УДК 519.718

А. М. Романкевич, д-р техн. наук,
В. А. Романкевич, канд. техн. наук, **И. В. Майданюк**, аспирант
Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический ин-т»
(Украина, 03056, Киев, пр-т Победы, 37,
тел.: (044) 4549032, E-mail romankev@scs.ntu-kpi.kiev.ua)

Граничные оценки числа ребер *GL*-моделей поведения отказоустойчивых многопроцессорных систем в потоке отказов

(Статью представил д-р техн.наук В. Г. Тоценко)

Приведены оценки числа основных ребер при построении базовых *GL*-моделей, отображающих реакцию отказоустойчивой многомодульной системы на появление отказов, с минимальным числом теряемых ребер, а также граничные оценки числа дополнительных ребер при трансформации базовых *GL*-моделей к небазовым.

Наведено результати оцінки кількості основних ребер при побудові *GL*-моделей, що відображують реакцію відмовостійкої багатомодульної системи на появу відмов, з мінімальною кількістю втрачених ребер, а також граничні оцінки числа додаткових ребер при трансформації базових *GL*-моделей до небазових.

К л ю ч е в ы е с л о в а: отказоустойчивые многопроцессорные системы, графы, модели.

Широкое распространение сложных многомодульных систем, устойчивых к отказам некоторых модулей, требует анализа поведения системы в потоке отказов различной кратности (т. е. определения ее реакции на отказ некоторого числа модулей), в частности при оценке ее надежности [1]. Среди множества различных моделей, адекватно отображающих эту реакцию, наибольшее распространение получили *GL*-модели [2], отличающиеся относительной простотой формирования и удобством использования.

При разработке, анализе и трансформации реконфигурируемых отказоустойчивых многомодульных систем (ОМС), в особенности систем управления сложными объектами, *GL*-модель, соответствующая такой системе, иногда получается достаточно сложной. В связи с этим практический интерес представляет расчет параметров модели на первых этапах проектирования ОМС, а также определение сложности трансформации уже созданной модели при преобразовании самой системы. От сложности модели зависит время выполнения статистических экспериментов с ней и, следовательно, точность расчета надежности ОМС.

Будем определять число основных ребер в базовой *GL*-модели, предложенной в [3]. Эта модель сравнительно проста и теряет два ребра при появлении «лишнего» отказа. Затем определим граничные оценки числа дополнительных ребер при реконфигурации базовой *GL*-модели к небазовой.

Число основных ребер. В *GL*-модели [2] поведения ОМС в потоке отказов работоспособности системы поставлена в соответствие связность неориентированного циклического графа, наличие (или отсутствие) ребер которого определяется значениями булевых функций, присвоенных ребрам графа. Аргументы функций отображают состояние модулей (отказ — «0», исправен — «1») системы. ОМС, состоящую из n элементов (модулей) и сохраняющую работоспособность в случае отказа не более, чем m любых ее модулей ($0 \le m \le n$), обозначим $K(m,n)$ и назовем базовой. Ей соответствует базовая *GL*-модель, которую для простоты восприятия в дальнейшем будем также обозначать $K(m,n)$. Реберные функции формируются таким образом, что для базовой модели $K(m,n)$ появление векторов с числом нулей (отказов в системе), не превышающем величины m, приводит к исчезновению не более, чем одного ребра. В других случаях в графе исчезают два и более ребер, и он теряет связность. Модель, предложенная в [3], теряет минимальное число ребер при появлении векторов с числом нулевых компонент, превышающим m, а при появлении вектора с $m+1$ нулевой компонентой из модели исключаются ровно два ребра.

Рассмотрим задачу определения числа r ребер *GL*-модели, построенной по этому методу. Алгоритм формирования реберных функций модели ОМС основан на операции склеивания. Приведем несколько основных его положений, необходимых для решения поставленной задачи.

Обозначим через $K'(m,n)$ множество реберных функций *GL*-модели $K(m,n)$. Каждый элемент из $K'(m,n)$ присвоен только одному ребру модели. Процесс получения элементов $K'(m,n)$ можно представить в виде рекурсивного соотношения:

$$K'(m_1, n_1) => K'(m_1 - i, [n_1/2]) \vee K'(i,]n_1/2[), \qquad (1)$$

где $i = 0 \ldots m_1$, $n_1 > m_1$, $m_1 - i \le [n_1/2]$, $i \le]n_1/2[$; $[x]$ — целая часть от x; $]x[$ — округление до ближайшего большего целого. На первом шаге алгоритма вместо переменных m_1 и n_1 подставляем реальные значения m и n, на последующих, если это возможно, — соответствующие значения предыдущего шага из правой части соотношения (1).

В [3] доказано, что дизъюнктивное выражение вида

$$K'(m_1 - p, [n_1/2]) \vee K'(p,]n_1/2[), \qquad (2)$$

где $0 < p < m_1$; $n_1 > m_1$; $m_1 - p \le [n_1/2]$; $p \le]n_1/2[$, поддается специальным преобразованиям и в конечном итоге может быть записано в виде одной булевой реберной функции, т.е. соответствующее множество K' будет состоять из одного элемента. Заметим, что в выражениях (1) и (2) операцию дизъюнкции следует относить не к самим множествам, а к парам элементов (функций) разных множеств вида K'.

Множество $K'(m_1, n_1)$, где $m_1 = n_1$, не требует представления в виде (2) и дальнейшего преобразования: оно состоит только из одной функции. Понятно, что рассматривать движение в глубину на следующем шаге рекурсии по (1) целесообразно только для дизъюнкций вида $K'(m_1, [n_1/2]) \vee K'(0,]n_1/2[)$ или $K'(0, [n_1/2]) \vee K'(m_1,]n_1/2[)$, т. е. при граничных значениях переменной i, ибо только в этом случае необходим дальнейший рекурсивный спуск для определения $K'(m, n)$. Следует заметить, что множество $K'(m_1, n_1)$ пусто при $m_1 = 0$, и при последующих выкладках упоминание о нем будем опускать.

После выполнения всех преобразований вида (1) и (2) будут получены все множества типа K', для которых не нужны или невозможны дальнейшие преобразования. Для получения искомого $K'(m, n)$ выполняем объединение элементов этих множеств.

Теперь возвратимся к решению поставленной задачи. Докажем следующее утверждение.

Утверждение.

$$r = n - m + 1.$$

Для упрощения доказательства процесс получения элементов $K'(m, n)$ по (1) представим в виде дерева. Для удобства поместим в узлы дерева множества $K'(m_1, n_1)$, для которых применима операция (1) и которые не входят в состав дизъюнкций типа (2), где $n_1 > m_1$. Вершины дерева соответствуют элементам множества $K'(m, n)$, т. е. ребрам исходной GL-модели с их функциями, следовательно, число вершин дерева в точности равно числу ребер модели. Дизъюнкции (2) припишем вершинам (вершина не имеет исходящих дуг). Поместим в вершины дерева также множества $K'(m_1, n_1)$, где $m_1 = n_1$, не входящие в состав дизъюнкции (2). Пример такого дерева приведен на рис. 1.

В данном примере $K'(3,9)$, $K'(3,5)$, $K'(3,4)$ помещены в узлах, все дизъюнктивные выражения типа (2) присвоены вершинам и $K'(3,3)$ также отображается как вершина. Напомним, что каждая вершина содержит множество K', мощность которого равна единице. Дерево позволяет упростить процедуру определения числа r.

Следуя операции (1) в глубину, последовательно на каждом этапе делим величину n на два, получая значения переменных n_1 на соответст-

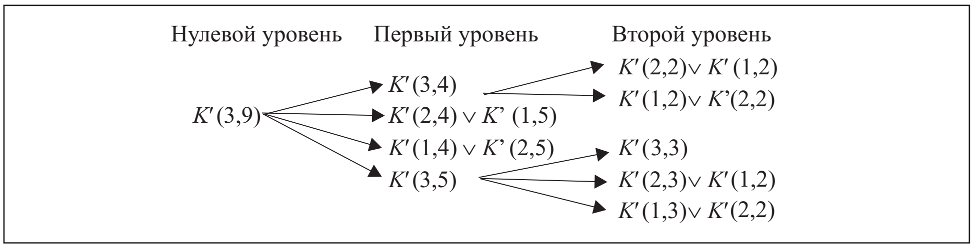

Рис. 1. Дерево для $K'(3,9)$

вующем этапе. Таким образом, $n_{1i} = [n/2^i]$ либо $n_{1i} =]n/2^i[$, где i — номер этапа (уровня). Пусть $(k+1) = \max(i)$, т. е. на уровне $(k+1)$ узлы отсутствуют. Поскольку k-й уровень это максимальный уровень, имеющий узлы, можно записать $m \le n/2^k \le 2m$. Разделив это неравенство на m и умножив на 2^k, получим $2^k \le n/m \le 2^{k+1}$, или $2^k \le 2^{\log_2(n/m)} \le 2^{k+1}$, откуда $k = [\log_2(n/m)]$. Исходя из (1), можно заметить, что из каждого узла, находящегося на уровне глубиной $i < k$, выходит $m+1$ ветвь, и каждый такой узел имеет ровно $m-1$ инцидентную вершину. На каждом таком уровне будет 2^i узлов. Легко определить общее число вершин r^* на уровнях глубиной меньшей k:

$$r^* = \sum_{i=1}^{k-1} 2^i (m-1).$$

Понятно, что на одном и том же уровне в различных узлах (обозначенных $K'(m_1, n_1)$), значения величин n_1 отличаются не более чем на единицу. Обозначим через n_m меньшее из значений n_1 на k-м уровне, а через n_x — большее. Очевидно, что $n_m = [n/2^k]$, а $n_x =]n/2^k[$. Пусть $\alpha = \{n/2^k\} = n - [n/2^k]2^k = n - n_m 2^k$, где $\{x/y\}$ — остаток от целочисленного деления. Ясно, что α равно числу узлов $K'(m_1, n_1)$, в которых $n_1 = n_x$, а $(2^k - \alpha)$ — числу узлов $K'(m_1, n_1)$, в которых $n_1 = n_m$. Поскольку узел k-го уровня может быть инцидентен только вершинам $(k+1)$-го уровня, анализируя (1), можно заметить, что число таких вершин определяется как $(n_1 - m_1 + 1)$. Следовательно, общее число вершин, инцидентных всем узлам $K'(m_1, n_x)$, равно $\alpha(n_x - m_1 + 1)$. Аналогично общее число вершин, инцидентных всем узлам $K'(m_1, n_m)$, равно $(2^k - \alpha)(n_m - m + 1)$. Следовательно, общее число вершин во всем дереве:

$$r = \sum_{i=1}^{k} 2^{i-1}(m-1) + \alpha(n_x - m + 1) + (2^k - \alpha)(n_m - m + 1) =$$

$$= (2^k - 1)(m-1) + \alpha(n_x - m + 1) + (2^k - \alpha)(n_m - m + 1) =$$

$$=2^k m-2^k-m+1+\alpha n_x-\alpha m+\alpha+2^k n_m-2^k m+2^k-\alpha n_m+\alpha m-\alpha=$$

$$=\alpha n_x+2^k n_m-\alpha n_m-m+1. \qquad (3)$$

Поскольку $n_x =]n/2^k[$, а $n_m=[n/2^k]$, $n_x=n_m$ лишь в случае, когда $n/2^k$ — целое число, иначе $n_x=n_m+1$. В уравнении (3) n_x умножается на коэффициент α, равный нулю, когда $n/2^k$ — целое. На основании изложенного можно выполнить замену $n_x=n_m+1$:

$$r=\alpha n_x-m+1+2^k n_m-\alpha n_m=\alpha n_m+\alpha+2^k n_m-\alpha n_m-m+1=$$

$$=\alpha+2^k n_m-m+1.$$

Подставив $\alpha=n-n_m 2^k$, получим $r=n-2^k n_m-2^k n_m-m+1=n-m+1$. Утверждение доказано.

Оценка числа дополнительных ребер при преобразовании *GL*-модели. Базовая ОМС продолжает функционировать при появлении отказов, кратность которых не превышает заданную. Однако реально ОМС может продолжать функционировать и при появлении отказов более высокой кратности, что должно быть адекватно отображено на *GL*-модели. В подобных случаях необходимо решать задачу преобразования модели базовой ОМС к модели небазовой ОМС. Появление соответствующих векторов состояния системы приведет к исчезновению каких-то основных ребер базовой *GL*-модели. Будем рассматривать случай исчезновения только пары основных ребер (в соответствии с рассуждениями, изложенными выше) при появлении одного такого вектора, хотя реально исчезнуть может большее число основных ребер (это зависит от алгоритма формирования реберных функций для модели). Понятно, что исчезновение пары ребер ведет к потере связности графа базовой модели. Одним из путей обеспечения адекватности модели (т.е. сохранения связности графа) для указанных случаев является проведение дополнительных ребер со своими функциями [4].

Обозначим L множество пар ребер, при исключении которых необходимо обеспечить связность графа, а его мощность обозначим l. Каждая пара соответствует одному из векторов состояния системы. В дальнейшем для краткости сохранение связности графа при исчезновении пар ребер (из множества L) будем называть блокировкой множества L, или просто блокировкой.

В соответствии с алгоритмом, описанным в [4], ребра графа исходной *GL*-модели разбиваем на два или более непустых, непересекающихся *S*-подмножества: в одном *S*-подмножестве присутствуют только такие ребра, выборка по два которых не совпадает ни с одним элементом из множества L. Одним из важных критериев разбиения графа на S-подмножества является их минимальное число. Затем проводим дополнительные ребра в соответствии с разбиением графа на S-подмножества. Фактически разбиение множества ребер графа на S-подмножества определяет число и проведение дополнительных ребер, которые обеспечивают сохранение связности графа при исчезновении определенных пар ребер. Поскольку проведение дополнительных ребер фактически определяется разбиением графа на S-подмножества, будем считать, что S-подмножества блокируют пары ребер из множества L. Пусть p — число S-подмножеств, а их мощности обозначим соответственно $s_1, s_2, ..., s_p$. Согласно методу, предложенному в [4], число дополнительных ребер $n =]\, p/2\, [$.

На этапе проектирования модели и внесения в нее изменений разработчику необходимо знать граничные значения числа вводимых для обеспечения адекватности модели дополнительных ребер. Интерес также представляет предельное число векторов, блокируемых с помощью заданного числа дополнительных ребер. Сформулируем следующую задачу:

определить границы p (число S-подмножеств), исходя из заданных значений r и l;

определить границы для l при заданных p и r.

Понятно, что значение l может колебаться в пределах от единицы (не пустое множество L) до C_r^2 (как перебор всевозможных пар ребер), а значение p — в пределах от единицы (при пустом множестве L) до r, когда каждое ребро задает одно S-подмножество (в этом случае $l = C_r^2$).

Основные определения. Пусть существуют все возможные комбинации по l пар ребер $1 \le l \le C_r^2$ исходной GL-модели: $k_1, k_2, \ldots, k_{C_r^2}$. Каждая комбинация k_i потребует для решения задачи блокировки своего оптимального разбиения множества ребер GL-модели на p_i S-подмножеств.

Определение 1. Величина $p_{\max}(l)$ есть максимальное значение из p_i, $p_{\min}(l)$ — минимальное из p_i, т. е. верхняя граница $p_{\max}(l)$ — это такое число S-подмножеств, которое способно блокировать любой набор элементов множества L мощностью l, выполняя условие минимальности числа S-подмножеств. Пусть $p_{\min}(l)$ — минимальное число S-подмножеств, обеспечивающее возможность блокировки хотя бы одного набора из l пар ребер, причем добавление хотя бы одного элемента в множество L однозначно потребовало бы разбиения на большее, чем $p_{\min}(l)$, число S-подмножеств.

Существуют все возможные разбиения $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_t$ ребер исходной GL-модели на p S-подмножеств. Каждое разбиение α_i является оптимальным для осуществления блокирования различных множеств пар ребер, среди которых имеется наибольшее по мощности, включающее l_i' пар, и наименьшее, включающее l_i'' пар.

Определение 2. Максимальное из l_i' обозначим $l_{\max}(p)$, а минимальное из l_i'' — $l_{\min}(p)$, т. е. $l_{\max}(p)$ — это максимальное число пар ребер, для блокировки которых достаточно разбиения графа на p S-подмножеств; $l_{\min}(p)$ — такое минимальное значение мощности множества L, для блокировки которого требуется разбиение ребер графа на p S-подмножеств. Это такая комбинация из l пар, что удаление хотя бы одного элемента из множества L потребовало бы менее чем p S-подмножеств (с учетом требования минимальности к их числу).

Взаимная обратимость граничных функций. Покажем, что при осуществлении оптимального разбиения множества ребер GL-модели на S-подмножества [4] граничные функции $p_{\min}(l)$ и $l_{\max}(p)$ являются взаимно обратными.

Пусть $l^* = l_{\max}(p^*)$, т.е. среди всех оптимальных разбиений ребер графа на p^* S-подмножеств существует такое, которое блокирует множество пар ребер, имеющее наибольшую мощность, равную l^*. Понятно, что если задано какое-то множество пар ребер L, включающее l^* пар, то для его блокирования понадобится не менее чем p^* S-подмножеств. В то же время существует такое множество $p_{\min}(l^*)$ мощностью l^* пар, для которого разбиение на p^* S-подмножеств оказывается достаточным. Следовательно, в точках пространства (p^*, l^*) значения функций $p_{\min}(l^*)$ и $l_{\max}(p^*)$ совпадают. Подобные рассуждения справедливы для любых значений l и p, а значит, эти функции являются взаимно обратными. Проведя аналогичные рассуждения относительно другой пары граничных функций, приходим к выводу, что функции $l_{\min}(p)$ и $p_{\max}(l)$ также взаимно обратны.

На основании изложенного можно сделать вывод о том, что для поиска граничных функций достаточно найти только две из них, определяя другие как взаимно обратные.

Нижняя граница l. Введем понятие V-графа [4]. Это неограф, в котором вершинам соответствуют ребра исходного графа GL-модели, а ребра проводятся в соответствии с парами множества L. Следует заметить, что правильная раскраска вершин V-графа, как показано в [4], определяет разбиение исходного графа на S-подмножества, причем ребра, имеющие один цвет, входят в одно S-подмножество. На рис. 2 приведен пример V-графа, его раскраски и соответствующего разбиения множества ребер исходного графа модели на S-подмножества для $r = 8$.

Допустим, p — хроматическое число V-графа, который будем строить, исходя из GL-модели ОМС. Поскольку l равно числу ребер V-графа, для решения поставленной задачи достаточно определить минимальное число ребер, формирующих V-граф, требующий p красок для правильной раскраски своих вершин. Известно, что хроматическое число не меньше

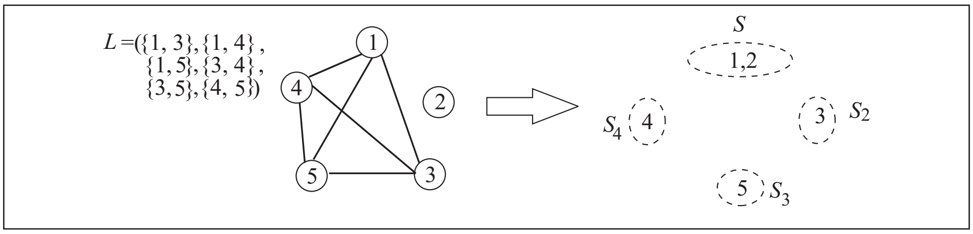

Рис. 2. Построение V-графа и соответствующих S-подмножеств

числа вершин в клике графа, т. е. в максимально полном подграфе. Следовательно, достаточно выбрать такое число ребер, которое в оптимальном случае задавало бы полный подграф, состоящий из p вершин. Таким образом, задача сведена к определению числа ребер полного графа, имеющего p вершин, а значит, искомая граница имеет вид

$$l_{\min}(p) = \frac{p(p-1)}{2}.$$

Поскольку $l_{\min}(p)$ и $p_{\max}(l)$ — взаимно обратные функции, представив l как аргумент функции p, решив квадратное уравнение, легко определяем, верхнюю границу числа S-подмножеств:

$$p_{\max}(l) = \frac{1+\sqrt{1+8l}}{2}. \tag{4}$$

Верхняя граница l. Для поиска границы $l_{\max}(p)$ вновь обратимся к V-графу, ребра которого соответствуют элементам множества L. Определим, какова должна быть структура V-графа с максимальным числом ребер, чтобы он при этом оставался p-раскрашиваемым. Разобьем вершины искомого V-графа (они соответствуют ребрам GL-модели) на p групп и проведем все возможные ребра между вершинами из различных групп. Понятно, что такой граф является p-раскрашиваемым, поскольку вершины, входящие в одну группу, определяют внутренне устойчивое множество. Однако при этом, в зависимости от способа разбиения, возможное число ребер, сохраняя свойство p-раскрашиваемости, будет различным. Для решения задачи достаточно выбрать мощности групп такими, чтобы число ребер V-графа было максимальным. Поскольку все вершины, входящие в одну группу, имеют один цвет, соответствующие им ребра в GL-модели, будут принадлежать одному S-подмножеству. Исходя из этого, множество L следует формировать как множество пар $\{R_{S_i}^w, R_{S_j}^q\}$, где $w = 1\,..\,s_i$, $q = 1\,..\,s_j$, $i = 1\,..\,p-1$, $j = (i+1)\,..\,p$; $R_{S_i}^w$ — ребро из S_i-подмножества. Найдем такие значения s_1, s_2, …, s_p, при которых мощность множества L будет максимальной.

Очевидно, что $1 \le s_i \le r-p+1$, где $i = 1 \dots p$. Пусть имеются $S_1, S_2, \dots \dots$, S_p-подмножества и соответствующие мощности s_1, s_2, ..., s_p. Исходя из сказанного выше, можно записать следующее:

$$l_{\max}(s_1, s_2, \dots, s_p) = C^1_{S_1}(C^1_{S_2} + C^1_{S_3} + \dots + C^1_{S_p}) + C^1_{S_2}(C^1_{S_3} + \dots + C^1_{S_p}) + \dots$$

$$\dots + C^1_{S_{(p-1)}} C^1_{S_p} = s_1(s_2 + s_3 + \dots + s_p) + \dots + s_{P-1}\, s_P = \sum_{\substack{i,j=1\\ j>i}}^{p} s_i s_j. \qquad (5)$$

Заметим, что

$$s_1 + s_2 + \dots + s_P = \sum_{i=1}^{p} s_i = r.$$

Определим значения аргументов s_i, при которых функция $l_{\max}(s_1, s_2, \dots$ $\dots, s_p)$ примет максимальное значение. Это произойдет при $s_1 = s_2 = s_3 = \dots$ $\dots = s_P = r/p$. Действительно,

$$l_{\max}(s_1, s_2, \dots, s_p) = \sum_{\substack{i,j=1\\ j>i}}^{p} s_i s_j = \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{p} s_i\right)^2 - \sum\limits_{i=1}^{p} s_i^2}{2}.$$

Отсюда следует, что $l_{\max}(s_1, s_2, \dots, s_p)$ достигает максимума, когда значение $\sum\limits_{i=1}^{p} s_i^2$ минимально. Пусть $s' = r/p$, тогда s_i можно представить как $s_i = (s' - \sigma_i)$, где $\sum\limits_{i=1}^{p} \sigma_i = 0$, $\sigma_i < s_i$, $i = 1, \dots, p$. Выполним преобразования:

$$\sum_{i=1}^{p} s_i^2 = \sum_{i=1}^{p} (s' - \sigma_i)^2 = \sum_{i=1}^{p} (s')^2 - \sum_{i=1}^{p} 2s'\sigma_i + \sum_{i=1}^{p} \sigma_i^2 = p(s')^2 + \sum_{i=1}^{p} \sigma_i^2.$$

Поскольку $\sigma_i^2 \ge 0$, сумма $\sum\limits_{i=1}^{p} s_i^2$ примет минимальное значение при $\sigma_i^2 = 0$, т. е. когда $s_i = s' = r/p$, что и требовалось доказать. Подставив в (4) значение $s_i = r/p$, $i = 1, 2, \dots, p$, получим

$$l_{\max}(r, p) = \frac{r^2}{2}\,\frac{(p-1)}{p}.$$

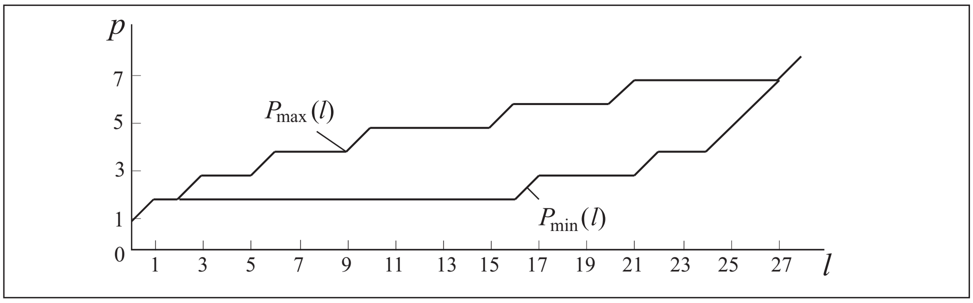

Рис. 3. Границы $P_{\min}(l)$ и $P_{\max}(l)$ для случая $r=8$

Следует заметить, что значения этой функции являются действительными числами, но на самом деле функция $l_{\max}$ должна принимать натуральные значения. Поскольку $s_1, s_2, ..., s_p$ также могут принимать только натуральные значения, $s_i = \left[\frac{r}{p}\right]$ либо $s_i = \left[\frac{r}{p}\right]+1$. Пусть $s_1 = \left[\frac{r}{p}\right]$, а остальные $s_2, ..., s_p$ равны либо $\left[\frac{r}{p}\right]+1$, либо $\left[\frac{r}{p}\right]$, что определяется остатком $\left\{\frac{r}{p}\right\}$, который обозначим α. Учитывая, что $\sum_{i=1}^{p} s_i = r$, а также тот факт, что взаимное расположение S-подмножеств одно относительно другого не имеет значения, можно считать, что

$$s_1, s_2, ..., s_{p-\alpha} = \left[\frac{r}{p}\right], \quad s_{p-\alpha+1}, ..., s_p = \left[\frac{r}{p}\right]+1.$$

Подставив новые значения аргументов в формулу (5) и упростив ее, получим

$$l'_{\max}(r,p) = C_{p-\alpha}^2 \left[\frac{r}{p}\right]^2 + C_\alpha^2 \left(\left[\frac{r}{p}\right]+1\right)^2 + C_\alpha^1 C_{p-\alpha}^1 \left[\frac{r}{p}\right]\left(\left[\frac{r}{p}\right]+1\right) =$$

$$= \frac{p(p-1)}{2}\left[\frac{r}{p}\right]^2 + \frac{\alpha - 1 + 2\left[\frac{r}{p}\right](p-1)}{2}\alpha.$$

С помощью этой формулы находим точные значения. В результате достаточно большого числа экспериментов установлено, что среднее значение абсолютной погрешности зависит от значения r:

$$|l'_{\max}(r,p) - l_{\max}(r,p)| \cong 0{,}0386r.$$

Далее в расчетах будем использовать функцию $l_{\max}(r, p)$, так как она не содержит целочисленного деления и, следовательно, более проста в применении. Поскольку $l_{\max}(p)$ и $p_{\min}(l)$ — функции взаимно обратные, представив l как аргумент функции p, легко определим нижнюю границу числа S-подмножеств:

$$p_{\min}(l, r) = \frac{r^2}{r^2 - 2l}. \tag{6}$$

Полученные выше результаты можно представить в виде неравенств:

$$\frac{r^2}{r^2 - 2l} \le p(r, l) \le \frac{1 + \sqrt{1 + 8l}}{2};$$

$$\frac{p(p-1)}{2} \le l(p, r) \le \frac{p(p-1)}{2}\left[\frac{r}{p}\right]^2 + \frac{\alpha - 1 + 2\left[\frac{r}{p}\right](p-1)}{2}\alpha.$$

Границы числа S-подмножеств, вычисленные для конкретного примера по формулам (4) и (6), показаны на рис. 3. Найденные границы не являются натуральными числами, поэтому округлим нижнюю границу в сторону меньшего целого числа, а верхнюю — в сторону большего, чтобы не потерять их возможные значения:

$$\left[\frac{r^2}{r^2 - 2l}\right] \le p(r, l) \le \left]\frac{1 + \sqrt{1 + 8l}}{2}\right[.$$

Следует заметить, что полученная формула (6) для нижней границы числа S-подмножеств совпадает с результатами, приведенными в работе [5] для нижней границы хроматического числа произвольного графа, что подтверждает правильность данных рассуждений.

Выводы. Полученные результаты дают возможность оценить сложность GL-модели разрабатываемой ОМС на ранних стадиях проектирования. Ее сложность зависит от числа модулей системы, степени отказоустойчивости, а также от множества векторов состояния ОМС, которые отличают модель проектируемой системы от базовой. Полученные оценки могут помочь разработчику заранее определить ресурсы (вычислительные и временные), необходимые для расчета надежности ОМС с требуемой точностью.

The main edge number estimates are given for base *GL*-models construction with minimum failed edges number which reflect reaction of failure-resistance multi-module system for failure occurrence. The boundary estimates of additional edges number are given to transform base *GL*-models to non-base.

1. *Харченко В. С., Жихарев В. Я., Илюшко В. М., Нечипорук Н. В.* Многоверсионные системы, технологии, проекты. — Харьков : Национальный аэрокосмический ун-т «Харьковский авиационный ин-т», 2003. — 486 с.
2. *Романкевич А. М., Карачун Л. Ф., Романкевич В. А.* Графо-логические модели для анализа сложных отказоустойчивых вычислительных систем//Электрон. моделирование. — 2001. — **23**, № 1. — С. 102—111.
3. *Романкевич В. А., Потапова Е. Р., Бахтари Хедаятоллах, Назаренко В. В. GL*-модель поведения отказоустойчивых многопроцессорных систем с минимальным числом теряемых ребер // Вісник НТУУ «КПІ». Інформатика, управління та обчислювальна техніка. — 2006. — № 45. — С. 93—100.
4. *Романкевич А. М., Иванов В.В., Романкевич В.А.* Анализ ОМС со сложным распределением отказов на основе циклической GL-модели// Электрон. моделирование. — 2004. — **26**, № 5. — С. 67—81.
5. *Geller D. P.* Problem 5713// American Mathematical Monthly. — 1970. —Vol. 77, № 1. — P. 85.

Поступила 19.04.07

РОМАНКЕВИЧ Алексей Михайлович, д-р техн. наук, профессор каф. специализированных компьютерных систем НТУУ «КПИ». В1961 г. окончил Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований — самопроверяемые схемы, псевдослучайное тестирование цифровой аппаратуры, отказоустойчивые многопроцессорные системы.

РОМАНКЕВИЧ Виталий Алексеевич, канд. техн. наук, доцент каф. специализированных компьютерных систем НТУУ «КПИ». в 1996 г. окончил Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований — модели поведения отказоустойчивых многопроцессорных систем, расчет надежности.

МАЙДАНЮК Иван Викторович, аспирант каф. специализированных компьютерных систем НТУУ «КПИ». В 2007 г. окончил Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований — отказоустойчивые многопроцессорные системы.