

---

УДК 004.942:622.765

**О. А. Погорелов**, канд. техн. наук  
Восточноукраинский национальный университет им. В. Даля  
(Украина, 91034, Луганск, кв. Молодежный, 20а,  
тел. (0642) 414267, E-mail: pogorelova@yandex.ru)

## **Математическая модель процесса флотации в пространстве состояний**

*(Статью представил д-р техн. наук С. Е. Саух)*

Поставлена и решена задача создания математической модели процесса флотации, которая по сравнению с существующими точнее отображает реальные физические процессы. Предлагаемая модель содержит уравнение материального баланса, используемое в моделях-прототипах, и полученное автором интегро-дифференциальное уравнение флотации, позволяющее определять флотационную активность различных фракций обогащаемого материала.

Поставлено та розв'язано задачу створення математичної моделі процесу флотації, яка у порівнянні з існуючими точніше відображує реальні фізичні процеси. Запропонована модель містить рівняння матеріального балансу, що використовується у моделях-прототипах, і отримане автором інтегро-дифференціальне рівняння флотації, яке дозволяє визначати флотаційну активність різних фракцій збагачуваного матеріалу.

*Ключевые слова:* моделирование, флотация, гранулометрический состав, пространство состояний.

**Постановка задачи.** Историю моделирования процесса флотации условно можно разбить на три этапа. На первом этапе появились детерминистские модели [1—4], создателями которых были ученые-технологи, желающие придать знаниям о процессе количественный характер. Это были достаточно простые модели, не учитывающие зависимость флотационной активности обогащаемых частиц от их гранулометрического состава.

На втором этапе моделированием процесса флотации занялись специалисты по автоматическому управлению [5—8]. Они отвергли модели предшественников как недостаточно точные. Поскольку на глубокое изучение физики процесса не хватало времени, «автоматчики» предпочли стохастические модели, получаемые методом регрессионного анализа. Однако постепенно становилось ясно, что «метод черного ящика» не гарантирует однозначность и объективность результатов. Исследователи

пришли к выводу, что построение успешных моделей невозможно без дальнейшего изучения физики процесса.

Третий этап ознаменовался возвращением к детерминистским моделям на новом уровне. Это были системы в пространстве состояний [9—12]. В качестве компонент вектора состояний разработчики (все без исключения) использовали концентрацию частиц определенного размера. Вследствие этого модели нового типа учитывали изменения гранулометрического состава твердой фазы флотационной пульпы при переходе ее из камеры в камеру. Однако слабым местом этих моделей был механизм преобразования гранулометрического состава — флотационная активность частиц определенного размера задавалась в виде «констант флотации». Такой подход не следовал из соображений физики, а использовался вследствие отсутствия чего-либо лучшего — просто как грубое приближение. Поэтому полученные модели не могли быть использованы для прогнозирования результатов флотации и оптимизации процесса, что хорошо понимали и сами их создатели [10].

Попробуем решить задачу создания модели процесса флотации в пространстве состояний, которая по сравнению с прототипами более точно соответствовала бы реальной физике процесса.

**Схема флотации.** Промышленная флотационная установка представляет собой цепочку технологических агрегатов, в начале которой находится контактный чан, в котором питание флотации с помощью вращающегося импеллера смешивается с флотационными реагентами. Затем следуют камеры флотационной машины, число которых может быть разным.

Обозначим:  $N$  — число камер,  $j$  — номер камеры. Характеристики питания — расход пульпы, концентрация в ней твердой фазы, концентрация в твердой фазе минеральных примесей, гранулометрический состав твердой фазы — подвержены медленным случайным изменениям, которые обычно относят к возмущениям  $\xi$ .

Расходы поступающих в контактный чан реагентов и скорость вращения импеллера в совокупности образуют вектор управления  $\mathbf{u}_0$ . Во многих флотационных отделениях какую-то часть реагентов подают и в камеры флотационной машины (так называемое дробное дозирование реагентов). Поэтому в модели следует использовать дополнительные векторы управления  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N$ , которые включают в себя и скорости вращения импеллеров в каждой из камер.

Выходом системы являются характеристики концентрата  $y_1$  и отходов  $y_2$ . Таким образом, процесс флотации — дискретная распределенная система. Вследствие вращения импеллера концентрация частиц произвольного размера одинакова во всех точках внутри отдельной камеры, что подтверждено экспериментальными исследованиями [13]. Поэтому отдельная камера является системой с сосредоточенными параметрами.

**Уравнение переноса.** Разобьем частицы твердой фазы на  $n$  классов. Частицы одного класса имеют приблизительно одинаковый размер  $d$ , который не выходит за рамки заданного диапазона  $[d_{\min}, d_{\max}]$  (диапазоны всех классов одинаковы:  $\Delta d = d_{\max} - d_{\min}$ ), и относятся либо к обогащаемому ископаемому, либо к пустой породе (например, углю и частицам минеральных примесей). Основой математической модели флотации в пространстве состояний является уравнение переноса материальных потоков (т. е. система дифференциальных уравнений первого порядка) [9—12], которое можно записать в виде

$$\frac{dC_{ij}(t)}{dt} = \frac{Q(t)[C_{ij-1}(t) - C_{ij}(t)]}{V} - \varphi_{ij}(t)C_{ij}(t),$$

где  $C_{ij}(t)$  — массово-объемная концентрация частиц  $i$ -го класса в  $j$ -й камере флотационной машины;  $Q(t)$  — объемный расход пульпы, поступающей на флотацию;  $V$  — объем флотационной камеры;  $\varphi_{ij}(t)$  — флотационная активность  $i$ -го класса в  $j$ -й камере флотационной машины, формально определяемая так [10]:

$$\varphi_{ij}(t) = \frac{dm_{ij}^{(C)}}{m_{ij}(t) dt},$$

где  $m_{ij}(t)$  — общая масса частиц  $i$ -го класса в  $j$ -й камере флотационной машины;  $\frac{dm_{ij}^{(C)}}{dt}$  — скорость перехода частиц  $i$ -го класса в  $j$ -й камере флотационной машины в концентрат. Чем большее число классов крупности будет иметь твердая фаза пульпы в камере флотационной машины, тем точнее будет соответствие ее реальному гранулометрическому составу. По мере уменьшения интервала дискретизации соответственно уменьшается значение концентрации  $i$ -й компоненты, в пределе становясь равным нулю. Поэтому введем понятие плотности распределения концентрации  $\eta(d)$  в зависимости от размера частиц  $d$ :

$$\eta_j(d) = \lim_{\Delta d \rightarrow 0} \frac{C_{ij}}{\Delta d} = \frac{dC_j(d)}{dd}.$$

Теперь уравнение переноса материальных потоков можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial \eta_j(d, t)}{\partial t} = \frac{Q(t)[\eta_{j-1}(d, t) - \eta_j(d, t)]}{V} - \varphi_j(d, t)\eta_j(d, t),$$

где  $\varphi_j(d, t)$  — непрерывная функция флотационной активности в  $j$ -й камере флотационной машины.

На практике установлено, что характеристики питания меняются достаточно медленно. Кроме того, поскольку флотация является устойчивым процессом, этот процесс можно рассматривать как почти статический:  $\frac{\partial \eta_j(d, t)}{\partial t} = 0$ . В этом случае плотность концентрации в  $j$ -й камере определяется выражением

$$\eta_j(d) = \frac{\eta_{j-1}(d)}{1 + V\varphi_j(d)/Q}.$$

Основными контролируруемыми выходными переменными процесса флотации являются выход концентрата  $\gamma(t)$  и его качество  $A_c(t)$ , т.е. относительное содержание в концентрате минеральных примесей. Величины этих сигналов можно определить по формулам

$$\gamma(t) = V \sum_{j=1}^n \int_0^{\infty} [\varphi_{jc}(d, t) \eta_{jc}(d, t) + \varphi_{ja}(d, t) \eta_{ja}(d, t)] dd, \quad (1)$$

$$A_c(t) = \frac{V \sum_{j=1}^n \int_0^{\infty} \varphi_{ja}(d, t) \eta_{jc}(d, t) dd}{\gamma(t)}, \quad (2)$$

где  $\varphi_{jc}(d, t)$  и  $\varphi_{ja}(d, t)$  — функции флотационной активности полезного компонента и минеральных примесей в  $j$ -й камере флотационной машины.

Уравнения (1) и (2) для данной системы являются уравнениями наблюдения. Они определяют зависимость выходных сигналов от компонент вектора состояния системы. В существующих моделях флотации функции  $\varphi_{jc}(d, t)$  и  $\varphi_{ja}(d, t)$  зависят только от крупности частиц и не изменяются при переходе из камеры в камеру, хотя концентрация частиц и величина управляющих воздействий в каждой камере различны. Считается, что их можно определить экспериментально в одной из камер, а затем результаты измерений использовать при модельных расчетах в других камерах. В предлагаемой модели для определения указанных функций используется полученное с учетом физических процессов интегро-дифференциальное уравнение флотации.

**Уравнение флотации.** Функции флотационной активности  $\varphi_{jc}(d, t)$  и  $\varphi_{ja}(d, t)$  находятся в сложной зависимости от вектора управляющих воздействий  $\mathbf{u}$ . Если флотация рассматривается как процесс статический, то можно записать

$$\varphi_{jx}(d) = \frac{3Q_a \mu_{jx}(d, T_b)}{4\pi r_j^3 V \eta_{jx}(d)},$$

где  $Q_a$  — расход воздуха, поступающего в камеру флотационной машины;  $r_j$  — средний радиус воздушных пузырьков в  $j$ -й камере флотационной машины;  $\mu_{jx}(d, T_b)$  — отнесенная к элементу диаметра  $dd$  масса закрепленных на пузырьке частиц, размер которых находится в диапазоне от  $d$  до  $d + dd$ , в  $j$ -й камере флотационной машины в момент перехода пузырька в пену;  $x$  — либо полезные ископаемые ( $c$ ), либо минеральные примеси ( $a$ );  $T_b$  — время подъема пузырьков на поверхность.

Функция  $\mu_{jx}(d, T_b)$  является частным случаем функции  $\mu_{jx}(d, t)$ , описывающей распределение масс закрепленных на пузырьке частиц на произвольной глубине в камере флотационной машины. Самый нижний слой имеет распределение  $\mu_{jx}(d, 0) = 0$ . Функцию  $\mu_x(d, t)$  можно найти, решив интегро-дифференциальное уравнение флотации (для простоты опущен индекс  $j$ )

$$\frac{\partial \mu_x(d, t)}{\partial t} = K_{0x}(d) - K_{1x}(d) \mu_x(d, t) - K_{2x}(d) \frac{3}{2} \int_0^\infty \left( \frac{\mu_c(\theta, t)}{\rho_c} + \frac{\mu_a(\theta, t)}{\rho_a} \right) \frac{d\theta}{\theta}. \quad (3)$$

Здесь

$$K_{0x}(d) = 4\pi r_j^2 K_{2x}(d); \quad K_{1x}(d) = \frac{v_b L_{jx}(d)}{\lambda_t};$$

$$K_{2x}(d) = \bar{u}_r(d) P_{jx}(d) \eta_{jx}^{[f]}(d);$$

$\eta_{jx}^{[f]}$  — функция, описывающая концентрацию свободных (не закрепленных на пузырьках) частиц в пульпе;  $v_b$  — средняя скорость подъема пузырьков на поверхность;  $\lambda_t$  — пространственный микромасштаб турбулентности;  $L_{jx} = -\ln(1 - \exp(-a_x / a_p))$ , где  $a_x$  — критическое ускорение, при котором частица размером  $d$  и плотностью  $\rho_x$  оторвется от пузырька,

$$a_x = \frac{3\sigma(1 - \cos\Theta_x)}{\rho_x d^2};$$

$\Theta_x$  — краевой угол смачивания поверхности частицы;  $\sigma$  — величина поверхностного натяжения воды;  $a_p = 4\bar{u}^2 / \lambda_t$ ;  $\bar{u}$  — среднеквадратичная скорость пульсаций жидкости;  $\bar{u}_r(d)$  — среднеквадратичная скорость пульсаций частиц относительно пузырька;

$$P_{jx}(d) = \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \exp\left(-\frac{3v_x^2}{2\bar{u}_r^2}\right);$$

$v_x = \delta \sqrt{\frac{12\Phi(\Theta_x)\sigma}{\rho_x d^3}}$  — критическая скорость, при превышении которой частица способна разрушить гидратную оболочку пузырька;  $\delta$  — толщина гидратной оболочки;

$$\Phi(\Theta_x) = \frac{[\Theta_x^2 + \sin^2 \Theta_x \cos \Theta_x - 2\Theta_x \sin \Theta_x \cos \Theta_x - 2(1 - \cos \Theta_x)^2]}{(1 - \cos \Theta_x)^3}.$$

Интеграл в правой части уравнения (3), умноженный на коэффициент  $3/2$ , численно равен площади поверхности пузырька, занятой прикрепившимися частицами. Формула (3) получена на основании следующих соображений. Элементарное изменение массы закрепленных на пузырьках частиц заданного диаметра пропорционально разности числа частиц этого диаметра, прикрепившихся к пузырькам элементарного слоя и оторвавшихся от пузырьков за время  $dt$ . Свободная от частиц поверхность пузырька в момент времени  $t$  равна

$$4\pi r^2 - \frac{3}{2} \int_0^\infty \left( \frac{\mu_c(\theta, t)}{\rho_c} + \frac{\mu_a(\theta, t)}{\rho_a} \right) \frac{d\theta}{\theta}.$$

Масса частиц размера  $d$ , закрепившихся на пузырьке за время  $dt$ , отнесенная к элементу диаметра  $dd$ , пропорциональна свободной поверхности пузырька:

$$\left[ 4\pi r_j^2 - \frac{3}{2} \int_0^\infty \left( \frac{\mu_c(\theta, t)}{\rho_c} + \frac{\mu_a(\theta, t)}{\rho_a} \right) \frac{d\theta}{\theta} \right] \bar{u}_r(d) P_j(d) \eta_j^{[f]}(d) dt.$$

Масса частиц (приведенная к элементу  $dd$ ), которая оторвется от пузырька за время  $dt$ , равна

$$\mu_j(d, t) \frac{v_b L_j(d) dt}{\lambda_t}.$$

Вычитая убыль из прибыли, получаем интегро-дифференциальное уравнение (3).

Управляющие воздействия косвенным образом входят в уравнение флотации. Краевой угол смачивания частиц  $\Theta_x$  зависит от расхода реагента-собирателя, а величина поверхностного натяжения  $\sigma$  — от расхода реагента-пенообразователя. Скорость вращения импеллеров влияет на расход воздуха  $Q_a$  и характеристики турбулентного движения пульпы  $\lambda_t, \bar{u}, \bar{u}_r(d)$ .

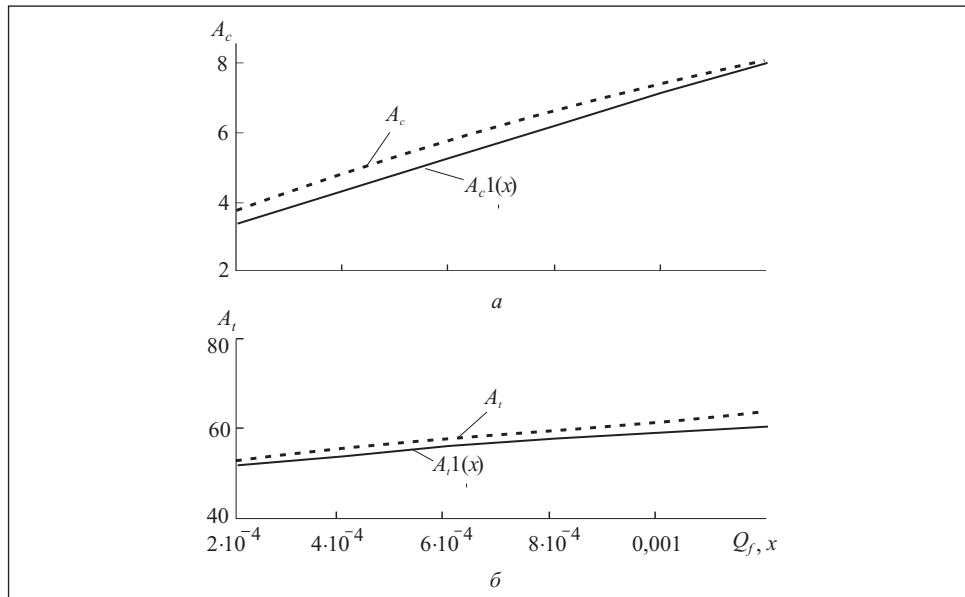


Рис. 1. Экспериментальная (пунктирная кривая) и смоделированная (сплошная кривая) зависимости зольности концентрата (а) и отходов (б) от расхода пенообразователя

Интегро-дифференциальное уравнение флотации (3) можно преобразовать в интегральное уравнение Вольтерры с регулярным разностным ядром:

$$\mu_x(d, t) + \int_0^t \mu_x(d, \tau) \left[ \frac{3}{2} \int_0^\infty \left[ \frac{K_{2c}(\theta) e^{-K_{1c}(\theta)(t-\tau)}}{\rho_c} + \frac{K_{2a}(\theta) e^{-K_{1a}(\theta)(t-\tau)}}{\rho_a} \right] \frac{d\theta}{\theta} \right] d\tau = \frac{K_{0x}(d)(1 - e^{-K_{1x}(d)t})}{K_{1x}(d)}$$

Решить его можно только численно, поскольку функция  $\eta_{jx}^{[f]}(d)$ , входящая в выражение для  $K_{2x}(d)$ , является произвольным распределением и заранее неизвестна.

**Верификация модели.** Для проверки модели была создана компьютерная программа, позволившая численно рассчитать результаты флотации угля по заданным входным характеристикам питания, чтобы затем сравнить их с данными, полученными экспериментально. В работе [14] приведены результаты исследований процесса флотации на флотационной машине МФУ2-63 при следующих характеристиках питания: расход

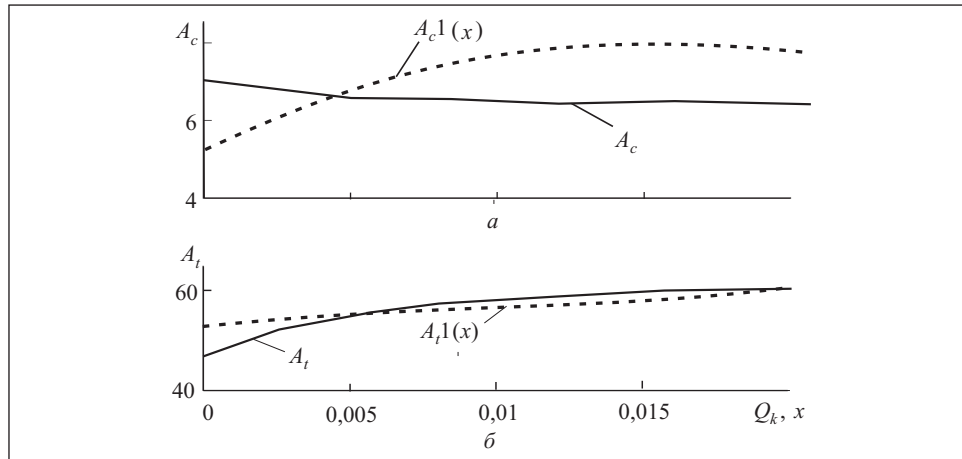


Рис. 2. Экспериментальная (пунктирная кривая) и смоделированная (сплошная кривая) зависимости зольности концентрата (а) и отходов (б) от расхода собирателя

исходной пульпы  $Q_0 = 0,1 \text{ м}^3/\text{с}$ ; зольность концентрата  $A = 17,7 \%$ ; концентрация твердого в питании  $C = 101 \text{ кг}/\text{м}^3$ . Результаты представлены в виде уравнений регрессии, описывающих зависимости зольности концентрата  $A_c$  и отходов  $A_t$  (%) от расходов реагента-пенообразователя  $Q_f$  и реагента-собирателя  $Q_k$  (кг/с):

$$A_c(Q_f) = 2,67 + 5820 Q_f - 1070000 Q_f^2; \quad (4)$$

$$A_t(Q_f) = 50,4 + 12460 Q_f - 1600000 Q_f^2; \quad (5)$$

$$A_c(Q_k) = 5,22 + 350 Q_k - 11200 Q_k^2; \quad (6)$$

$$A_t(Q_k) = 52,99 + 405,7 Q_k - 3678 Q_k^2. \quad (7)$$

На рис. 1 и 2 представлены графики зависимостей (4) — (7) и соответствующие им кривые, полученные с помощью компьютерной модели при одинаковых характеристиках питания. Поскольку детальной информации о гранулометрическом составе исходного шлама в работе [14] не приведено, при расчетах принят логарифмически-нормальный закон распределения с параметрами  $d_g = 5 \text{ мкм}$ ,  $\ln \sigma = 1$ , что соответствует некоторому среднестатистическому распределению.

Как видно из рис. 1, 2, результаты моделирования достаточно хорошо согласуются с данными исследований. Однако представленная на рис. 2, а



зависимость зольности концентрата  $A_c$  от расхода собирателя  $Q_k$  немного отличается от других. Экспериментальные данные свидетельствуют о том, что при увеличении расхода собирателя зольность концентрата возрастает даже при самых незначительных расходах собирателя. Моделируемая кривая не отличается подобной монотонностью. С увеличением расхода собирателя зольность концентрата вначале немного уменьшается, а затем, достигнув минимального значения, начинает медленно возрастать (на рис. 2, а этого не видно, поскольку диапазон изменения расхода собирателя недостаточно велик). Однако разность моделируемых и экспериментальных значений зольности концентрата в любом сечении не превышает двух процентов.

Вид модельной кривой можно объяснить теоретически. При малых расходах собирателя капельки реагента закрепляются преимущественно на плохо смачиваемых водой угольных частицах. Вследствие этого краевой угол смачивания поверхности этих частиц еще более возрастает и их относительное количество в концентрате увеличивается. Это должно приводить к снижению зольности концентрата при увеличении расхода собирателя. Пока происходит процесс увеличения краевого угла смачивания угольных частиц, зольность концентрата уменьшается. Когда поверхность крупных угольных частиц полностью покрывается реагентом (мелкие частицы хуже взаимодействуют с ним вследствие легкости и слабой инерционности), зольность концентрата при увеличении расхода собирателя вначале стабилизируется, а затем медленно возрастает вследствие закрепления некоторого количества собирателя на золообразующих частицах в условиях повышенной концентрации собирателя в пульпе.

Экспериментально полученный результат свидетельствует об отсутствии избирательного воздействия собирателя даже в области малых значений расходов этого реагента. По-видимому, различие между теоретическими и экспериментальными результатами можно объяснить тем, что исследования на обогатительных фабриках осуществляются в основном пассивным методом, при этом расход реагента и зольность концентрата могут изменяться в очень узких пределах. То, что происходит за пределами этого диапазона, недоступно исследованию. Кроме того, дисперсия регистрируемых значений зольности соизмерима с диапазоном наблюдения, а это приводит к неустойчивости получаемых результатов.

**Вывод.** Полученное интегро-дифференциальное уравнение флотации позволяет обоснованно определять функции флотационной активности частиц в различных камерах флотационной машины. В предложенной модели переменными состояниями являются не только концентрации частиц

определенного материала и размера, но и соответствующие им флотационные активности, которые зависят как от управляющих воздействий, так и от гранулометрического состава твердой фазы.

Сравнение результатов модельных расчетов с результатами экспериментальных исследований свидетельствует о достаточно точном соответствии зависимостей зольности концентрата и отходов от расхода пенообразователя, а также зольности отходов от расхода собирателя. Наибольшее расхождение обнаруживается в случае зависимости зольности концентрата от расхода собирателя. Возможно, причиной расхождения являются какие-то тонкие физические (или химические) процессы, которые не учтены теоретически на данной стадии моделирования.

The problem of flotation circuit modeling with accordance to the real physics of the process was given and solved. A new model contains both the equation of the material balance (used in prototype models) and the integral-differential equation of the flotation process that was formulated by the author. The latter equation helps to determine the flotation activity of different fractions of the enriched material.

1. *Zuniga G. H.* Flotation Recovery as an Exponential Function of its Rate // «Boletin Mineralogico Sociedad: Nacional Minería». — 1935. — N 47. — P. 83—86.
2. *Белоглазов К. Ф.* Кинетика флотационного процесса // Тез. докл. сессии по физико-химическим проблемам обогащения. — М.: 1938. — С. 12—13.
3. *Grunder W., Kadur E.* The Relation Between Froth Surface and Volume in Flotation Cells // *Metallurgie und Erzaufbereitung*. — 1940. — V. 37. — P. 367—372.
4. *Погорельый А. Д.* Границы использования кинетического уравнения флотации К.Ф. Белоглазова // *Изв. вузов. Цветная металлургия*. — 1962. — № 1. — С. 34—40.
5. *Pitt J. C.* The Development of Systems for Continuous Optimal Control of Flotation Plants by Computer // *Electronic Engineering (Transaction of the Australian Engineers Institute)*. — 1969. — V. 5, N 1. — P. 229—235.
6. *Amsden M.P., Chapman C., Reading M.G.* Computer Control of Flotation at Ecstail // *Canadian Mining Journal*. — 1973. — V. 94, N 6. — P. 46—57.
7. *Konigsmann K. V., Hendriks D. W., Daoust C.* Computer Control of Flotation at Mattagami Lake Mines // *Canadian Mining and Bulldoze*. — 1976. — V. 69, № 767. — P. 117—121.
8. *Благов И. С., Дебердеев И. Х.* Реагенты для флотации углей // Сб. «Флотационные реагенты». — М.: Наука, 1986. — 248 с.
9. *Крохин С. И.* О флотационной активности минеральных частиц // *Изв. вузов. Цветная металлургия*. — 1963. — № 6. — С. 41—50.
10. *Рубинштейн Ю. Б., Филиппов Ю. А.* Кинетика флотации. — М.: Недра, 1980. — 375 с.
11. *Adel G.T., Luttrell G.H.* An Advanced Control System for Fine Coal Flotation. — Virginia: Department of Mining and Minerals Engineering Polytechnic Institute and State University Blacksburg, 2000. — 6 p.

12. *Runge K.C., Franzidis J.P., Manlapig E.V., Harris M.C.* Structuring a Flotation Model for Robust Prediction of Flotation Circuit Performance // XXII International Mineral Processing Congress. 29 September — 3 October 2003. — Cape Town, South Africa, 2003 — P. 973—984.
13. *Jowett A.* The Development of Sludge in Froth Flotation//De Ingenieur (Nederlands). — 1969. — V. 81, N 38. — P. M11–M17.
14. *Власов К.П.* Основы автоматического управления технологическими процессами обогащения угля. — М.: Недра, 1985. — 188 с.

Поступила 06.10.08;  
после доработки 18.05.09

*ПОГОРЕЛОВ Олег Алексеевич, канд. техн. наук, доцент кафедры компьютерных наук Восточно-украинского национального университета им. В. Даля. В 1979 г. окончил Ворошиловградский машиностроительный ин-т. Область научных исследований — моделирование технологических процессов обогащения полезных ископаемых, создание систем управления этими процессами.*