УДК 512.972

Ю. Н. Минаев, д-р техн. наук
Национальный авиационный университет
(Украина, 03057, Киев, пр-т Космонавта Комарова, 1,
тел.: (044) 4067678, E-mail: minaev@iit.nau.edu.ua),
О. Ю. Филимонова, канд. техн. наук
Киевский национальный университет строительства и архитектуры
(Украина, 03037, Киев, Воздухофлотский пр-т, 31,
тел.: (044) 241-54-52, E-mail: filimonova@nm.ru)

Нечеткая математика на основе тензорных моделей неопределенности. I. Тензор-переменная в системе нечетких множеств

(Статью представил д-р техн. наук В. Г. Тоценко)

Рассмотрено представление неопределенности, в том числе неопределенности, моделируемой в форме нечетких множеств, в виде главных и присоединенных тензоров четных рангов и их инвариантов. Проведена сравнительная оценка моделирования интервала и нечеткой переменной тензором 2-го и 4-го рангов. Приведены примеры.

Розглянуто представлення невизначеності, у тому числі невизначеності, що моделюється у формі нечітких множин, у вигляді головних і приєднаних тензорів парних рангів та їх інваріантів. Проведено порівняльну оцінку моделювання інтервалу і нечіткої змінної тензором 2-го та 4-го рангів. Наведено приклади.

Ключевые слова: нечеткая математика, тензор, инвариант.

Решение задач управления в условиях неопределенности представляет собой ключевую проблему управления — от автоматического до управления в социально-экономических системах. Многообразие типов и форм неопределенности заставляет искать новые методы управления и принятия решений в условиях неопределенности. Успехи в этом направлении, очевидно, могут быть достигнуты при использовании интеллектуальных методов и технологий. В настоящее время многообразие типов и форм неопределенности практически сведено к одному — неопределенности, представляемой интервалами и в виде нечетких множеств (НМ), позволяющих с помощью понятия «функция принадлежности» (ФП) дать объективное представление субъективным утверждениям и оценкам [1]. Разработан аппарат, позволяющий реализовать операции нечеткой математики и логики [2].

Решение задач в условиях неопределенности на основе интеллектуальных технологий (ИТ) в настоящее время связывают с мягкими вычислениями (МВ) и вычислительным интеллектом. Эти области науки как направление развития искусственного интеллекта терминологически связаны с работами [1, 2], но многие фундаментальные положения этого направления изложены в работах [3—5]. В работе [4] предложены принципы тензорного анализа сложных объектов, которые представляют собой основополагающие концепции и парадигмы искусственного интеллекта.

Обзор результатов исследований, связанных с МВ (рассматриваемых в комплексе с мягкими измерениями (МИ)) приведен в работе [5], в которой упомянуто, что главный принцип МВ предполагает толерантность к недостаточной точности, истинности ради возможности прозрачной интерпретируемости решения и его невысокой стоимости. К этому следует добавить широкое использование принципов гарантированного результата и правдоподобных (не обязательно математически корректных) рассуждений. Часто математически корректные рассуждения не выглядят правдоподобными, в то время как математически некорректные рассуждения человеческий мозг воспринимает как абсолютно правдоподобные.

Главной причиной использования ИТ (в том числе МВ) является то, что в подавляющем большинстве современных задач управления, связанных с принятием решений, необходимо учитывать наличие сложной информационной ситуации, особенностью которой является достаточно высокая априорная неопределенность относительно свойств объекта и влияния окружающей среды, невозможность непосредственного наблюдения и измерения основных параметров объекта, т.е. большая неточность и неполнота априорной информации. Можно полагать, что модель неопределенности и способ ее преодоления являются главными компонентами, определяющими смысл и содержание ИТ. В работе [5] для реализации МВ применены методы приближенных вычислений и рассуждений, основанные на функциональной аппроксимации, случайном поиске и оптимизации, а также рекомендуется использовать нейронные сети для решения задач локального поиска и эволюционных алгоритмов для задач глобального поиска.

Концептуально МВ восходят к теории НМ, поэтому нечеткие значения (численные и лингвистические) представляют в форме ФП, определенных на интервале [0, 1]. Для уменьшения объема вычислительных процедур используют преимущественно трапециевидные ФП, хотя они не всегда соответствуют модели неопределенности. В общем случае наиболее рациональна треугольная ФП, так как она позволяет охватить все формы неопределенности, кроме того, тензорные модели неопределенности могут обходиться без явного задания ФП (скрытая ФП).

В [5] идет речь о неразрывной связи между МВ (рассматриваемыми как нечеткие системы, нейронные сети, эволюционные вычисления, генетические алгоритмы и генетическое программирование) и МИ. Однако в данном случае МИ не рассматриваются. Будем рассматривать преимущественно нечеткую математику. Современная точка зрения на эту проблему состоит в том, что на основе НМ создан новый метод вычислительной математики, который поддержан аппаратными средствами (нечеткими процессорами) и в ряде проблемных областей стал более эффективным, чем классические методы. Сначала эти области входили в проблематику искусственного интеллекта, но постепенно их круг существенно расширился и сформировалось направление «вычислительный интеллект». В это направление включают:

нечеткую математику, логику, теорию НМ;

нечеткие экспертные системы;

системы приближенных вычислений;

теорию хаоса, фрактальный анализ, нелинейные динамические системы;

гибридные системы (нейронечеткие или нейрологические, генетиконейронные, нечетко-генетические или логико-генетические системы);

системы, управляемые данными (нейронные сети, эволюционные вычисления).

Тензорный подход к моделированию неопределенностей. Нечеткое множество как модель неопределенности в ряде случаев не позволяет оценить объект адекватно, так как неопределенность — это более сложный объект, чем его модель в виде НМ. Характерной чертой моделирования неопределенности в виде НМ является то, что один и тот же объект может быть представлен различными экспертами по-разному. Аппарата, позволяющего унифицировать эту субъективность, не существует, однако отношения сходства и подобия используются для решения таких задач.

В работе [4] показано, что представление объекта исследования (измерения) в виде тензора является более адекватным, чем представление в виде величины. Тензорная модель, рассматриваемая как матричная проекция, позволяет анализировать объект в различных системах координат, т.е. экспертные оценки объекта рассматриваются как один и тот же объект в различных системах координат. Соответствие между этими системами координат, характеризуемыми тензорами, может быть установлено при помощи «тензора присоединения», позволяющего согласовать и связать различные точки зрения. Не исключено, что разнообразие точек зрения — это разнообразие систем координат. Будучи приведенными к одной системе эти разнообразные, на первый взгляд, точки зрения, окажутся адекватными. Можно полагать, что условия неопределенности, различные в разных базисах, могут привести к тому, что в определенном базисе система может быть частично (или полностью) определенной. Базис — это точка зрения или состояние исследуемого объекта.

Особенностью тензорной модели объекта является то, что при изменении координат компоненты тензора изменяются, а свойства тензора остаются инвариантными. Для симметричного тензора существует возможность такого поворота координат, при котором элементы тензора сокращаются к диагональной форме. Такая форма значительно более проста для анализа и представляет собой одно из свойств НМ — его дефадзификацию (представление в четкой форме).

Свойства тензора, остающиеся неизменными при преобразованиях координат, определяются системой его инвариантов, представляющих собою константы, значения которых сохраняются при изменении системы координат. Величины главных инвариантов могут быть определены через собственные значения, число главных инвариантов для тензора ранга r определяется выражением $r+1$. В общем случае число независимых инвариантов гораздо больше. Оно определяется разложением главного тензора на систему присоединенных тензоров: симметричный — кососимметричный, девиатор — изотропный. Например, для тензора 2-го ранга в общем случае существует восемь независимых инвариантов. Одной из важных инвариантных характеристик тензора является его величина — магнитуда, определяемая на основе параметров матрицы тензора.

Существуют некоторые особенности моделирования неопределенности на основе НМ:

необходимость обязательного задания ФП для отдельной НП приводит к тому, что неоднозначное представление результатов измерений (вычислений) в виде множества требует дополнительно обязательного ранжирования с помощью ФП;

невозможность определить (вычислить) некоторые свойства НП, в частности обратная величина не определена;

недостаточная обоснованность меры на нечетких множествах (используется четкая мера для нечетких объектов).

Представление НП в виде тензора (тензор-переменной). Тензоры представляют собой физическое состояние информации, зависимой от избранной координатной системы, в которой она измеряется или воссоздается. В данном случае система координат не всегда является системой координат в математическом понимании. Иногда она означает точку зрения или способ получения (обработки) информации. В зависимости от свойств, которые нужно подчеркнуть, тензор может быть эквивалентно определен, как множество компонентов, подчиняющихся специфическим трансформационным правилам при изменении системы координат (точка зрения отдельного индивида (эксперта), в частности, обнаруживаемая в назначении ФП), как геометрический объект, имеющий определенные свойства, остающиеся инвариантными в разных системах координат, либо как линейная или полилинейная форма на других тензорах [7 —16]. Любое из этих определений взаимозависимо и часто не может обсуждаться в отдельности. Рассмотрим эти определения, имея в виду возможности их представления в виде НП, нечетких чисел (НЧ) или универсальных множеств.

Компоненты. Тензор — это множество компонент, связанных с определенной координатной системой, которое трансформируется в соответст-ветствии со специальными правилами координатных систем. Трехмерный тензор 2-го ранга, являющийся базовым для представления НП (НЧ), состоит из девяти компонент, объединенных в квадратную матрицу. В свою очередь, матрицу 3×3 можно рассматривать как находящуюся в состоянии деформаций: растягивание, обращение и смещение. Влияние неопределенности в отдельных случаях можно рассматривать как деформации этой матрицы, моделирующей переменную.

Следует заметить, что, во-первых, в наиболее частых случаях НП может быть представлена в виде треугольной ФП; во-вторых, интервальная форма определения переменной предусматривает, в частности, наличие трех значений — максимального, минимального и среднего; в-третьих, отдельная переменная или интервал в терминах НМ имеют одинаковое представление. Например, действительное число a и интервал $A = [a_1, a_2]$ представляются в виде следующих ФП:

$$\mu_a(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x = a, \\ 0, \text{ иначе;} \end{cases} \quad \mu_A(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } a_1 \le x \le a_2, \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Интервальное представление объекта является базовым, так как позволяет объективно определить ФП переменной, опирающейся на интервал. Кроме того, интервальное представление на основании принципа экстремальной энтропии позволяет определить распределения, являющиеся наиболее плохими с точки зрения энтропийных характеристик объекта [4] .

Целесообразность тензорного представления НП (НЧ) подтверждается тем, что тензоры высоких рангов имеют свойство свертки, а это позволяет их представлять тензорами низких рангов. Это, во- первых, упрощает анализ, во-вторых, расширяет возможности моделирования НП и арифметических операций над ними. В частности, для тензорных моделей НП (НЧ) могут быть определены обратные величины, что принципиально невозможно в нечеткой математике.

Линейная форма. Тензор — это линейная или полилинейная форма. Тензор 2-го ранга — это билинейная форма. Из тензорного исчисления известно, что тензор 2-го ранга количественно определяется как билинейная форма $w \otimes v$. Тензор 2-го ранга принимается в форме квадратной матрицы и ассоциируется с двумя направлениями в пространстве. Имея $T = \lfloor t_{ij} \rfloor = w \otimes v$, $j, i = 1, 2, 3$, и один из векторов, можем вычислить один вектор через другой. В связи с тем, что тензор 2-го ранга представляется матрицей, его трансформации включают обычные матричные преобразования векторов.

В тензорном анализе широко используется индексная нотация, при этом все индексы представляются разными литерами, и каждый индекс, независимо от других, пробегает значение от 1 до n, например a^{ij}_{klm} или b^{ij}_{k}. Принято соглашение, если в выражении, которое содержит верхние и нижние индексы, один или несколько верхних индексов совпадают с нижними индексами, то это означает, что суммирование выполняется по всем совпадающим индексам, причем любой из совпадающих индексов независимо пробегает от 1 до n. Например,

$$a^{ij}_{kim} = \sum_{k=1}^{n} a^{ij}_{kim},\ a^{ij}_{klm} b^{ki}_{hi} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a^{ij}_{klm} b^{ki}_{hi}.$$

Сформулированное положение называется соглашением Эйнштейна о сумме.

Пример. Если $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ — три вектора, то $d_{ikl} = a_i b_k c_l$ — тензор третьего ранга, число компонент которого $3 \times 3 \times 3 = 27$.

Некоторые важные следствия, вытекающие из определения тензора:

тензор можно получить, исходя из произвольной совокупности n^{p+q} чисел $a^{i_1, \ldots, i_q}_{j_1, \ldots, j_p}$;

любой тензор 2-го ранга может быть разложен на сумму попарных произведений компонент трех векторов;

скалярное произведение задает дважды ковариантный тензор или дважды контрвариантный тензор, который называется метрическим дважды ковариантным тензором или метрическим дважды контравариантным тензором.

Свертка тензоров. Пусть A — тензор типа (p, q), $p > 0$ и $q > 0$. У каждой координаты $a^{k_1, \ldots, k_q}_{i_1, \ldots, i_p}$ тензора A выделим верхний индекс m $(1 \le m \le q)$ и нижний индекс n $(1 \le n \le p)$. Выполним суммирование (свертывание) координат тензора с одинаковыми выделенными индексами с номерами m и n, воспользовавшись соглашением о суммировании. Доказано, что полученные числа $\left\{ a^{k_1, \ldots\alpha, \ldots, k_q}_{i_1, \ldots\alpha, \ldots, i_p} \right\}$ образуют тензор типа $(p-1, q-1)$, т. е свертка понизила ранг тензора на два. Для тензоров высоких рангов свертка выполняется по такому алгоритму.

1. Выбираем пару индексов, по которым предполагается выполнение свертки.

2. Матрицу компонент тензора разбиваем на тройки, состоящие из компонент, в которых $n-2$ индекса создают некоторый фиксированный для этой группы набор, а выделенные две имеют значение 1...1, 2...2, 3...3, т.е образуют одну из трех возможных пар одинаковых чисел.

3. Полученные в п. 2 три компонента суммируем и получаем число, которое обозначается $n-2$ индексами. Всего таких чисел будет столько, сколько троек компонент можно выделить, а именно 3^{n-2}, т.е. если выполняется свертка тензора A по второму и $n-1$ индексам, то определяются суммы $B_{ik\ldots rs} = \sum_{i=1}^{3} A_{ilk\ldots rs}$.

П р и м е р. Пусть A — тензор типа (p, q), например линейный оператор, действующий в пространстве V. Пусть в базисе $v_1 \ldots v_n$ тензору A соответствует матрица (a^i_j). Тогда в результате операции свертывания , примененной к A, получаем тензор типа (0, 0), что в базисе $v_1 \ldots v_n$ задается одним числом $\alpha = a^i_j = a^1_1 + a^2_2 + \ldots + a^n_n$, которое представляет собой след матрицы (a^i_j). Термин «свертка тензоров» иногда употребляют в таком случае. Пусть A и B — два тензора, причем у одного из них есть хотя бы один верхний индекс j, у другого — один нижний индекс u. Свертка тензоров A и B по индексам u и j — это свертка произведения AB по индексам i и j.

Диадное представление НП (НЧ). Диада соответствует представлению НЧ(НП) в форме значение (1-й вектор)/ФП (2-й вектор) $\widetilde{x} = \{x/\mu\} = \{x_i/\mu_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Например, треугольная ФП в нотации MatLab имеет форму TRIMF(X, PARAMS), где PARAMS = [A B C] моделирует (представляет) трехэлементный вектор, определяющий крайние точки ФП: $A \le B \le C$. Как известно, общий вид диады $x \otimes \mu$, где символ $\otimes$ означает диадное произведение. Диада между двумя векторами, x и μ, — это абстрактная математическая конструкция, которая определяется как $x \otimes \mu$ и имеет содержание, если она используется в операциях с любым произвольным вектором v: $(x \otimes \mu) \bullet v = x\,(\mu \bullet v)(\forall\, x)$. В общем случае для диады не существует комутативности: $x \otimes \mu \ne \mu \otimes x$. Однако в рассматриваемом случае это не имеет принципиального значения, так как тензоры, связанные с диадами, имеют абсолютно одинаковые инварианты: $\mathrm{Inv}\,(x \otimes \mu) = \mathrm{Inv}\,(\mu \otimes x)$. Для упрощения примем $x \otimes \mu = \mu x$.

Как известно [6], нечетким подмножеством A универсального множества E называется множество упорядоченных пар $\{(x \mid \mu_{\widetilde{A}}(x))\}$, $\forall x \in E$, где $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ — степень принадлежности x в $\widetilde{A}$. Если $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ принимает свои значения в множестве M значений ФП, то x принимает значения M через функцию $\mu_{\widetilde{A}}(x)$, которую можно рассматривать как характеристическую функцию принадлежности на множестве $M = \{0, 1\}$.

Сформируем новое подмножество, которое назовем тензор-подмножеством A множества E, выполнив его в виде матрицы, реализовав тензорное произведение вектор-строки $a = \{a_j\}$ и вектор-столбца $\mu_{\widetilde{A}}(x) = \{\mu^j_{\widetilde{A}}\}$, $j = \overline{1, n}$ (НП $\widetilde{a} = \{a_j / \mu^a_i\}, i = \overline{1, n}$): $T_{\widetilde{A}} = a \bullet \mu_{\widetilde{A}}(x)$, где $\bullet$ знак тензорного произведения, $T_{\widetilde{A}} = [t^j_i]$, $i, j = \overline{1, n}$. Тензор, образованный указанным способом, является диадным тензором 2-го ранга и имеет следующий вид:

$$
\begin{array}{c|c}
(a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n) & \dfrac{\widetilde{a}}{\mu^a} \\
\hline
\begin{pmatrix}
a_1\mu^a_1 & a_1\mu^a_2 & \dots & a_1\mu^a_n \\
a_2\mu^a_1 & a_2\mu^a_2 & \dots & a_2\mu^a_n \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
a_n\mu^a_1 & a_n\mu^a_2 & \dots & a_n\mu^a_n
\end{pmatrix} &
\begin{pmatrix}
\mu_1 \\ \mu_2 \\ . \\ \mu_n
\end{pmatrix}
\end{array},
$$

$$
T_{\widetilde{A}} = \begin{pmatrix}
a_1\mu^a_1 & a_1\mu^a_2 & \dots & a_1\mu^a_n \\
a_2\mu^a_1 & a_2\mu^a_2 & \dots & a_2\mu^a_n \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
a_n\mu^a_1 & a_n\mu^a_2 & \dots & a_n\mu^a_n
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\
t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn}
\end{pmatrix} = [t^a_{ij}]^{j=\overline{1,n}}_{i=\overline{1,n}},
$$

$$
T_{\widetilde{A}} \to T^D_{\widetilde{A}} = \begin{pmatrix}
t_{11} & 0 & \dots & 0 \\
0 & t_{22} & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & t_{nn}
\end{pmatrix} = [t^a_{ij}]^{j=\overline{1,n}}_{i=\overline{1,n}},
$$

где $t_{ij} = a_i \mu^a_j$; $T_{\widetilde{A}}$, $T^D_{\widetilde{A}}$ — полная и диагональная матрицы, соответствующие НП.

Тензор-переменную для арифметических операций можно рассматривать как $n \times n$-матрицу, для которой арифметические операции над НЧ(НП) имеют матричные аналоги, т.е. $\widetilde{a} *_f \widetilde{b} \to T_{\widetilde{A}} *_f T_{\widetilde{B}}$ (для полных матриц) или $T^D_{\widetilde{A}} *_f T^D_{\widetilde{B}}$ (для диагональных), где $*_f \in \{+, -, *, /\}$, и как множество элементов $\{t_{ij}\}=\{a_i\mu_j^a\}$, полученных чтением матрицы по строкам или столбцам, и таким образом реализовать теоретико-множественные операции. Следует заметить, что аналогично теоретико-множественные операции могут быть реализованы над множествами, полученными в результате вычисления диагоналей тензор-переменных, а также для диадного тензора $T_{\widetilde{A}}$ все инварианты, кроме нулевого и первого, равны нулю.

Теоретико-множественные операции для тензор-переменных выполняются над множествами, представляющими построчное или постолбцовое разложение соответствующих матриц.

Операции вложенности для НМ $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ — $\widetilde{A}\subset\widetilde{B}$ выполняются, если $\forall x\in E:$, $\mu_{\widetilde{A}}(x)\le\mu_{\widetilde{B}}(x)$, для тензор-множеств $T_{\widetilde{A}}$ и $T_{\widetilde{B}}$, порожденных НМ $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$, — если $I_0^{T_A}\le I_0^{T_B}$, где $I_0^{T_A}, I_0^{T_B}$ — нулевые инварианты тензоров соответственно $T_{\widetilde{A}}$ и $T_{\widetilde{B}}$.

Операции пересечения НМ $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ — $\widetilde{A}\bigcap\widetilde{B}$ выполняются, если $\mu_{\widetilde{A}\cap\widetilde{B}}(x)=$ $=\min(\mu_{\widetilde{A}}(x),\mu_{\widetilde{B}}(x)):\forall x\in E$, для тензор-множеств соответственно $T_{\widetilde{A}}$ и $T_{\widetilde{B}}$, порожденных НМ $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$, также можно определить $T_{\widetilde{A}\cap\widetilde{B}}=\min(T_{\widetilde{A}},T_{\widetilde{B}})$.

Операции объединения НМ $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ — $\widetilde{A}\bigcup\widetilde{B}$ выполняются, если $\mu_{\widetilde{A}\cup\widetilde{B}}(x)=$ $=\max(\mu_{\widetilde{A}}(x),\mu_{\widetilde{B}}(x)):\forall x\in E$, для тензор-множеств $T_{\widetilde{A}}$ и $T_{\widetilde{B}}$, порожденных НМ $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$, $T_{\widetilde{A}\cup\widetilde{B}}=\max(T_{\widetilde{A}},T_{\widetilde{B}})$. Элементы $x^p/\mu_{\widetilde{A}\cap\widetilde{B}}(x)$ и $x^0/\mu_{\widetilde{A}\cup\widetilde{B}}(x)$ эквивалентны $T_{\widetilde{A}\cap\widetilde{B}}$ и $T_{\widetilde{A}\cup\widetilde{B}}$, так как для НМ с унимодальной (в частности, треугольной) ФП $T_{\widetilde{A}\cap\widetilde{B}}=x^p*\mu_{\widetilde{A}\cap\widetilde{B}}(x)$ и $T_{\widetilde{A}\cup\widetilde{B}}=x^0*\mu_{\widetilde{A}\cup\widetilde{B}}(x)$.

Операции дополнения. Нечеткие множества $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ дополняют одно другое, $\widetilde{\widetilde{A}}=\widetilde{B}$ или $\widetilde{\widetilde{B}}=\widetilde{A}$; если $\forall x\in E$: $\mu_B(x)=1-\mu_{\widetilde{A}}(x)$, то это дополнение определено для $M=\{0, 1\}$, для тензор-множеств $T_{\widetilde{A}}$ и $T_{\widetilde{B}}$, порожденных НМ $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$, определение дополнения можно расширить (псевдодополнения) на другие упорядоченные множества М, используя подходящие определения, так как непосредственно оно не выполняется. Заметим, что все определения дополнения связаны с определением решетчатой структуры рассматриваемого множества. Можно считать, что тензор-множества представляют собою решетки, поэтому условия дополнения при определенных условиях могут быть найдены. Однако необходимо учитывать, что для тензор-множества множество всех подмножеств $\wp(x)$ содержит $m\times n$ элементов, в то время как НМ, образовавшее тензор-переменную, имеет m^n элементов.

Свойства НМ и тензор-множеств формально можно представить в аналогичном виде, используя при этом развернутые (по строкам или столбцам) матрицы:

коммутативность —

$$\widetilde{A}\cap\widetilde{B}=\widetilde{B}\cap\widetilde{A}\rightarrow T_{\widetilde{A}}\cap T_{\widetilde{B}}=T_{\widetilde{B}}\cap T_{\widetilde{A}},$$

$$\widetilde{A}\cup\widetilde{B}=\widetilde{B}\cup\widetilde{A}\rightarrow T_{\widetilde{A}}\cup T_{\widetilde{B}}=T_{\widetilde{B}}\cup T_{\widetilde{A}};$$

ассоциативность —

$$(\widetilde{A}\cap\widetilde{B})\cap C=\widetilde{A}\cap(\widetilde{B}\cap\widetilde{C})\rightarrow(T_{\widetilde{A}}\cap T_{\widetilde{B}})\cap T_{\widetilde{C}}=T_{\widetilde{A}}\cap(T_{\widetilde{B}}\cap T_{\widetilde{C}}),$$

$$(\widetilde{A}\cup\widetilde{B})\cup\widetilde{C}=\widetilde{A}\cup(\widetilde{B}\cup\widetilde{C})\rightarrow(T_{\widetilde{A}}\cup T_{\widetilde{B}})\cup T_{\widetilde{C}}=T_{\widetilde{A}}\cup(T_{\widetilde{B}}\cup T_{\widetilde{C}});$$

идемпотентность —

$$\widetilde{A}\cap\widetilde{A}=\widetilde{A}\rightarrow T_{\widetilde{A}}\cap T_{\widetilde{A}}=T_{\widetilde{A}},$$

$$\widetilde{A}\cup\widetilde{A}=\widetilde{A}\rightarrow T_{\widetilde{A}}\cup T_{\widetilde{A}}=T_{\widetilde{A}};$$

дистрибутивность —

$$\widetilde{A}\cap(\widetilde{B}\cup C)=(\widetilde{A}\cap\widetilde{B})\cup(\widetilde{A}\cap\widetilde{C})\rightarrow T_{\widetilde{A}}\cap(T_{\widetilde{B}}\cup T_{\widetilde{C}})=(T_{\widetilde{A}}\cap T_{\widetilde{B}})\cup(T_{\widetilde{A}}\cap T_{\widetilde{C}}),$$

$$\widetilde{A}\cup(\widetilde{B}\cap C)=(\widetilde{A}\cup\widetilde{B})\cap(\widetilde{A}\cup\widetilde{C})\rightarrow T_{\widetilde{A}}\cup(T_{\widetilde{B}}\cap T_{\widetilde{C}})=(T_{\widetilde{A}}\cup T_{\widetilde{B}})\cap(T_{\widetilde{A}}\cup T_{\widetilde{C}});$$

$$\widetilde{A}\cap\varnothing_A=\varnothing_A,\ \widetilde{A}\cup\varnothing_A=\widetilde{A},$$

где $\varnothing_A$ — тензор-множество, образованное из $\widetilde{A}$ при условии, что $\forall x\in E$: $\mu_{\widetilde{A}}(x)=0$;

$$\widetilde{A}\cap E_A=\widetilde{A},\quad \widetilde{A}\cup E_A=E_A,$$

где E_A — тензор-множество, образованное из $\widetilde{A}$ при условии, что $\forall x\in E$: $\mu_{\widetilde{A}}(x)=1$.

Условия инволюции и теоремы Моргана для тензор-множеств не имеют прямых аналогов среди НМ и в каждом частном случае требуют дополнительного определения.

Алгебраическое произведение и сумма двух тензор-множеств могут быть определены, если учесть, что $\mu_{\widetilde{A}}(x)\bullet x\neq x\bullet\mu_{\widetilde{A}}(x)$, но инварианты для правой и левой частей одинаковы. Как известно, алгебраическое произведение НМ $\widetilde{A}\cdot\widetilde{B}$ определяется как $\mu_{\widetilde{A}\cdot\widetilde{B}}(x)=\mu_{\widetilde{A}}(x)\,\mu_{\widetilde{B}}(x)$: $\forall x\in E$. Для тензор-множеств $T_{\widetilde{A}}$ и $T_{\widetilde{B}}$, полученных на основании НМ $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ произведение $\widetilde{A}\,\widetilde{B}\rightarrow T_{\widetilde{A}}\,T_{\widetilde{B}}$ может быть определено следующим способом:

тензорное произведение тензоров $T_{\widetilde{A}}$, $T_{\widetilde{B}}$ — результатом есть тензор, ранг которого равняется сумме рангов тензоров $T_{\widetilde{A}}$, $T_{\widetilde{B}}$;

тензорное произведение тензоров $T_{\widetilde{A}}$, $T_{\widetilde{B}}$ со сверткой — результатом есть тензор, ранг которого на два меньше суммы рангов тензоров $T_{\widetilde{A}}$, $T_{\widetilde{B}}$;

матричное произведение матриц тензоров $T_{\widetilde{A}}$, $T_{\widetilde{B}}$.

Эти произведения дают различные результаты. Целесообразность использования той или иной процедуры определяется отдельно.

Алгебраическая сумма НМ $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ определяется так:

$$\widehat{\widetilde{A}\hat{+}\widetilde{B}} \rightarrow \forall x \in E{:}\,\mu_{\widetilde{A}\hat{+}\widetilde{B}}(x)=\mu_{\widetilde{A}}(x)+\mu_{\widetilde{B}}(x)-\mu_{\widetilde{A}}(x)\,\mu_{\widetilde{B}}(x).$$

Тензорное исчисление не имеет соответствующего аналога, но при условии, что тензоры $T_{\widetilde{A}}$, $T_{\widetilde{B}}$ имеют одинаковый ранг, можно определить процедуру $T_{\widetilde{A}}\hat{+}T_{\widetilde{B}}=T_{\widetilde{A}}+T_{\widetilde{B}}-T_{\widetilde{A}}T_{\widetilde{B}}$, дополнительно наложив ограничения, состоящие в том, что произведение $T_{\widetilde{A}}T_{\widetilde{B}}$ должно быть тензорным произведением со сверткой, так как только в этом случае гарантируется одинаковость рангов всех компонентов процедуры.

В работе [6] показано, что теорию НМ можно построить для любого типа решеток (в том числе для представляющих собою матрицы тензор-множеств), образованных на основе стандартных НМ, не вводя понятия дополнения (как в случае булевых решеток) или псевдодоповнення, о котором упоминалось выше.

Таким образом, представление НП в виде тензор-переменной позволяет использовать матричное и множественное представление объекта, разложив матрицу тензор-переменной по строкам или столбцам, что существенно расширяет возможности решения задач управления, анализа и обработки информации в условиях неопределенности в тензорном базисе.

Прикладная реализация НП в тензорном базисе в системе математического моделирования MatLab. Рассмотрим тензорное представление НП «приблизительно пять», определенной на интервале [1, 9], $\widetilde{x}=\{x_j/\mu_j^x\}$, $j=1, 9$. Представим ее в виде множеств, состоящих соответственно из трех и девяти пар «значение—функция принадлежности»:

$$x=\{1\ \ 5\ \ 9\},\ \mu_j^x=\{\,0{,}15\ \ \ 0{,}95\ \ \ 0{,}15\};\qquad(1)$$

$$x=\{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\},\ \mu_j^x=\{0{,}15\ 0{,}35\ 0{,}55\ 0{,}75\ 0{,}95\ 0{,}75\ 0{,}55\ 0{,}35\ 0{,}15\}.\qquad(2)$$

Диадный тензор получен с помощью средств MatLab — функция kron (x, mux^T), где T — символ транспонирования ФП. В результате моделирования получен главный тензор — диада соответственно для случаев (1) и (2):

$$Tx=\begin{pmatrix}0{,}15 & 0{,}75 & 1{,}35\\ 0{,}95 & 4{,}75 & 8{,}55\\ 0{,}15 & 0{,}75 & 1{,}35\end{pmatrix},$$

$$Tx1=\begin{pmatrix} 0{,}15 & 0{,}3 & 0{,}45 & 0{,}6 & 0{,}75 & 0{,}9 & 1{,}05 & 1{,}2 & 1{,}35 \\ 0{,}35 & 0{,}7 & 1{,}05 & 1{,}4 & 1{,}75 & 2{,}1 & 2{,}45 & 2{,}8 & 3{,}15 \\ 0{,}55 & 1{,}1 & 1{,}65 & 2{,}2 & 2{,}75 & 3{,}3 & 3{,}85 & 4{,}4 & 4{,}95 \\ 0{,}75 & 1{,}5 & 2{,}25 & 3{,}0 & 3{,}75 & 4{,}5 & 5{,}25 & 6{,}0 & 6{,}75 \\ 0{,}95 & 1{,}9 & 2{,}85 & 3{,}8 & 4{,}75 & 5{,}7 & 6{,}65 & 7{,}6 & 8{,}55 \\ 0{,}75 & 1{,}5 & 2{,}25 & 3{,}0 & 3{,}75 & 4{,}5 & 5{,}25 & 6{,}0 & 6{,}75 \\ 0{,}55 & 1{,}1 & 1{,}65 & 2{,}2 & 2{,}75 & 3{,}3 & 3{,}85 & 4{,}4 & 4{,}95 \\ 0{,}35 & 0{,}7 & 1{,}05 & 1{,}4 & 1{,}75 & 2{,}1 & 2{,}45 & 2{,}8 & 3{,}15 \\ 0{,}15 & 0{,}3 & 0{,}45 & 0{,}6 & 0{,}75 & 0{,}9 & 1{,}05 & 1{,}2 & 1{,}35 \end{pmatrix}.$$

Графически тезор-переменные представлены на рис. 1. Как видим, в случае (1) НП «приблизительно пять» моделируется тензором 2-го ранга, в случае (2) — тензором 4-го ранга. В результате специальных преобразований тензор может быть приведен к диагональной форме (см. рис. 1). Если НП имеет вид $\widetilde{x}=\{x_j/\mu_j^x\}$, то ее дефадзифицированное значение $x=\sum_{j=1}^{n} x_j\mu_j^x\left(1/\sum_{j=1}^{n}\mu_j^x\right)$ с точностью до множителя $1/\sum_{j=1}^{n}\mu_j^x$ совпадает со следом каждой из матриц Tx и $Tx1$.

На основе главного тензора могут быть получены так называемые присоединенные тензоры [8, 17, 18] — симметричный, асимметричный, девиатор и шаровой (изотропный), характеризующие дополнительные свойства НП, которые не видны при ее стандартном представлении (рис. 2). Шаровой тензор представляет «четкие» свойства НП и его можно считать простейшей аппроксимацией НП в тензорном базисе, а девиатор представляет вариабельность.

Как видно из рис. 1, 2, главный тензор и девиатор воссоздают форму и вид НП в трехмерном пространстве. Их проекции на одну из плоскостей полностью совпадают с кривой в координатах (x, μ^x).

На рис. 3 представлена тензорная модель НП «приблизительно пять», полученная на основе собственных значений (функция eig (T)). При этом учтено, что равенство $[V, D]$ = eig(X) позволяет вычислять диагольную матрицу D собственных величин и полную матрицу V, столбцы которой являются соответствующими собственными векторами, такими, что выполняется равенство $X*V = V*D$, где X — тензор-переменная. Как видим, НМ, рассматриваемое как набор пар значение — ФП или множество НП, может быть структурировано представлением НП в виде тензора. Целесообразно представлять НП в виде множества, состоящего из 3^n, n = 1, 2, ..., компонент, в этом случае получаем диадный тензор, свойства которого хо-

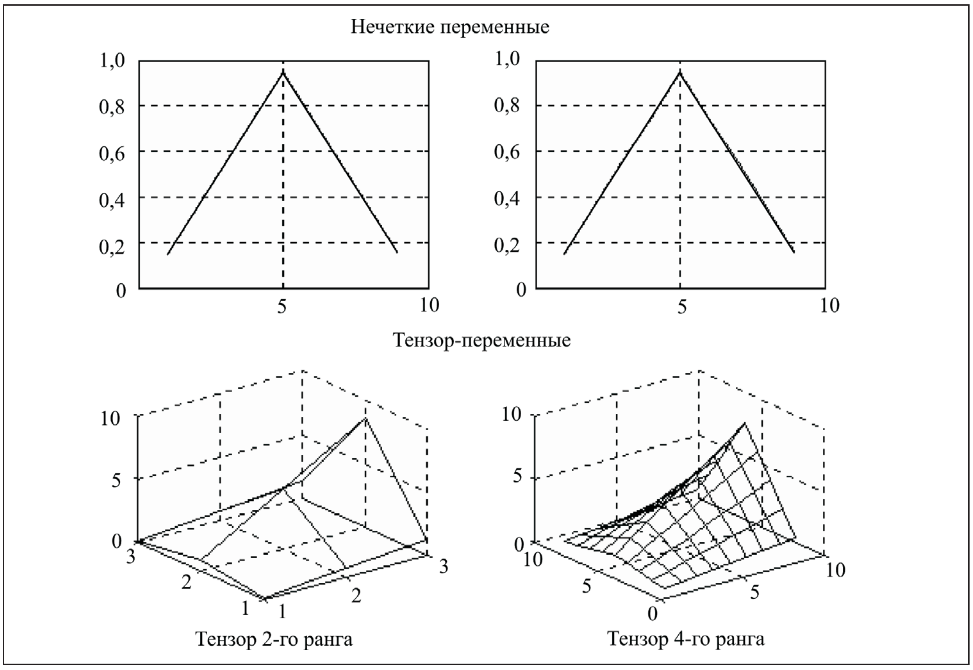
Нечеткие переменные
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
5
10
Тензор-переменные
10
5
0
3
2
1
Тензор 2-го ранга
Тензор 4-го ранга

Рис. 1

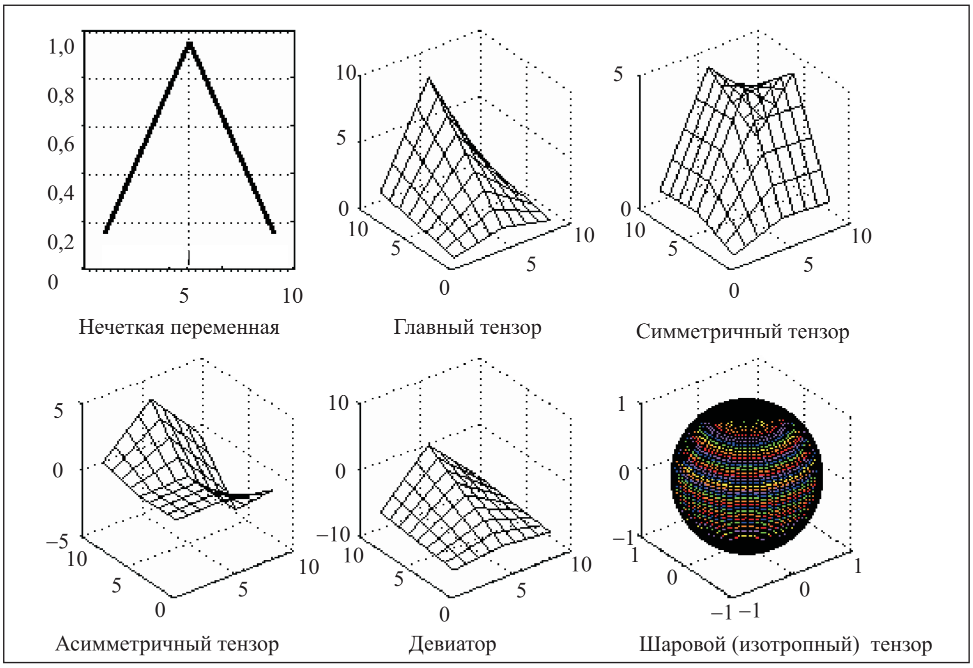
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
5
10
Нечеткая переменная
Главный тензор
Симметричный тензор
Асимметричный тензор
Девиатор
Шаровой (изотропный) тензор

Рис. 2

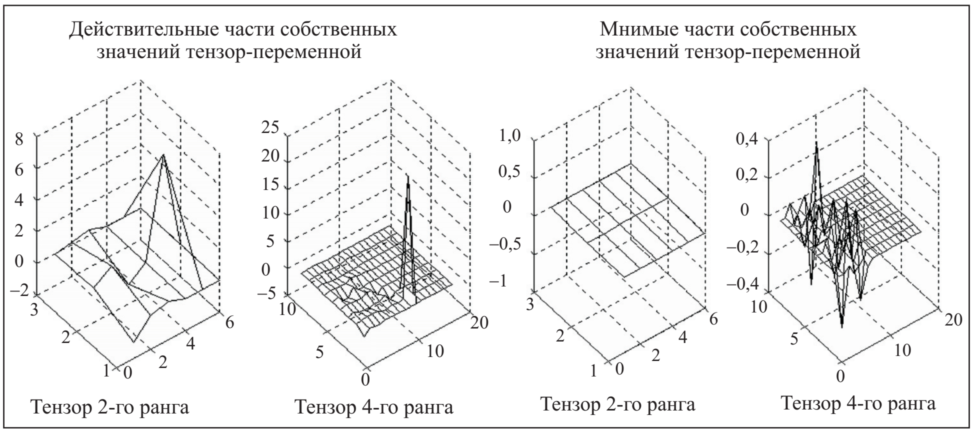

Рис. 3

рошо исследованы. Главное преимущество использования тензор-переменной как модели неопределенности состоит в следующем:

возможность представления объекта в виде 3^n чисел, $n = 1, 2, ...$, позволяет на основании принципа экстремальной энтропии определить ФП, объективно отражающую «значимость» элемента в составе объекта;

тензорное моделирование неопределенности позволяет существенно расширить множество определимых свойств, которыми характеризуется объект, так как тензор допускает разложение на множество присоединенных тензоров, что дает возможность получать дополнительную информацию об объекте;

свойства тензора (наличие инвариантов, однозначно характеризующих его, возможность свертки тензора) позволяют повысить конструктивность арифметических операций, выполняемых в системе НП.

Выводы. В общем случае неопределенность, моделируемая в форме НМ, является более сложным объектом, чем ее нечеткая модель, и ее следует представлять с помощью тензоров.

Тензорные модели НП (значение — ФП) позволяют определить дополнительные характеристики неопределенности.

Возможность сверток тензоров высоких рангов и однозначное представление тензора с помощью его инвариантов дают возможность упростить работу с НП при выполнении оценок.

The uncertainty presentation is considered as the main and attached tensors of even ranks and their invariants. These uncertainties include also uncertainties which are modeling as a fuzzy sets. Compared estimate is performed for modeling of interval and fuzzy variable and tensor of second and forth ranks. The examples are given.

1. *Заде Л. А.* Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. — М. : Мир, 1976. — 165 с.
2. *Zade L. A.* Fuzzy logic, neural networks and soft computing // Communications of the ACM. — 1994. — Vol. **37**, № 3. — P. 77—84.
3. *Шеннон К. Э.* Работы по теории информации и кибернетике. — М. : Мир, 1963. — 830 с.
4. *Крон Г.* Тензорный анализ сетей. — М. : Мир, 1978. — 720 с.
5. *Аверкин А. Н., Прокопчина С. В.* Мягкие вычисления и измерения// Интеллектуальные системы. — 1997. — 2, вып. 1— 4. — С. 94— 113.
6. *Кофман А.* Введение в теорию нечетких множеств. — М. : Радио и связь. — 1982 . — 432 с.
7. *Гельфанд И. М.* Курс лекций по линейной алгебре. 3-изд. — М. : Наука, 1966. — 280 с.
8. *Hartmann S.* Computational Aspects of the Symmetric Eigenvalue Problem of Second Order Tensors// Technische Mechanik. — 2003. — **23**, № 2—4. — P. 283— 294.
9. *Budiansky B.* Tensors. // Handbook of Applied Mathematics. 2nd Ed/ Edited by Carl E. Pearson. Van Nostrand Reinhold, 1990. —
10. *Tai Chen-To.* Generalized Vector and Dyadic Analysis.— Applied Mathematics in Field Theory. 2-nd Ed. — NY :IEEE Press, 1997.
11. *Simmonds J. G.* A Brief on Tensor Analysis. — NY: Springer-Verlag, 1994.
12. *Brannon R. M.* Introduction to Tensor Analysis. — http://me.unm.edu/~rmbrann/MohrsCircle.pdf
13. *Stewart G. W.* Introduction to Matrix Computations//Computer Scienceand Applied Mathematics. Series of monographs and textbooks. — San Diego: Academic Press, 1973.
14. *Arfken G. B. and Weber H. J.* Mathematical Methods for Physicists. — San Diego : Academic Press, 1995.
15. *Huang Yongnian, Luo Xiongping, Emily.C.Ching.* A discussion about scalar invariants for tensor functions // Acta Mech Sinica (English Series). — 2000. — **16**, № 1. — P. 35— 40.
16. *Минаев Ю. Н., Филимонова О. Ю.* Тензорный базис в концепции нечеткости и формальных методах//Материалы 10-й международной конференции по автоматическому управлению, Севастополь, 15—19 сентября 2003 г. Севастополь : СевНГУ, 2003. — С. 154—156.
17. *Минаев Ю. Н., Филимонова О. Ю.* Тензорный базис как основа новых алгоритмов решения задач управления в условиях неопределенности// Сб. трудов VI Всероссийской научно-технической конференции, Москва, 23 — 24 апреля 2003 г. «Новые информационные технологии». В 2-х томах.Т.1/Под общ. ред. А. П. Хныкина. — М. : МГАПИ, 2003. — С. 142—147.

Поступила 06.11.06;
после доработки 27.06.07

МИНАЕВ Юрий Николаевич, д-р техн. наук, профессор кафедры компьютерных систем и сетей Национального авиационного университета Украины. В 1959 г. окончил Харьковский политехнический ин-т. Область научных исследований — применение интеллектуальных технологий в системах принятия решений.

ФИЛИМОНОВА Оксана Юрьевна, канд. техн. наук, докторант Киевского национального университета строительства и архитектуры. В 1989 г. окончила Киевский инженерно-строительный ин-т. Область научных исследований — интеллектуальные технологии обработки информации в условиях неопределенности.