быть представлен так: для линейных преобразований справедливы равенства $f(x) = F \bullet x$ и $g(x) = G \bullet x$. Для $f(g(x))$ выполняется равенство $f(g(x)) = F \bullet (G \bullet x) = (F \bullet G) \bullet x (\forall x)$. Компоненты $(F \bullet G)$ находим как $(F \bullet G)_{ij} = F_{ik} G_{kj}$, что можно получить в виде матричного произведения матриц $[F][G]$. Обратный тензор к тензору G определяется из

условий $x = (G^{-1} \bullet G) \bullet x$ или $G^{-1} \bullet G = I$, где I — единичный тензор. Матрица G^{-1} является обратной матрицей к G .

Следует заметить, что в теории нечетких множеств НП или НЧ не имеют определения обратной величины.

Тензорные функции. Известно, что тензор может быть разложен на симметричную $\text{sym} A = (A + A^T)/2$ и асимметричную части $\text{skw} A = (A - A^T)/2$, $A = \text{sym} A + \text{skw} A = (A^S + A^a)$. Симметричный и асимметричный тензоры используют как примитивные тензорные функции $P(A) = (A + A^T)/2$ и $Q(A) = (A - A^T)/2$, аргументом которых является тензор. Оператор проекции в этом случае определяется соотношением $P(P(A)) = P(A)$. Тензорные функции рассмотренного типа могут быть сконструированы на основе разложения тензора на девиаторную и шаровую части, $A = A^{\text{dev}} + A^{\text{iso}}$, где для тензора 2-го ранга $A^{\text{iso}} = (\text{tr} A)/3$, $\text{tr} A = A_{kk} = A_{11} + A_{22} + A_{33}$, $A^{\text{dev}} = A - ((\text{tr} A) I)/3$. В этом случае следует сделать вывод о том, что функции от НЧ(НП) в тензорном представлении являются тензорными. В работе [10] рассмотрены тензорные функции, определенные через инварианты.

Тензорные операции. Внутреннее произведение для двух тензоров 2-го порядка (обозначение $A:B$) определяется так:

$$A:B = \text{tr}(A^T \bullet B) = \text{tr}(A \bullet B^T).$$

Представляется важным случай внутреннего произведения для двух диад:

$$ab:rs = a_m b_n r_m s_n = (a \bullet r)(b \bullet s).$$

Внутреннее произведение для тензоров 4-го порядка следует определять дополнительно, так как в ряде случаев, НП представляют тензором, матрица которого имеет вид 9×9 . Это произведение обозначаем как $X::Y$. Оно является скаляром и определяется по формуле $X::Y = X_{ijkl} Y_{ijkl}$. Скаляр есть аналог соответствующей операции над тензорами 2-го порядка. Следует заметить, что внутреннее произведение тензора 4-го порядка может быть также определено для его свертки. Кроме того, его можно определить и таким способом:

$$A:B = \text{sym} A : \text{sym} B + \text{skw} A : \text{skw} B,$$

$$A:B = \text{dev} A : \text{dev} B + \text{iso} A : \text{iso} B,$$

Тензорные инварианты. Возможность адекватного представления тензора своими инвариантами имеет прикладное значение в случае его применения для моделирования НП или НЧ. Известно, что для принятия решения используют дефадзифицированные значения НП(НЧ), и тензорные инварианты играют роль таких дефадзификаций. Для любого тензора можно определить главные и присоединенные (независимые) инварианты.

Главные инварианты — минимальное множество инвариантов тензора (любого порядка) такое, что, во-первых, все другие инварианты могут быть определены через эти инварианты и, во-вторых, они могут быть определены через собственные значения тензора. Симметричный тензор 2-го порядка имеет три главных инварианта, так как число собственных значений равняется трем. Следует заметить, что число главных инвариантов любого симметричного тензора, совпадает с числом собственных значений. В этом случае все инварианты могут быть определены через собственные значения. Несимметричный тензор имеет большее число инвариантов, но не все из них могут быть определены через собственные значения. В общем случае тензор 2-го ранга имеет восемь независимых инвариантов [5, 6].

Наиболее распространенными инвариантами есть так называемые следы, $I = \text{tr}T$, $II = \text{tr}(T^2)$, $III = \text{tr}(T^3)$ которые с помощью собственных значений могут быть представлены так:

$$I = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad II = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \quad III = \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3.$$

С помощью компонент тензора инварианты могут быть представлены в виде

$$I_1 = \text{tr}T = \sum_{i=1}^3 t_{ii}, \quad I_2 = \sum_{j=1}^3 \text{Co}_j, \quad I_3 = \det(T),$$

где

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}, \quad \text{Co}_1 = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{Co}_2 = \begin{pmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}, \quad \text{Co}_3 = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{13} \\ T_{31} & T_{33} \end{pmatrix}.$$

Для T^{-1} справедливо соотношение

$$T^{-1} = \frac{T^2 - I_1 T + I_2 I}{I_3},$$

где I_1, I_2, I_3 — характеристические инварианты, так как их значения получают в результате решения характеристического уравнения $\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0$. Если собственные значения тензора известны, то $I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, $I_2 = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3$, $I_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$. В свою очередь, следы имеют вид $\text{tr}T = I_1$, $\text{tr}(T^2) = I_1^2 - 2I_2$, $\text{tr}(T^3) = I_1^3 - 3I_1 I_2 + 3I_3$. Последнее соотношение справедливо для трехмерных тензоров. Для тензора в четырехмерном измеримом пространстве характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^4 - I_1 \lambda^3 + I_2 \lambda^2 - I_3 \lambda + I_4 = 0$.

Так же, как используется подмножество дефадзификаций (максимальное или среднее значения, центр тяжести и др.), может быть использовано подмножество инвариантов тензора для упрощенного представления тензора, в данном случае тензор-переменной, моделирующей НП. Рассмотрим связь операций над тензорами с аналогичными операциями над их инвариантами. Заметим, что над тензорами выполняются алгебраические операции, а над инвариантами — арифметические.

Сумма двух тензоров, $T=A+B$, может быть определена с помощью инвариантов [4, 5]:

$$A+B \leftrightarrow I_1^{A+B} = \text{tr}A + \text{tr}B = I_1^A + I_1^B.$$

Если учесть, что $I_2 = 1/2(I_1^2 - \text{tr}(T^2))$, то $I_2^{A+B} = 1/2((\text{tr}A + \text{tr}B)^2 - \text{tr}(A+B)^2)$. После упрощения получаем $I_2^{A+B} = I_2^A + I_2^B + I_1^A I_1^B - \text{tr}(A \bullet B)$. Для третьего инварианта справедливо следующее: $I_3^{A+B} = \det(A+B) = I_3^A + I_3^B + A^c : B + A : B^c$. Для диадного тензора $B = uv$ находим $I_1^B = u \bullet v$, $I_2^B = 0$, $I_3^B = 0$.

Этот результат важен для нечеткой математики, так как первый инвариант представляет собой дефадзифицированное значение НЧ(НП), что позволяет существенно упростить арифметические операции над НЧ в тензорном базисе.

О полноте системы тензорных инвариантов. При использовании тензорных инвариантов для реализации операций нечеткой математики возникает проблема восстановления результата, т. е. на основании результирующей системы инвариантов нужно восстановить результирующий тензор. Возможно также усложнение задачи — восстановить результат в форме НП. Для решения этой задачи необходимо определить, насколько полной должна быть система инвариантов, чтобы восстановить тензор.

Рассмотрим первый случай: результатом операции является симметричный тензор. Как известно, для симметричного тензора T выполняются такие условия: $t_{ij} = -t_{ji}$, $t_{ii} = t$, $i, j = 1, 2, 3$, т.е. число переменных, которые нужно определить, чтобы восстановить тензор, равняется четырем. В данном случае можно сформулировать четыре условия, которых недостаточно для определения компонент тензора t_{ij} , t_{ii} $i, j = 1, 2, 3$. Эти условия, как известно, определяются главными инвариантами.

Известно [5], что любой тензор может быть разложен на симметричный P и несимметричный W тензоры. В этом случае можно сформулировать множество инвариантов.

$$I_1 = \text{tr} P, I_2 = \text{tr} P^2, I_3 = \text{tr} P^3, I_4 = \text{tr} W^2, \\ I_5 = \text{tr} PW^2, I_6 = \text{tr} P^2W^2, I_7 = \text{tr} P^2W^2PW.$$

Если к этому множеству инвариантов прибавить магнитуду I_0 и один из так называемых ортогональных инвариантов [9, 11—13]

$$I_8 = \tau = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\text{tr} [T \cdot T] - \frac{1}{3} \text{tr} [T]^2 \right)} = \sqrt{\frac{1}{2} \text{tr} [Dv \cdot Dv]} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{6} ((S_1 - S_2)^2 + (S_1 - S_3)^2 + (S_3 - S_2)^2)},$$

где S_1, S_2, S_3 — собственные значения тензора, то получим девять условий, которых достаточно, чтобы определить все компоненты тензора результата.

Восстановление первоначального тензора по результатам операции над его инвариантами для операций нечеткой математики имеет важное значение, так как, во-первых, наличие восстановленного тензора позволяет осуществить дополнительную проверку главных теоретических положений, во-вторых, существенно повышается конструктивность результата для его дальнейшего использования.

Итак, полагаем, что существуют два тензора, T^A, T^B , и тензор T^C , полученный в результате определенных операций над T^A, T^B , т. е. $T^C = T^A *_T T^B$, где $*_T$ — тензорная операция. Укажем, что в рассматриваемом случае тензор моделирует НП (НЧ). Предположим также, что каждый из тензоров имеет свою систему инвариантов, которая для произвольного тензора состоит из главных инвариантов, полученных на основании собственных значений (стандартные и ортогональные инварианты) и магнитуды: $S^A(T^A), S^B(T^B), S^C(T^C)$ и $S^A(T^A) *_T S^B(T^B) = S^C(T^C)$. По значениям S^C необходимо определить компоненты $T^C = \{T_{ij}^C\}, i, j = 1, n$.

Для решения поставленной задачи целесообразно применить теоремы представления, изложенные в [4, 14 — 16].

Экспериментальная проверка. Проверка адекватности выполнения операций в системе ТП и их инвариантов была выполнена с учетом следующих условий:

параллельное выполнение арифметических операций над инвариантами ТП и алгебраических операций над ТП;

определение приближенных (упрощенных) методов выполнения операций над ТП;

восстановление результата в виде «значение/функция принадлежности», если он получен в виде ТП.

Рассмотрим операцию умножения ТП, так как тензорное произведение двух тензоров, представленных в виде матриц, и произведение двух

матриц дают различные результаты. Кроме того, тензорное произведение увеличивает ранг тензора и существует отдельная операция — произведение со сверткой. Результаты моделирования операций получены в системе MatLab.

Одним из наиболее распространенных способов выполнения операций нечеткой арифметики является способ, при котором арифметическая операция выполняется как четкая на α -уровне и полученному результату приписывается минимальная ФП компонент. Этот способ с некоторыми дополнениями реализован в виде так называемого матричного принципа, который состоит в том, что выполнение операций нечеткой математики $\tilde{z} = \tilde{x} *_f \tilde{y} = \{x/\mu_x\} *_f \{y/\mu_y\}$, где $*_f \in \{+, -, *, /\}$ — арифметическая операция, выполняется при условии, что каждый элемент результата определяется в виде $z_{ij} = x_i *_f y_j$, а ФП — соответственно в виде $\mu_z = \min(\mu_x, \mu_y)$ (одна компонента операции представляется ковариантным вектором, вторая — контрвариантным). Дополнительное условие заключается в том, что форма представления результата должна совпадать с формой представления компонент операции. Например, если число элементов нечеткого множества (НМ), представляющего переменную, равно трем, то результат должен быть аппроксимирован до этого же числа элементов.

На рис. 1 и в табл. 1 приведены результаты выполнения операций $\tilde{x} + \tilde{y} = \tilde{3} + \tilde{5}$ и $\tilde{x} *_f \tilde{y} = \tilde{3} *_f \tilde{5}$. Как видим, аппроксимация результатов в требуемой форме может быть выполнена следующими способами:

выделением кросс-множества, образуемого пересечением строки и столбца, на пересечении которых стоит элемент с максимальным значением ФП, и последующим использованием строки или столбца;

выделением диагонали матрицы результата;

конструированием решения с использованием строки и столбца.

Таким образом, имеем следующие варианты аппроксимаций результатов:

$$\tilde{x} + \tilde{y} = \tilde{3} + \tilde{5} \stackrel{\text{def}}{=} \{6/0,25 \ 8/0,9 \ 10/0,1\} \text{ — строка,}$$

$$\{6/0,55 \ 8/0,9 \ 10/0,55\} \text{ — столбец,}$$

$$\{4/0,25 \ 8/0,9 \ 12/0,1\} \text{ — диагональ;}$$

$$\tilde{x} *_f \tilde{y} = \tilde{3} *_f \tilde{5} \stackrel{\text{def}}{=} \{5/0,25 \ 15/0,9 \ 25/0,1\} \text{ — строка,}$$

$$\{9/0,55 \ 15/0,9 \ 21/0,55\} \text{ — столбец,}$$

$$\{3/0,25 \ 15/0,9 \ 35/0,1\} \text{ — диагональ.}$$

Следует заметить, что согласно теории НМ эти аппроксимации являются абсолютно эквивалентными и имеют такое же значение, как, например, различные способы дефадзификации, так как способ дефадзификации прямо зависит от способа аппроксимации результата.

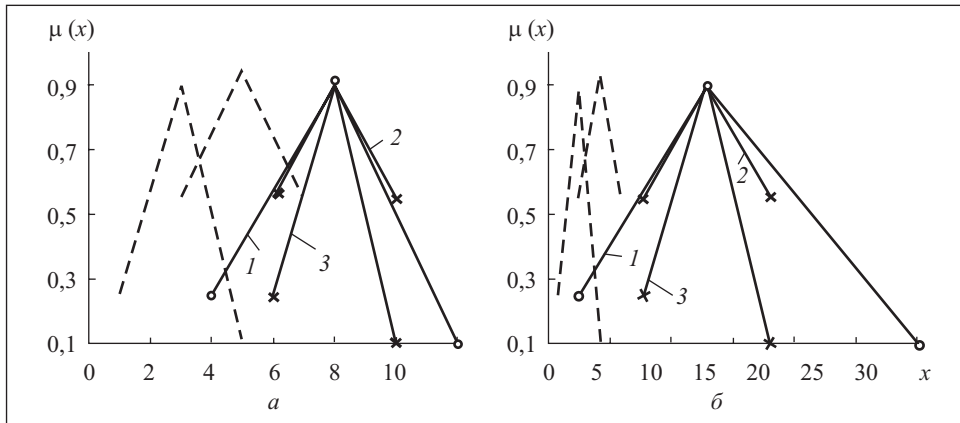


Рис. 1. Выполнение арифметических операций $\tilde{x} + \tilde{y} = \tilde{3} + \tilde{5}$ (а) и $\tilde{x} * \tilde{y} = \tilde{3} * \tilde{5}$ (б): 1 — строка кросс-множества матрицы результата; 2 — столбец; 3 — диагональ; ---- компоненты операции $\tilde{3}, \tilde{5}$; — результат

Результаты арифметической операции $\tilde{3} + \tilde{5} = \{1/0,25 \ 3/0,90 \ 5/0,10\} + \{3/0,55 \ 5/0,95 \ 7/0,55\}$ и $\tilde{3} * \tilde{5} = \{1/0,25 \ 3/0,90 \ 5/0,10\} * \{3/0,55 \ 5/0,95 \ 7/0,55\}$ приведены на рис. 2 и 3.

В табл. 2 приведены результаты моделирования арифметической операции $\tilde{3} + \tilde{5}$ с помощью НП и ТП, а также соответствующие величины следов (первый инвариант) для компонент операции и результата. Следует заметить, что результат операции $\tilde{3} + \tilde{5}$ в виде $\{40,25 \ 8/0,90 \ 12/0,10\}$ является аппроксимацией, соответствующая ТП имеет вид

$$Tz_1 = \begin{pmatrix} 1,00 & 2,00 & 3,00 \\ 3,60 & 7,20 & 10,80 \\ 0,40 & 0,80 & 1,20 \end{pmatrix},$$

ее след составляет 9,40, так как аппроксимация, существенно отличается от Tz .

Таблица 1. Выполнение арифметических операций и выделение кросс-множества аппроксимаций

$\tilde{x} = \{x / \mu_x\}$			$\tilde{x} = \{x / \mu_x\}$			$\tilde{x} = \{x / \mu_x\}$		
1/0,25	3/0,9	5/0,1			1/0,25	3/0,9	5/0,1	
4/0,25	6/0,55	8/0,1	3/0,55	$\tilde{y} = \{y / \mu_y\}$	3/0,25	9/0,55	15/0,1	3/0,55
6/0,25	8/0,9	10/0,1	5/0,95		5/0,25	15/0,9	25/0,1	5/0,95
8/0,25	10/0,55	12/0,1	7/0,55		7/0,25	21/0,55	35/0,1	7/0,55

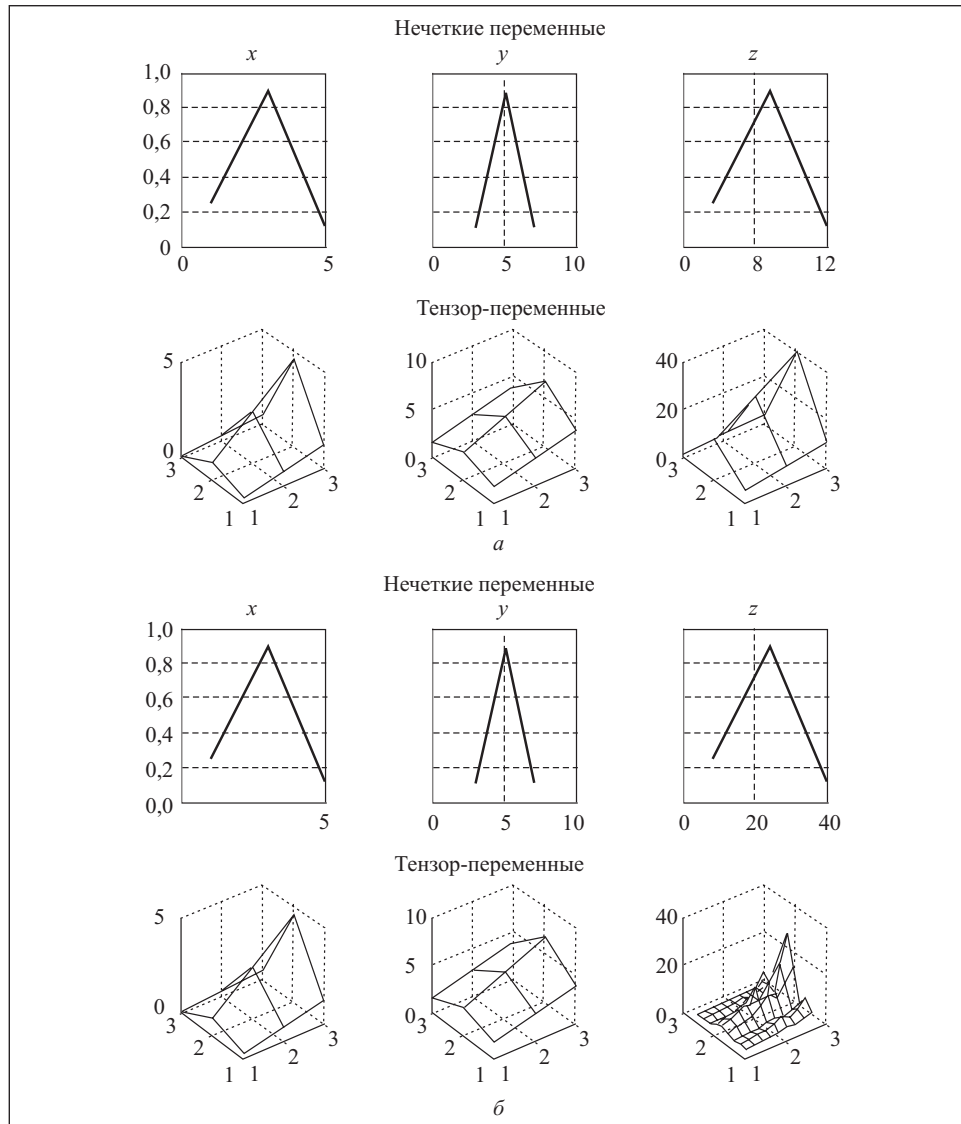


Рис. 2. Сравнительная визуализация арифметической операции $\tilde{3} + \tilde{5}$ (а) и $\tilde{3} * \tilde{5}$ (б)

Аппроксимированный результат операции $\tilde{3} * \tilde{5}$ принимается в виде НП $\tilde{15} = \{3/0,25 \ 15/0,90 \ 35/0,1\}$. Соответствующая ТП имеет вид

$$Tz = \begin{pmatrix} 0,75 & 3,75 & 8,75 \\ 2,70 & 13,50 & 31,50 \\ 0,30 & 1,50 & 3,50 \end{pmatrix}.$$

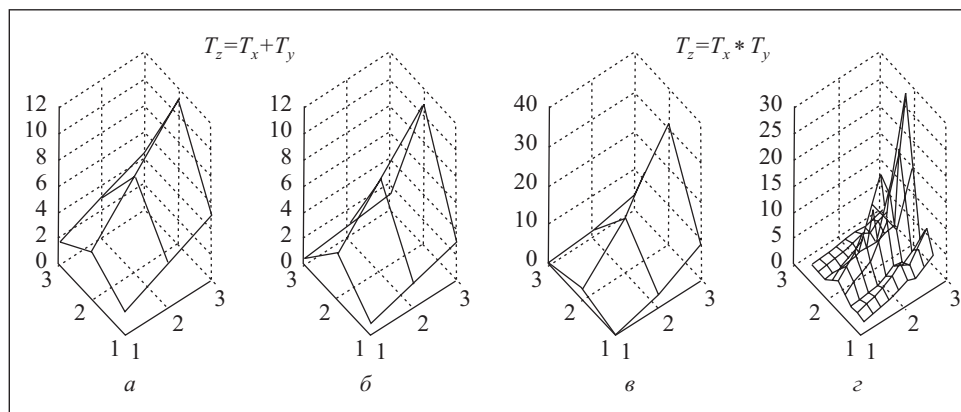


Рис. 3. Сравнительная характеристика результата: а, в — преобразование НП результата в тензор-переменную; б — сумма тензор-переменных; г — тензорное произведение тензор-переменных

Тензорное произведение двух ТП, T_x и T_y , получаем в виде тензора четвертого ранга:

$$T_{z_2} = \begin{pmatrix} 0,4125 & 0,6875 & 0,9625 & 1,2375 & 2,0625 & 2,8875 & 2,0625 & 3,4375 & 4,8125 \\ 0,7125 & 1,1875 & 1,6625 & 2,1375 & 3,5625 & 4,9875 & 3,5625 & 5,9375 & 8,3125 \\ 0,4125 & 0,6875 & 0,9625 & 1,2375 & 2,0625 & 2,8875 & 2,0625 & 3,4375 & 4,8125 \\ 1,4850 & 2,4750 & 3,4650 & 4,4550 & 7,4250 & 10,3950 & 7,4250 & 12,375 & 17,325 \\ 2,5650 & 4,2750 & 5,9850 & 7,6950 & 12,825 & 17,9550 & 12,8250 & 21,375 & 29,925 \\ 1,4850 & 2,4750 & 3,4650 & 4,4550 & 7,4250 & 10,3950 & 7,4250 & 12,375 & 17,325 \\ 0,1650 & 0,2750 & 0,3850 & 0,4950 & 0,8250 & 1,1550 & 0,8250 & 1,3750 & 1,9250 \\ 0,2850 & 0,4750 & 0,6650 & 0,8550 & 1,4250 & 1,9950 & 1,4250 & 2,3750 & 3,3250 \\ 0,1650 & 0,2750 & 0,3850 & 0,4950 & 0,8250 & 1,1550 & 0,8250 & 1,3750 & 1,925 \end{pmatrix}.$$

Соответствующие следы: $\text{tr } T_z = 5,75$, $\text{tr } T_{z_2} = 3,94$. Достаточно существенное различие следов можно объяснить принятой аппроксимацией результата, так как действительная форма поверхности результата имеет значительно больше пиков, чем его аппроксимация.

Таблица 2. Моделирование арифметической операции $\tilde{3} + \tilde{5}$

$\tilde{x}: (x = \{1\ 3\ 5\}, \mu_x = \{0,25\ 0,90\ 0,10\})$	$\tilde{y}: (y = \{3\ 5\ 7\}, \mu_y = \{0,55\ 0,95\ 0,55\})$	$\tilde{z} = \tilde{x} + \tilde{y}: (z = \{4\ 8\ 12\}, \mu_z = \{0,25\ 0,90\ 0,10\})$
$T_x = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,75 & 1,25 \\ 0,90 & 2,70 & 4,50 \\ 0,10 & 0,30 & 0,50 \end{pmatrix}$ $\text{tr } x = 3,45$	$T_y = \begin{pmatrix} 1,65 & 2,75 & 3,85 \\ 2,85 & 4,75 & 6,65 \\ 1,65 & 2,75 & 3,85 \end{pmatrix}$ $\text{tr } y = 10,25$	$T_z = T_x + T_y = \begin{pmatrix} 1,90 & 3,50 & 5,10 \\ 3,75 & 7,45 & 11,15 \\ 1,75 & 3,05 & 4,35 \end{pmatrix}$ $\text{tr } z = \text{tr } x + \text{tr } y = 13,70$

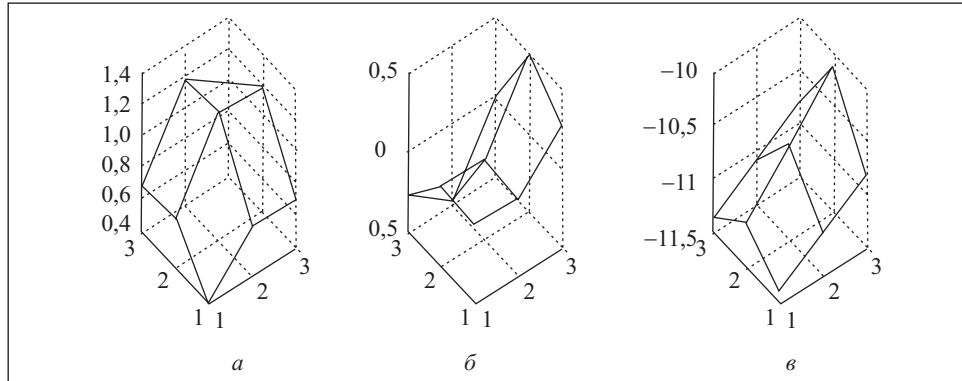


Рис. 4. Присоединенные тензоры результата: *a* — симметричный тензор; *b* — асимметричный тензор; *v* — девиатор

На рис. 4 приведены присоединенные тензоры результата. Их использование позволяет получить дополнительную информацию о результате.

Вычислительные процедуры на основе ТП. Итерационные процессы в системе тензор-переменных. Исходная (четкая) система уравнений имеет вид

$$Ax = b = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Положим, что коэффициенты матрицы A и векторы b и x являются нечеткими переменными (числами), $\tilde{a}_{ij} \in \tilde{A}$, $\tilde{a}_{ij} := \{a_{ij}^k / \mu_{a_{ij}}^k\}$, $\tilde{b}_j \in \tilde{b} := \{b_j^k / \mu_{b_j}^k\}$, $\tilde{x}_i \in \tilde{x} := \{x_i^k / \mu_{x_i}^k\}$, $i, j = 1, n$; $k = 1, K$, и представлены диагональными свертками ТП, соответствующих НП(НЧ),

$$\tilde{a}_{ij} \rightarrow T_{ij}^a = \begin{pmatrix} t_{a_{ij}}^1 & 0 & 0 \\ 0 & t_{a_{ij}}^2 & 0 \\ 0 & 0 & t_{a_{ij}}^3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b}_j \rightarrow T_j^b = \begin{pmatrix} t_{b_j}^1 & 0 & 0 \\ 0 & t_{b_j}^2 & 0 \\ 0 & 0 & t_{b_j}^3 \end{pmatrix},$$

$$x_i \rightarrow T_i^x = \begin{pmatrix} t_{x_i}^1 & 0 & 0 \\ 0 & t_{x_i}^2 & 0 \\ 0 & 0 & t_{x_i}^3 \end{pmatrix}.$$

Тогда исходную систему можно переписать в виде ${}^A T {}^x T = {}^b T$, заменив матрицу коэффициентов (\tilde{a}_{ij}) на (T_{ij}^a) . Получаем блочную матрицу, где каждый блок есть ТП— тензор второго ранга с диагональной матрицей

$${}^A T = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{a_{11}}^1 & 0 & 0 \\ 0 & t_{a_{11}}^2 & 0 \\ 0 & 0 & t_{a_{11}}^3 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} t_{a_{1n}}^1 & 0 & 0 \\ 0 & t_{a_{1n}}^2 & 0 \\ 0 & 0 & t_{a_{1n}}^3 \end{pmatrix} \\ \dots & \dots & \dots \\ \begin{pmatrix} t_{a_{n1}}^1 & 0 & 0 \\ 0 & t_{a_{n1}}^2 & 0 \\ 0 & 0 & t_{a_{n1}}^3 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} t_{a_{nn}}^1 & 0 & 0 \\ 0 & t_{a_{nn}}^2 & 0 \\ 0 & 0 & t_{a_{nn}}^3 \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

и векторы \tilde{b}_j и x_i , представленные в виде ТП:

$${}^b T = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{b_1}^1 & 0 & 0 \\ 0 & t_{b_1}^2 & 0 \\ 0 & 0 & t_{b_1}^3 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} t_{b_n}^1 & 0 & 0 \\ 0 & t_{b_n}^2 & 0 \\ 0 & 0 & t_{b_n}^3 \end{pmatrix} \end{pmatrix}^T,$$

$${}^x T = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{x_1}^1 & 0 & 0 \\ 0 & t_{x_1}^2 & 0 \\ 0 & 0 & t_{x_1}^3 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} t_{x_n}^1 & 0 & 0 \\ 0 & t_{x_n}^2 & 0 \\ 0 & 0 & t_{x_n}^3 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Операции над блочными матрицами требуют определенных пояснений. Из линейной алгебры известно, что над блочными матрицами допустимы практически все операции, примененные для стандартных матриц: сложение, вычитание, умножение на скаляр, умножение блочных матриц, транспонирование и другие, если их выполнять по определенным правилам. При сложении, вычитании и умножении необходимо, чтобы блочные матрицы были согласованы по правилам, принятым для стандартных числовых матриц.

Рассмотрим реализацию итерационных процедур в системе ТП применительно к задаче нахождения решений линейной нечеткой системы (ЛНС). Во-первых, задача решения ЛНС сведена к решению блочных систем уравнений низких и средних размерностей, алгоритмы которых достаточно хорошо разработаны. Во-вторых, наличие в составе матрицы коэффициентов диагональных блоков-подматриц гарантирует получение решений. Рассмотрим некоторые особенности итерационных процедур.

Метод простой итерации. Если рассматриваемая система имеет вид $Ax = b$, то для применения итерационных методов она должна быть приведена к эквивалентному виду $x = Bx + d$. Затем выбираем начальное приближение к решению системы $x^{(0)} = \{x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\}$ и находим последовательность приближений к действительному решению. Как известно, для сходимости итерационного процесса достаточно, чтобы было выполнено условие $\|B\| < 1$, где $\|B\|$ — норма матрицы B . Критерий окончания итераций зависит от применяемого итерационного метода. Следует заметить, что для подматриц $B_f \in B$ блочной матрицы рассматриваемого типа всегда может быть определена норма $\|B_f\|$, поэтому вычисление $\|B\|$ не является проблематичным. Однако укажем его особенности.

Рассмотрим метод Якоби, на основе которого разработан самый простой способ приведения системы к виду, удобному для итерации, и состоящий в том, что из первого уравнения системы выражают неизвестную переменную — решение x_1 , из второго — решение x_2 и т. д. В результате получают систему уравнений с матрицей B , в которой на главной диагонали стоят нулевые элементы, а остальные вычисляются по формулам $b_{ij} = -a_{ij} / a_{ii}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. Компоненты вектора d вычисляются по формулам: $d_i = b_i / a_{ii}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Расчетная формула метода простой итерации имеет вид $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + d$, или в покомпонентной форме:

$$x_i^{(k+1)} = b_{i1}x_1^{(k)} + b_{i2}x_2^{(k)} + \dots + b_{in}x_n^{(k)} + d_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Критерий окончания итераций в методе Якоби имеет вид $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \varepsilon_1$,

где $\varepsilon_1 = \frac{1 - \|B\|}{\|B\|} \varepsilon$. Если выполняется условие $\|B\| < 1/2$, то критерий окончания итераций упрощается до формулы $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \varepsilon$.

Перечислим матричные особенности этой процедуры:

величины b_{ij} , d_i имеют следующий вид: $T_{b_{ij}} = -T_{a_{ij}} * \text{inv}(T_{a_{ii}})$, $T_{d_i} = T_{b_i} * \text{inv}(T_{a_{ii}})$, где $T_{b_{ij}}$, $T_{a_{ij}}$, $T_{a_{ii}}$, T_{d_i} , T_{b_i} — соответствующие ТП (тензоры 2-го ранга); $\text{inv}(T_{a_{ii}})$ — обратный тензор $T_{a_{ii}}$; поскольку $T_{a_{ii}}$ — диагональный тензор (как и все остальные блоки), то обратный тензор существует всегда;

величины $x^{(k+1)}$, $x^{(k)}$, ${}^x T_{k+1}$, ${}^x T_k$ имеют вид

$$x_i \rightarrow T_i^x = \begin{pmatrix} t_{x_i}^1 & 0 & 0 \\ 0 & t_{x_i}^2 & 0 \\ 0 & 0 & t_{x_i}^3 \end{pmatrix};$$

условие $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \varepsilon$ рассматривается в форме $\|{}^x T_{k+1} - {}^x T_k\| < \varepsilon$.

Подставив вместо $x^{(k+1)}, x^{(k)}$ их тензорные аналоги, запишем

$$\begin{aligned} \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq \varepsilon \rightarrow \|{}^x T_{k+1} - {}^x T_k\| &= \left\| \begin{pmatrix} t_{k+1}^1 & 0 & 0 \\ 0 & t_{k+1}^2 & 0 \\ 0 & 0 & t_{k+1}^3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t_k^1 & 0 & 0 \\ 0 & t_k^2 & 0 \\ 0 & 0 & t_k^3 \end{pmatrix} \right\| = \\ &= \left\| \begin{pmatrix} t_{k+1}^1 - t_k^1 & 0 & 0 \\ 0 & t_{k+1}^2 - t_k^2 & 0 \\ 0 & 0 & t_{k+1}^3 - t_k^3 \end{pmatrix} \right\| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Как видно из последнего выражения, исследование сходимости итерационного процесса для ТП не отличается по содержанию от исследования сходимости для обычных переменных. Аналогичные выводы могут быть сделаны для любых итерационных схем, в частности для метода простой итерации и метода Зейделя.

Необходимо заметить следующее.

1. Условие окончания итерационного процесса, рассматриваемое в виде $\|{}^x T_{k+1} - {}^x T_k\| < \varepsilon$, может быть переписано для нулевых и первых инвариантов, что является достаточным для приближенной грубой оценки.

2. Решение системы ${}^A T {}^x T = {}^b T$, ${}^x T = \{ {}^x T_i \}$, $i = 1, n$, следует понимать так: при его подстановке в исходную систему получаем блочный вектор ${}^b T^0 = \{ {}^b T_j^0 \}^T$, $j = 1, n$, такой, что интервал, вычисленный для max-min значений главной диагонали его компонентов ${}^b T_j^0 \rightarrow {}^b T_j^0 = [{}^b T_{j \min}^0, {}^b T_{j \max}^0]$ вкладывается в аналогичный интервал, полученный на основании блочного вектора ${}^b T_j \rightarrow {}^b T_j = [{}^b T_{j \min}, {}^b T_{j \max}]$, т. е. ${}^b T_j^0 \subseteq {}^b T_j$.

Условие ${}^b T_j^0 \subseteq {}^b T_j$ эквивалентно следующему $J^0({}^b T_j^0) \leq J^0({}^b T_j)$, где $J^0(\cdot)$ — нулевые инварианты соответствующих ТП.

Интервальная арифметика. Стандартная интервальная арифметика операцию деления интервалов $A = [a \ b]$ и $A_1 = [a_1 \ b_1]$ определяет как операцию умножения интервала $A = [a \ b]$ на интервал $A_{1 \text{обр}} = [1/a_1 \ 1/b_1]$, т. е. $A/A_1 = A * A_{1 \text{обр}} = [a/a_1 \ b/b_1]$. Если дополнительно определить для каждого интервала среднее значение (sr и sr_1) и длину (w и w_1), то тензоры T_1^x и T_2^x , соответствующие интервалам A и A_1 , можно записать в виде

$$T_1^x = \begin{pmatrix} a & w \\ sr & b \end{pmatrix}, \quad T_2^x = \begin{pmatrix} a_1 & w_1 \\ sr_1 & b_1 \end{pmatrix}.$$

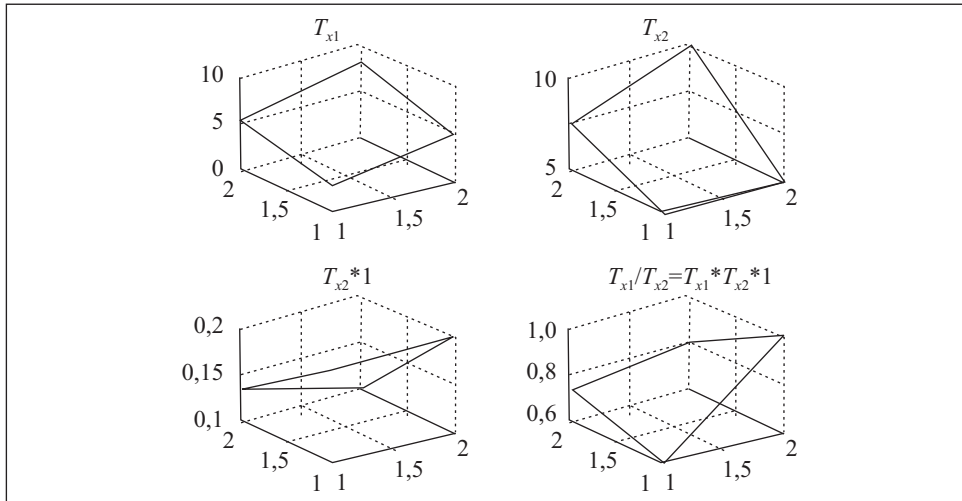


Рис. 5. Графическое изображение операции определения интервалов в тензорном базисе

Тензор-интервал для $A_{1\text{обр}} = [1/a_1 \ 1/b_1]$ имеет вид $A_{1\text{обр}} \rightarrow T_{2\text{обр}}^x = (T_2^x)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a_1 & 1/w_1 \\ 1/sr_1 & 1/b_1 \end{pmatrix}$, а операция деления интервалов на уровне их тензорных моделей — $T_d = T_1^x * T_{2\text{обр}}^x = \begin{pmatrix} a/a_1 & w/w_1 \\ sr/sr_1 & b/b_1 \end{pmatrix}$. Главная диагональ ТИ результата $d = [a/a_1 \ b/b_1]$, как видно из предыдущих вычислений, совпадает с результатом $A/A_1 = A * A_{1\text{обр}}$, полученным с помощью стандартной интервальной арифметики.

На рис. 5 показаны ТИ T_1^x , T_2^x , $T_{2\text{обр}}^x$ и $T_d = T_1^x * T_{2\text{обр}}^x$. Операции \cdot^{-1} и $\cdot*$, реализованные в системе MatLab, означают поточечную (матричную) реализацию. Это приводит к тому, что для тензора $T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$ объекты $T^{\wedge -1}$ и $T^{\wedge -1}$ в системе MatLab имеют соответственно вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Как упомянуто выше, главная диагональ тензора представляет собой исходный интервал. Это позволяет использовать вместо исходного тензора (присоединенных тензоров) его модель в виде диагональной матрицы. Диагональные матрицы интервалов имеют вид:

$$T_1^x = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}, T_2^x = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}, T_{2\text{обр}}^x = \begin{pmatrix} 0,20 & 0 \\ 0 & 0,10 \end{pmatrix}.$$

В результате проверки установлено, что $T_{2\text{обр}}^x$, определенная по правилам и теоремам линейной алгебры, дает результат

$$T_2^x * T_{2\text{обр}}^x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

совпадающий с определением единичной матрицы (тензора). Результат умножения имеет вид $T_1^x * T_2^x = \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 80 \end{pmatrix}$, тензорное произведение —

$$T_1^x \bullet T_2^x = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 80 \end{pmatrix},$$

тензорное произведение со сверткой —

$$T_1^x \bullet_{\text{sv}} T_2^x = \begin{pmatrix} 22,5 & 0 \\ 0 & 60 \end{pmatrix},$$

т. е. полученный результат (диагональ) вкладывается в исходный, является более узким и, естественно, более точным.

Рассмотрим для сравнения конкретные примеры, решение которых методами стандартной интервальной арифметики приведено в [17], параллельно решив их с использованием тензорной методологии.

Пример 1. Необходимо оценить полную поверхность S прямоугольного параллелепипеда со сторонами a, b, c , заданными интервально: $a = 20 \pm 2, b = 10 \pm 1, c = 15 \pm 1$, т. е. $a = [18 \ 22], b = [9 \ 11], c = [14 \ 16]$. Известно, что полная поверхность прямоугольного параллелепипеда $S = 2(ab + bc + ca)$. Заменяя в этой формуле точные значения a, b, c интервальными, получим следующую оценку диапазона w_s изменения величины S : $w_s \subseteq 2(\tilde{a}\tilde{b} + \tilde{b}\tilde{c} + \tilde{c}\tilde{a})$. После вычисления интервальных произведений и сумм согласно правилам стандартной интервальной арифметики получаем оценку $w_s \subseteq [1080, 1540]$ или $1080 \leq S \leq 1540$ [8]. Попытки найти оценки для S на основе других формул, полученных из приведенной путем эквивалентных преобразований (вынесения за скобки a, b или c) дают результаты, либо совпадающие с данной оценкой, либо хуже (границы для S шире).

Выполним решение указанного примера с помощью тензорной методологии.

1. Тензор-интервалы для интервальных переменных a, b, c имеют вид

$$T_a = \begin{pmatrix} 18 & 20 \\ 4 & 22 \end{pmatrix}, \quad T_b = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}, \quad T_c = \begin{pmatrix} 14 & 15 \\ 2 & 16 \end{pmatrix}.$$

2. Оценка диапазона δ_s изменения величины S в тензорной нотации представим в виде $\delta_s \subseteq 2(T_a *_T T_b + T_a *_T T_c + T_c *_T T_b)$, где $*_T$ — знак тензорного произведения со сверткой. Получаем общий тензор результата (без свертки) в виде

$$T_s = \begin{pmatrix} 1080 & 1180 & 1190 & 1300 \\ 200 & 1280 & 220 & 1410 \\ 220 & 240 & 1300 & 1420 \\ 40 & 260 & 240 & 1540 \end{pmatrix}.$$

3. Определим min-max-элементы главной диагонали — $\min(\text{diag}(T_s)), \max(\text{diag}(T_s))$. Они соответственно равны 1080 и 1540, т. е. совпадают с оценкой, полученной с помощью методов стандартной интервальной арифметики.

4. Выполнив свертку тензора T_s , получим $T_{sv} = \begin{pmatrix} 1180 & 1300 \\ 240 & 1420 \end{pmatrix}$; min-max-элементы главной диагонали, $\min(\text{diag}(T_s)), \max(\text{diag}(T_s))$, соответственно равны 1180 и 1420, т. е. полученная оценка гораздо уже (сужение в пределах 53 %), что несомненно является более точной оценкой, чем при стандартном интервальном подходе.

Пример 2. Оценить площадь S прямоугольника, сумма соседних сторон которого равна единице, а сама сторона может принять любое значение в интервале $[0, 1]$. Если одна из соседних сторон равна a , то другая равна $(1 - a)$. Площадь прямоугольника соответственно равна $S = a(1 - a)$. Заменяя точное значение a заданным приближенным, представленным в интервальной форме $[0, 1]$, получим оценку диапазона δ_S изменения S : $w_s \subseteq [0, 1]([1, 1] - [0, 1]) = [0, 1]$, т. е. $0 \leq S \leq 1$.

Выполняя эквивалентные преобразования данной формулы, находим другие оценки:

при $S = a - a^2 \Rightarrow w_s \subseteq a - a^2 = [0, 1] - [0, 1] = [-1, 1]$ или $-1 \leq S \leq 1$, откуда, учитывая, что всегда $S \geq 0$, получаем $0 \leq S \leq 1$;

при $s = 1/4 - (a-1/2)(a-1/2) \Rightarrow \delta_s \subseteq 1/4 - (a-1/2)(a-1/2) = 1/4 - ([0, 1] - 1/2)([0, 1] - 1/2) = [0, 1/2]$ или $0 \leq S \leq 1/2$;

при $s = 1/4 - (a-1/2)^2 \Rightarrow \delta_s \subseteq 1/4 - (a-1/2)^2 = 1/4 - ([0, 1] - 1/2)^2 = [0, 1/4]$ или $0 \leq S \leq 1/4$.

В [17] показано, что качество оценки существенно зависит от вида формулы для определения S . Самая узкая из полученных оценок $0 \leq S \leq 1/4$, и она не может быть улучшена, так как в результате решения задачи $\max a(1 - a)$ при $0 \leq a \leq 1$ получаем тот же результат.

Выполним решение этой задачи, используя тензорную нотацию. Интервальная переменная $a = [0, 1]$ в тензорной нотации имеет вид $T_a = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 \\ 1,0 & 1,0 \end{pmatrix}$; число 1 представим в виде вырожденного интервала $1 = [1, 1]$, ему соответствует ТИ $T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Формула для оценки

принимает вид $-T_a *_T (T_1 - T_a)$, где $*_T$ — тензорное произведение со сверткой. Получаем тензор результата в виде

$$T_s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,5 & 0,25 \\ 0 & 0 & -0,5 & 0 \\ 1,0 & 0,5 & 1,0 & 0,5 \\ -1,0 & 0 & -1,0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выполним анализ полученного тензора, определив min-max-элементы главной диагонали — $\min(\text{diag}(T_s)), \max(\text{diag}(T_s))$ и min-max-элементы полученной матрицы соответственно $\min(T_s), \max(T_s)$. В первом случае получаем интервал $[0, 1]$, во втором случае — интервал $[-1, 1]$. После свертки тензора результата получаем $T_{sv} = \begin{pmatrix} 0 & 0,25 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$,

откуда видно, что интервал оценки составляет $[0, 0,5]$. Как видим, на основании одного выражения для оцениваемой величины получены практически все возможные оценки. Неулучшаемую оценку также можно получить после соответствующего преобразования расчетной формулы.

Таким образом, все операции, выполняемые над диагональными матричными моделями интервалов, являются корректными. Результат деления интервалов A и A_1 , полученный на уровне диагональных матриц, составляет $T_d = \begin{pmatrix} 0,60 & 0 \\ 0 & 0,80 \end{pmatrix}$, т. е. полностью совпадает с результатом интервальной операции.

Интервальные системы. Как показали исследования, решения интервальных систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), представленных тензорами, получаются более узкими и всегда выполняется условие включения тензорного решения в множество решений, полученных интервальными методами. Рассмотрим некоторые примеры решения интервальных СЛАУ, применив стандартные интервальные методы и тензорные модели.

Как известно, при решении интервальных СЛАУ используют принцип интервального расширения, относительно которого сделаем некоторые уточнения. Все известные расширения носят исключительно эвристический характер, т. е. являются не доказанными. Однако путем индуктивных (правдоподобных) рассуждений (доказательств) можно определить условия, при которых правильность расширений будет максимальной, или определить дополнительные условия, при которых эти расширения были бы работоспособны. Целесообразность доказательства теорем, основанных на эвристических расширениях, в каждом конкретном случае должна быть обоснована. Например, согласно принципу нечеткого расширения Заде все операции, определенные на множестве действительных чисел и переменных, могут быть перенесены на нечеткие числа и переменные. Но, как известно, обратная величина, определенная для действительных чисел и переменных, не имеет аналога для НП и чисел.

Это относится также к интервальным расширениям. Согласно [18] интервальное расширение элементарного функционального выражения, полученного в результате замены аргументов на интервалы, в которых они содержатся, а арифметические операции и элементарные функции на их интервальные аналоги называют естественным интервальным расширением.

Пусть $[x] \in \mathbb{R}^n$ — вектор, состоящий из элементов-интервалов (брус или параллелотоп). Если арифметические операции естественным образом расширяются на векторы и матрицы, то интервальная функция определяется как $f([x]) = \{f\{x\} \mid x \in [x]\}$. Для монотонно возрастающих функций интервальная функция имеет вид $f([x]) = [f(x_{\min}), f(x_{\max})]$. Определение точного образа интервальной функции в большинстве случаев невозможно, поэтому работают с функциями включения $[f]([x])$, т. е. такими, которые можно записать в виде $f([x]) \subset [f]([x]) \forall [x] \in \mathbb{R}^n$. Существуют способы построения функций включения, приближенные к исходной интервальной функции с контролируемой степенью точности [18].

Далее используем интервальный метод Гаусса, или интервальное расширение метода Гаусса, определив его для интервальной системы уравнений $Ax = b$ как замену всех расчетных величин на интервальные, а арифметические операции на операции интервальной арифметики.

Представление интервала в виде тензора четных рангов, а также в виде плоского тензора 2-го ранга с диагональной матрицей

$$A = [a_{\min}, a_{\max}] \rightarrow T_A = \begin{pmatrix} a_{\min} & 0 \\ 0 & a_{\max} \end{pmatrix}$$

с дальнейшей заменой операций над интервалами операциями над тензорами, которые моделируют интервал, $A *_i B \rightarrow T_A *_T T_B$, где $*_I \rightarrow *_T$ — соответствующие операции в интервальном и тензорном базисах, позволяет сформулировать это положение как тензорное расширение интервального базиса. Соответственно, например, метод Гаусса в тензорном базисе аналогично интервальному расширению, «расширяется» таким образом, что все расчетные величины рассматриваются как тензоры, а операции над ними — как операции тензорной алгебры (интервальное расширение — интервальные величины и операции интервальной арифметики).

Необходимо заметить, что тензоры можно однозначно представлять системой своих инвариантов и функции от тензоров рассматривать как функции от инвариантов. Это открывает новые возможности решения задач в условиях неопределенности.

Теория индуктивных рассуждений предполагает наличие примеров и контрпримеров, максимизацию правильных выводов и минимизацию неправильных. Это положение является одним из основополагающих для интеллектуальных систем и вычислительного интеллекта. Корректность и доказательность тензорных расширений вытекает из следующего. Выполненные исследования показали, что все операции стандартной интервальной арифметики, будучи реализованными в тензорном базисе и переведенные в стандартные интервалы, дали идентичные результаты.

Следует проявить определенную осторожность при использовании тензорного расширения, так как тензорные модели интервальных СЛАУ дают возможность получить лишь один гарантированный брус решений, в то время как расширенная интервальная арифметика позволяет получить множество так называемых *AE*-решений, определение которого тензорным расширением требует отдельных исследований.

Рассмотрим интервальную СЛАУ с матрицей 2×2 . Несмотря на кажущуюся простоту, решение в данном случае не является простой задачей [18]. Определение обратной интервальной матрицы по правилам линей-

ной алгебры при условии, когда a, b, c, d — интервалы, имеет вид

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Решением интервальной СЛАУ

$$\begin{pmatrix} [2,4] & [-2,1] \\ [-1,2] & [2,4] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [1,2] \\ [1,2] \end{pmatrix}$$

является интервальный вектор $x = ([-5/6, 4], [-5/3, 3])^T$ [18], однако оптимальной внешней оценкой множества решений есть более узкий брус, для которого $x^0 = ([0, 4], [-1, 3])^T$.

Пример 3. Решим приведенную выше интервальную СЛАУ, представив ее в виде тензорной модели:

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Решение тензорной СЛАУ выполним по правилу решения систем алгебраических уравнений с матрицей 2×2 , для которой

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2, \end{aligned} \quad x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{lt_1}{lt}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{22} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{lt_2}{lt},$$

где lt, lt_1, lt_2 — соответствующие определители, при условии, что все расчетные компоненты являются тензорами, в частном случае — диагональными.

А л г о р и т м вычисления тензора решений.

1. Формирование диагональных тензоров, моделирующих интервалы:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad a_{12} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a_{21} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad a_{22} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \\ b_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. Вычисление тензоров-определителей:

$$lt = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}, \quad lt_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad lt_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad lt^{-1} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,0714 \end{pmatrix}.$$

3. Вычисление ТИ:

$$x_{1n} = \begin{pmatrix} 2,0 & 0 \\ 0 & 0,43 \end{pmatrix}, \quad x_{2n} = \begin{pmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 0,29 \end{pmatrix}.$$

На рис. 6 представлены результаты полученных решений. Как видим, решения интервальной СЛАУ $x_{1n} = [x_{1n}^{\min}, x_{1n}^{\max}]$ и $x_{2n} = [x_{2n}^{\min}, x_{2n}^{\max}]$, полученные на основании тензорного представления интервалов, являются более узкими, так как выполняется включение интер-

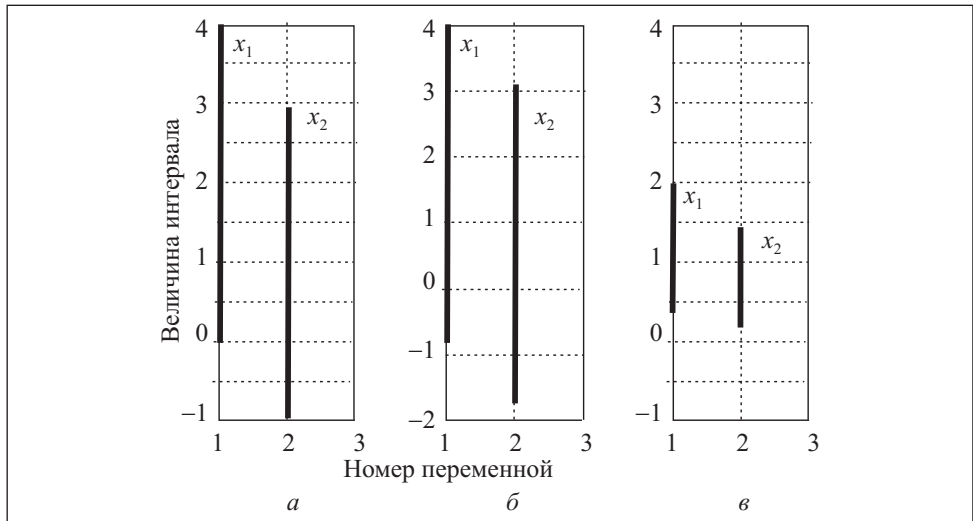


Рис. 6. Решение интервальной СЛАУ [18]: a, b — решения, полученные вычислением обратной интервальной матрицы; v — решение, полученное тензорным моделированием интервала

валов $x_{1n} \in x_1$ и $x_{2n} \in x_2$, где x_1, x_2 получены методами конечномерного интервального анализа.

Теперь определим обратную матрицу с помощью тензорных моделей интервалов.

1. Интервальная матрица задана в виде

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ [-5, -2] & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Представим элементы интервальной матрицы в виде тензоров с диагональной матрицей

$$a_{11} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, a_{12} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, a_{21} \rightarrow \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, a_{22} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Сформируем интервальную матрицу в тензорном базисе:

$$I = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -5 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Вычисляем обратную матрицу $(I)^{-1}$ и превращаем ее в интервальную матрицу:

$$I^{-1} = \begin{pmatrix} 3,0 & 0 & 1,0 & 0 \\ 0 & 0,75 & 0 & 0,25 \\ 5,0 & 0 & 2,0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0,5 \end{pmatrix},$$

$$И = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0,75 \\ 5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,25 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} [0,75 & 3,0] & [0,25 & 1,0] \\ [0,5 & 5,0] & [0,5 & 2,0] \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} [3/4, 3] & [1/4, 1] \\ [1/2, 5] & [1/2, 2] \end{pmatrix}$$

Нетрудно заметить ее полное совпадение с результатом, полученным на тензорных моделях интервалов.

Решение интервального уравнения Хансена [18] имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 3,5 & [0,2] & [0,2] \\ [0,2] & 3,5 & [0,2] \\ [0,2] & [0,2] & 3,5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} [-1,1] \\ [-1,1] \\ [-1,1] \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} [-1,76 & 1,76] \\ [-1,76 & 1,76] \\ [-1,76 & 1,76] \end{pmatrix}.$$

Его тензорно-интервальный аналог:

$$A_T = \begin{pmatrix} 3,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3,5 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3,5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3,5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 3,5 \end{pmatrix}, \quad B_T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Его обратная матрица A_T^{-1} :

$$A_T^{-1} = \begin{pmatrix} 0,2857 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4889 & 0 & -0,1778 & 0 & -0,1778 \\ 0 & 0 & 0,2857 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,1778 & 0 & 0,4889 & 0 & -0,1778 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,2857 & 0 \\ 0 & -0,1778 & 0 & -0,1778 & 0 & 0,4889 \end{pmatrix}.$$

Теперь решение принимает вид

$$X = A_T^{-1} * B; \quad X^* = ([-0,29 \ 0,13]; [-0,29 \ 0,13]; [-0,29 \ 0,13]; [-0,29 \ 0,13])^T.$$

В результате итерационных процедур на основе метода Якоби с тензорно-интервальной матрицей получаем

$$X^s = ([-0,9667 \ 2,6]; [-0,9667 \ 2,6]; [-0,9667 \ 2,6]; [-0,9667 \ 2,6])^T.$$

Итерационные процедуры на основе расширенной интервальной арифметики Каухера дают следующий результат:

$$X^0 = ([-1,1667 \ 2,5]; [-1,1667 \ 2,5]; [-1,1667 \ 2,5]; [-1,1667 \ 2,5])^T.$$

Как видим, решения X^s и X^0 близки, решение X^* является более узким, т. е. более точным, чем $X^s, X^0 \subset X$.

Выводы. 1. Нечеткая переменная (нечеткое число) может быть представлена как тензор, в простейшем виде 2-го ранга, если НП имеет треугольную форму, в частности в виде диады, образованной на основе тензорного произведения значения и ФП.

2. Целесообразность представления НП в тензорном базисе обусловлена следующими причинами.

Неопределенность, моделируемая в виде нечеткости (значение — ФП) — достаточно сложное понятие. Ее определение в виде «значение — ФП» не всегда удовлетворяет пользователя. То обстоятельство, что в теории НМ не определена обратная величина, накладывает определенные ограничения на формирование операций нечеткой математики.

Одной из форм представления неопределенности есть представление объекта анализа (управления) в виде множества значений, на которые на определенном этапе значения ФП не могут быть наложены. В частности, при интервальном представлении имеем тройку значений (максимальное, минимальное и среднее), каждое из которых также может быть представлено тройкой.

3. Тензорная модель НП позволяет существенно повысить информативность представления неопределенности объекта, в результате чего тензор (главный), моделирующий НП, имеет присоединенные тензоры. Свойства присоединенных тензоров восстанавливают определенные характеристики неопределенности объекта (девиатор — вариабельность, изотропный тензор — базовую относительно стабильную часть) дают возможность повысить объективность принятия решения.

4. Операции нечеткой математики в тензорном базисе формулируются как операции тензорной алгебры. В зависимости от поставленной задачи эти операции можно выполнять, используя как главный тензор, так и присоединенные тензоры. Свойство изотропного тензора всегда иметь обратный тензор, позволяет создать расширенную систему математических операций над НП в тензорном базисе.

5. Свойства тензора иметь инварианты (константы, которые не изменяются при преобразованиях координат) позволяет представить операции над НП в тензорном базисе как операции над инвариантами. В свою очередь, инварианты тензора, моделирующего НП, могут быть вычислены как на основании собственных значений матрицы, являющейся проекцией соответствующего тензора, так и на основании элементов тензора (матрицы).

6. Свойство тензора образовывать свертки дает возможность существенно понизить ранг тензора, представляющего результат или отдельную компоненту операции, и тем самым дает возможность уменьшить размерность задачи со всеми вытекающими отсюда преимуществами. След тензора представляет собой с точностью до постоянного множителя дефадзи-

фицированное значение НП, что позволяет результат, полученный в тензорной форме, представить в стандартном виде: значение — ФП.

7. Тензорная методология позволяет согласовать объекты исследования в условиях неопределенности, представленных экспертами в виде множеств НП, одной ТП, моделирующей НП и тензора присоединения.

Arithmetical operations realization is considered for fuzzy variables which are presented as the tensor variables. The adequacy of operations on the tensor variables and their invariants is shown. The examples are given.

1. *Аверкин А. Н., Батыршин И. П.* Мягкие вычисления //Новости искусственного интеллекта. — 1996. — № 3. — С. 161—164.
2. *Аверкин А. Н.* Мягкие вычисления - основа новых информационных технологий. // Сб. научн. тр. пятой национальной конференции с международным участием «Искусственный интеллект—96». — Казань, 1996. — Т. 2. — С. 237—239
3. *Минаев Ю. Н., Филимонова О. Ю.* Мягкие вычисления на основе тензорных моделей неопределенности. I. Тензор-переменная в системе нечетких множеств. // Электрон. моделирование. — 2008. — **30**, № 1. — С. 43—57.
4. *Brannon R. M.* Introduction to Tensor Analysis. —<http://me.unm.edu/~rbrannon/MohrsCircle.pdf>
5. *Arfken G. B., Weber H.J.* Mathematical Methods for Physicists. — San Diego : Academic Press, 1995.
6. *Yongnian H., Xiongping L., Ching E. C.* A discussion about scalar invariants for tensor functions. //Acta Mech Sinica (English Series). — 2003. — Vol. 20, № 16. — P. 35—40.
7. *Минаев Ю. Н., Филимонова О. Ю.* Тензорный базис как основа новых алгоритмов управления в условиях неопределенности // Шестая Всероссийская науч.-техническая конф. «Новые информационные технологии», Москва, 23, 24 апр. 2003 г. — М: изд. МГАПИ, 2003. — С. 141—147.
8. *Минаев Ю. Н., Филимонова О. Ю.* Тензорный базис как основа формализации мягких измерений и вычислений // Тр. II Международного научно-практического семинара «Интегрированные модели и мягкие вычисления в искусственном интеллекте». Россия, Коломна, 15—17 мая 2003 г. — С. 31—39.
9. *Филимонова О. Ю.* Універсальні алгоритми екологічного моніторингу в інтелектуальних системах на підставі методів нечіткої математики в тензорному логічному базисі //Наук-техн. зб. «Містобудування та територіальне планування». — 2006. — № 13, 23, — Київ: КНУБА, 2006. — С. 49—61.
11. *Минаев Ю. Н., Филимонова О. Ю.* Тензорный базис как основа мягких вычислений в условиях неопределенности // Матеріали V Міжнародно— науково-технічно— конференції— «АВІА-2003», Київ, 23—25 квітня 2003 р. — Київ: изд. НАУ, 2003. — С.155—159.
12. *Минаев Ю. Н., Филимонова О. Ю.* Информационные технологии формализации мягких измерений при помощи тензорных моделей // Проблеми інформатизації — та управління. — 2004. — № 10. — С.18—29.
13. *Minaev Yu. M., Filimonova O. Yu.* Fuzzy inferences in the system a tensor-variable. // Proc. of The Second World Congress «Aviation in the XXI-st century» «Safety in Aviation», Kiev, September 19—21, 2005. — Kiev: NAU, 2005. — P. 31—37
14. *Budiansky B.* Tensors.//Handbook of Applied Mathematics. 2nd Ed. Edited by Carl E. Pearson. — NY: Van Nostrand Reinhold, 1990.

15. *Tai C.* Generalized Vector and Dyadic Analysis. // Applied Mathematics in Field Theory. 2nd Ed. — NY : IEEE Press, 1997.
16. *Simmonds J.* A Brief on Tensor Analysis. — NY : Springer-Verlag, 1994.
17. *Левин В. И.* Интервальная математика и изучение неопределенных систем // Интеллектуальные системы. // Электронный журнал «Инженерное образование». — 2005. — № 5. — С. 1—11.
18. *Шарый С. П.* Конечномерный интервальный анализ. — Новосибирск : Изд-во «XYZ-2008». — 726 с.
19. *Георгиевский Д. В.* Тензорно-нелинейные эффекты при изотермическом деформировании сплошных сред // Успехи механики (МГУ). — 2002, № 2. — С. 150—176.

Поступила 06.11.06;
после доработки 27.06.07

МИНАЕВ Юрий Николаевич, д-р техн. наук, профессор кафедры компьютерных систем и сетей Национального авиационного университета Украины. В 1959 г. окончил Харьковский политехнический ин-т. Область научных исследований — применение интеллектуальных технологий в системах принятия решений.

ФИЛИМОНОВА Оксана Юрьевна, канд. техн. наук, докторант Киевского национального университета строительства и архитектуры. В 1989 г. окончила Киевский инженерно-строительный ин-т. Область научных исследований — интеллектуальные технологии обработки информации в условиях неопределенности.