УДК 519.6

А. Л. Заворотный, **В. С. Касьянюк,** кандидаты физ.-мат. наук
Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко
(Украина, 03127, Киев, пр-т Глушкова, 6, корп. 2,
тел. (044) 2590530, E-mail: zal_ua@inbox.ru)

Парето-оптимальный подход к задаче восстановления параметров управляемого объекта

(Статью представил д-р физ.-мат. наук Ю. А. Белов)

В рамках парето-оптимального подхода решена задача восстановления параметров управляемого объекта. Рассмотрены статическая и динамическая модели управляемого объекта. Рассмотрен случай, когда производные характеристик состояния объекта могут быть искажены погрешностями.

В рамках парето-оптимального підходу розв`язано задачу відновлення параметрів керованого об'єкту. Розглянуто статичну та динамічну моделі керованого об'єкту. Розглянуто випадок, коли похідні характеристик стану об`єкту можуть бути збурені похибками.

Ключевые слова: система управления, восстановление параметров, оптимизация по Парето, оценивание.

При разработке систем управления наиболее важными задачами являются задача наблюдаемости и задача восстановления параметров системы управления (СУ). Первая возникает, например, в связи с необходимостью перехода от тестовой к производственной эксплуатации. При таком переходе, как правило, для удешевления СУ снимают часть датчиков, определяющих значения некоторых фазовых координат объекта. Отсутствие этих датчиков компенсируется математической обработкой имеющихся данных, с помощью которой восстанавливаются значения необходимых фазовых координат. Один из подходов к решению этой задачи рассмотрен, например, в [1].

Вторая задача, задача восстановления параметров СУ, возникает в связи с тем, что разработчик не всегда может указать точные значения тех или иных параметров СУ (параметров управляемого объекта). В большинстве случаев он укажет диапазоны, в которые попадают эти значения. Следовательно, возникает задача нахождения этих значений на основе данных, полученных в ходе испытаний.

Как и для решения задачи наблюдаемости [1], рассмотрим СУ некоторым объектом, модель которой задана системой линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A\,x + B\,u. \tag{1}$$

Напомним, что в уравнении (1) $x = (x_1(t), ..., x_n(t))^*$ — вектор действительных функций, моделирующий характеристики состояния объекта на отрезке времени $t \in [0; T]$; * — символ транспонирования; $u = (u_1(t), ..., u_n(t))^*$ — вектор действительных функций, моделирующих характеристики управления объектом на отрезке времени $t \in [0; T]$; A и B — n-мерные квадратные матрицы, задающие модель физических характеристик управляемого объекта и модель блока управления объектом; $\dot{x} = (\dot{x}_1(t), ..., \dot{x}_n(t))^*$ — вектор производных характеристик состояния объекта на отрезке времени $t \in [0; T]$.

Рассмотрим задачу восстановления параметров управляемого объекта, т. е. допустим, что неизвестны некоторые элементы матрицы A. Допустим, что известна n-мерная квадратная матрица C, позволяющая выразить характеристики управления через характеристики состояния объекта, т. е. $u = Cx$. Итак, обозначив

$$\overline{A} = A + BC \left(\overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{a}_{11} & \vdots & \overline{a}_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ \overline{a}_{n1} & \vdots & \overline{a}_{nn} \end{pmatrix} \right),$$

где $\overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{a}_{11} & \vdots & \overline{a}_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ \overline{a}_{n1} & \vdots & \overline{a}_{nn} \end{pmatrix}$ — структура матрицы $\overline{A}$, переходим от уравнения (1) к уравнению

$$\dot{x} = \overline{A}\,x. \tag{2}$$

Очевидно, что в уравнении (2) неизвестные элементы матрицы $\overline{A}$ имеют те же индексы, что и неизвестные элементы матрицы A из уравнения (1).

Поставим задачу восстановления параметров объекта в следующем виде. Зафиксируем некоторый момент времени $\tilde{t} \in [0;T]$. Часто производные $\dot{x}$ могут быть на самом деле неизвестными, а элементы этого вектора вычисляются на основе значений вектора x в моменты времени из некоторой окрестности $\tilde{t}$. Погрешности, которые могут возникнуть при оценке $\dot{x}$ по значениям x из окрестности $\tilde{t}$ или в процессе измерения $\dot{x}$, промоделируем, прибавив в правую часть (2) случайный вектор $v = (v_1, ..., v_n)^*$, реализации которого принадлежат n-мерному пространству действительных значений.

Как и для задачи наблюдаемости [1], в случае, когда значения элементов вектора производной $\dot{x}$ в точке $\tilde{t}$ известны заранее, например измерены приборами, допускаем, что параметры случайного вектора v, а именно математическое ожидание и ковариационная матрица, известны от специалистов предметной области. Будем рассматривать случаи, когда $Mv=0$, а ковариационная матрица

$$\Re_v=\begin{pmatrix} M(v_1v_1) & \vdots & M(v_1v_n) \\ \hline M(v_nv_1) & \vdots & M(v_nv_n) \end{pmatrix}$$

невырожденная. Это типичные условия для многих реальных измерений.

Если элементы вектора производных характеристик состояния объекта $\dot{x}$ в точке $\tilde{t}$ — неизвестны и необходимо их оценивать на основе значений элементов вектора x, то будем считать, что элементы вектора v являются независимыми случайными величинами, т. е. $\Re_v$ — диагональная матрица с дисперсиями случайных элементов вектора v на ее диагонали,

$$\Re_v=\begin{pmatrix} Dv_1 & \vdots & 0 \\ \hline 0 & \vdots & Dv_n \end{pmatrix}.$$

Для получения оценки производной $\dot{x}_i(\tilde{t})$ по значениям $x_i(t)$, $1\le i\le n$, с учетом математического ожидания и дисперсии соответствующей случайной величины v_i, моделирующей погрешность этой оценки, можем воспользоваться подходом, описанным в [1].

Таким образом, осуществив операцию транспозиции уравнения (2), модель системы управления в точке $\tilde{t}$ можно записать в виде

$$\dot{x}^*_{\tilde{t}}=x^*_{\tilde{t}}\overline{A}^*+v^*, \tag{3}$$

где $\dot{x}_{\tilde{t}}$ и $x_{\tilde{t}}$ — значения векторов $\dot{x}$ и x в точке $\tilde{t}$. При этом ковариационная матрица становится числом

$$\Re_{v^*}=M(v^*v)=\sum_{i=1}^{n}Dv_i>0.$$

Введем матрицы

$$\widehat{A}=\begin{pmatrix} \widehat{a}_{11} & \vdots & \widehat{a}_{1n} \\ \hline \widehat{a}_{n1} & \vdots & \widehat{a}_{nn} \end{pmatrix},\quad \breve{A}=\begin{pmatrix} \breve{a}_{11} & \vdots & \breve{a}_{1n} \\ \hline \breve{a}_{n1} & \vdots & \breve{a}_{nn} \end{pmatrix},$$

элементы которых имеют соответственно следующий вид :

$$\widehat{a}_{ij}=\begin{cases} \overline{a}_{ji}, \text{ если } \overline{a}_{ji} - \text{известно}, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

$$\breve{a}_{ij}=\begin{cases} \overline{a}_{ji}, \text{ если } \overline{a}_{ji} - \text{неизвестно}, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Следовательно, $\widehat{A}+\breve{A}=\overline{A}^*$. Тогда, обозначив $\breve{\dot{x}}^*_{\tilde{t}}=\dot{x}^*_{\tilde{t}}-x^*_{\tilde{t}}\widehat{A}$, перейдем от рассмотрения модели СУ в виде (3) к рассмотрению ее неизвестной части

$$\breve{\dot{x}}^*_{\tilde{t}}=x^*_{\tilde{t}}\breve{A}+v^*. \tag{4}$$

Для восстановления $\breve{A}$ из (4) используем подход, описанный в [2] для более широкого класса задач. Заметим, что согласно данному подходу можно получить не только оценку матрицы $\breve{A}$, но и оценку некоторого ее преобразования $\widehat{\Pi\breve{A}}$, где Π — оператор Гильберта—Шмидта. Оператор Π действует в некоторое гильбертово пространство из $n\times n$-мерного пространства действительных значений или действительных функций, в зависимости от того, является ли матрица $\breve{A}$ стационарной. В частности, Π может быть матрицей, обеспечивающей оценку некоторых параметров блока управления на основе параметров управляемого объекта, которые согласно постановке задачи считаются неизвестными. В данном случае для восстановления $\breve{A}$ нужно задать Π как тождественное преобразование — единичную матрицу $n\times n$, которую обозначим I.

Итак, для построения оценки $\hat{\breve{A}}$ будем искать преобразование B известного вектора $\breve{\dot{x}}^*_{\tilde{t}}$, которое даст оптимальную в определенном смысле оценку искомых параметров объекта $\hat{\breve{A}}=B\breve{\dot{x}}^*_{\tilde{t}}$. Для этого поставим задачу двукритериальной минимизации по Парето:

$$\begin{cases} h(B)=M\left\|Bv^*\right\|^2\to\min\limits_B, \\ \varphi(B)=\left\|B\,x^*_{\tilde{t}}-I\right\|^2\to\min\limits_B. \end{cases} \tag{5}$$

Первый критерий данной задачи — минимизация дисперсии погрешности, содержащейся в оценке $\hat{\breve{A}}$, второй — минимизация операторной невязки, которая характеризует смещение оценки $\hat{\breve{A}}$, полученное вследствие применения искомого преобразования B к $\breve{\dot{x}}^*_{\tilde{t}}$ вместо применения тождественного преобразования I к $\hat{\breve{A}}$. Согласно теореме, доказанной в [2], решение (5) приведет к континууму оценок вида

$$B\breve{\dot{x}}^*_{\tilde{t}}=\hat{\breve{A}}=x_{\tilde{t}}(x^*_{\tilde{t}}x_{\tilde{t}}+\mu\,\Re_{v^*})^{-1}\breve{\dot{x}}^*_{\tilde{t}}, \tag{6}$$

где $\mu\in(0;+\infty)$ — параметр парето-оптимизации. По построению $\breve{\dot{x}}^*_{\tilde{t}}=$ $=\dot{x}^*_{\tilde{t}}-x^*_{\tilde{t}}\widehat{A}$, следовательно, учитывая, что в данном случае $x^*_{\tilde{t}}x_{\tilde{t}}+\mu\,\Re_{v^*}$ —

число, переходим от оценки (6) к оценке в виде

$$\hat{\widehat{A}} = \frac{x_{\tilde{t}}(\dot{x}^*_{\tilde{t}} - x^*_{\tilde{t}}\widehat{A})}{(x^*_{\tilde{t}}x_{\tilde{t}} + \mu\,\Re_{v^*})}.$$

Отсюда легко получить оценку матрицы

$$\hat{A} = \widehat{A}^* + \frac{(\dot{x}_{\tilde{t}} - \widehat{A}^* x_{\tilde{t}})\,x^*_{\tilde{t}}}{(x^*_{\tilde{t}}x_{\tilde{t}} + \mu\,\Re_{v^*})} - BC, \tag{7}$$

а следовательно, и ее неизвестных элементов.

Согласно теоремам, доказанным в [2], критерии оптимизации задачи (5) имеют противоположные тенденции при изменении параметра μ от + 0 до + ∞, а именно, при возрастании параметра μ дисперсия погрешности в оценке будет уменьшаться, в то время как операторная невязка будет стремиться к пределу, равному $\|\Pi\|^2$ (в данном случае — к $\|I\|^2 = 1$). Более подробно поведение критериев оптимизации данной задачи описано в [1], а общие принципы выбора значения параметра парето-оптимизации представлены в [3].

Следует заметить, что данный подход позволяет строить оптимальные оценки не в смысле минимизации погрешности оценивания, а в смысле минимизации двух критериев (5), которые имеют определенный физический смысл и минимизация которых улучшает полученные оценки. Однако если некоторые элементы A известны, то по построению соответствующие элементы $\breve{A}$ должны быть равны нулю или, по крайней мере, не отличаться от него больше, чем на заданную точность оценивания δ. Пусть

$$\max_{i,\, j \mid a_{ij} - \text{известно}} \left| x_i(\tilde{t})(\dot{x}^*_j(\tilde{t}) - x^*(\tilde{t})\widehat{A}_j) \right| = \varepsilon,$$

где $\widehat{A}_j$ — j-й столбец матрицы $\widehat{A}$; ε — некоторое число. Тогда получаем еще одно ограничение на значение параметра парето-оптимизации:

$$\mu^{\delta}_{\tilde{t}} \geq \max\left(+0,\ \frac{\varepsilon - \delta x^*_{\tilde{t}}x_{\tilde{t}}}{\delta\Re_{v^*})} \right). \tag{8}$$

Все полученные оценки неизвестных элементов матрицы A зависят от выбранного момента времени $\tilde{t}$. При постановке задачи намеренно не было уточнено, являются ли матрицы A и B стационарными. Если эти матрицы нестационарные, то предложенный метод без изменения может быть применен для нужных моментов времени и обеспечит в них восстановление неизвестных параметров объекта управления. Если матрицы A и B — стационарные (частично стационарные), то можно использовать следующий подход. Нужно построить оценки для всех необходимых моментов времени так, чтобы разность между оценками элементов матрицы A в различные моменты времени не превышала необходимую точность оценивания δ. Это можно сделать, изменяя значение параметра парето-оптимизации μ.

Предположим, что в результате построения оценки $\hat{A}$ с параметром парето-оптимизации, выбранным согласно (8), для всех рассматриваемых моментов времени выполняется неравенство

$$\max_{i,\, j=\overline{1,n}} (\max_t \hat{a}_{ij} - \min_t \hat{a}_{ij}) > \delta. \tag{9}$$

Зафиксируем индексы соответствующего элемента $\hat{a}_{ij}$ матрицы $\hat{A}$, который обеспечивает выполнение неравенства. Для зафиксированного элемента $\hat{a}_{ij}$ рассчитаем величину

$$\Delta = \frac{\max_t \hat{a}_{ij} - \min_t \hat{a}_{ij}}{\delta},$$

из которой видно, во сколько раз нужно уменьшить разность максимального и минимального значения элемента $\hat{a}_{ij}$ из (9), чтобы она не превышала δ. В данном случае $\Delta > 1$. Итак, если для каждого момента времени выбрать новое значение параметра парето-оптимизации, удовлетворяющее неравенству

$$\overline{\mu}^{\delta}_{\tilde{t}} \geq \frac{(\Delta - 1)\, x^{*}_{\tilde{t}} x_{\tilde{t}}}{\mathfrak{R}_{v^*}} + \mu^{\delta}_{\tilde{t}} \Delta,$$

и снова построить оценку матрицы $\hat{A}$, то из формулы (7) видно, что все разности $\max_t \hat{a}_{ij} - \min_t \hat{a}_{ij}$ для любых элементов $\hat{a}_{ij}$ уменьшатся в Δ раз и, следовательно, не будут превышать δ. Необходимо заметить, что может и не возникнуть необходимости пересчитывать оценку $\hat{A}$ для всех моментов времени. Можно пересчитать оценку только для тех моментов времени, в которых значение разности (9) — максимальное. Далее необходимо повторять процедуру корректировки значения параметра μ_t^δ в «проблемные» моменты времени, начиная с проверки выполнения условия (9), пока не получим для всех моментов времени такие оценки $\hat{A}$, при которых $\max\limits_{i,j=\overline{1,n}}(\max\limits_t \hat{a}_{ij} - \min\limits_t \hat{a}_{ij}) \le \delta$. Однако тотальное изменение значения параметра парето-оптимизации на $\overline{\mu}_{\tilde{t}}^\delta$ гарантирует без дополнительных проверок, что $\max\limits_t \hat{a}_{ij} - \min\limits_t \hat{a}_{ij}$ для любых элементов $\hat{a}_{ij}$ не превысит δ.

Возможно, при увеличении значения параметра парето-оптимизации в некоторые моменты времени была достигнута неудовлетворительная величина операторной невязки (см. (5)). В таком случае следует увеличивать точность измерения (вычисления) $\dot{x}$ или применять изложенную выше идею итерационной процедуры увеличения значения параметра парето-оптимизации только для «проблемных» моментов времени.

Предложенный метод может быть естественным образом распространен на СУ, модели которых описываются линейным операторным уравнением $y = Ax + Bu$, где $y = (y_1(t), ..., y_n(t))^*$ — известный вектор, являющийся откликом СУ.

Таким образом, получен метод восстановления неизвестных параметров объекта управления как для стационарной, так и для нестационарной СУ, заданных системами линейных дифференциальных уравнений. При этом, в отличие от традиционной постановки данной задачи, учтена возможность наличия возмущений в значениях производных характеристик состояния объекта управления, что часто встречается в реальных задачах.

Within the pareto-optimum approach the controlled system's parameters recovery problem has been resolved. Both dynamic and static controlled system's models have been observed. It is allowed for that derivatives of the object's state characteristics vector could be perturbed.

1. *Заворотный А. Л., Касьянюк В. С.* Парето-оптимальный подход к задаче восстановления частично неизвестных характеристик состояния объекта // Электрон. моделирование. — 2009. — **31**, № 4. — С. 33—40.
2. *Заворотний А. Л.* Розв`язування задач моделювання ВОС надвисокої роздільної здатності на основі багатокритеріальної оптимізації // Вісн. Київського університету. Серія фіз.-мат. науки. — 2004. — № 3. — С. 198—205.
3. *Белов Ю. А., Касьянюк В. С.* Парето-оптимальная редукция в линейных системах со случайными погрешностями//Сб. докладов на расширенном заседании семинара в Ин-те прикладной математики им. И. Н. Векуа . — Тбилисси: Изд. Тбилисского ун-та. — 1989. — **4**, № 3.— С. 21—24.

Поступила 12.06.09

ЗАВОРОТНЫЙ Андрей Леонидович, канд. физ.-мат. наук, мл. науч. сотр. факультета кибернетики Киевского национального университета им. Тараса Шевченко, который окончил в 1999 г. Область научных исследований — некорректные задачи, методы восстановления функциональных зависимостей, теория возможности, численные методы, проектирование измерительно-вычислительных систем сверхвысокого разрешения.

КАСЬЯНЮК Веда Станиславовна, канд. физ.-мат. наук, зав. сектором теоретической кибернетики факультета кибернетики Киевского национального университета им. Тараса Шевченко, который окончила в 1983 г. Область научных исследований — методы регуляризации некорректных задач, методы многокритериальной оптимизации, математические методы обработки и интерпретации измерений, измерительно-вычислительные системы сверхвысокого разрешения.