

---

УДК 539.3

**А. Ф. Верлань**, \* **Х. Эшматов**,\*\* доктора техн. наук,  
**Б. Х. Эшматов**\*\*\*, канд. физ.-мат. наук,  
**Ш. П. Бобаназаров**\*\* , канд. техн. наук,  
**О. Р. Кучаров**\*\* , **Д. А. Ходжаев**\*\*

\*Ин-т проблем моделирования в энергетике им. Г. Е. Пухова НАН Украины  
(Украина, 03164, Киев, ул. Генерала Наумова, 15,  
тел. (044) 4241063, E-mail: averlan@i.com.ua),

\*\*Ташкентский институт ирригации и мелиорации  
(Республика Узбекистан, 100000, Ташкент, ул. Кары Ниязова, 39,  
тел. (99871) 2371948, E-mail: heshmatov@mail.ru)

\*\*\*Department of Mechanical and Aerospace Engineering, University at Buffalo  
(318 Jarvis Hall, Buffalo, NY 14260-4400, USA  
E-mail: ebkh@mail.ru)

## **Математическое моделирование нелинейных колебаний и исследование динамической устойчивости вязкоупругих прямоугольных пластин и цилиндрических панелей.\* II**

*(Статью представил чл.-кор. НАН Украины (В. В. Васильев)*

Приведены метод и алгоритм решения задач динамики вязкоупругих систем. С помощью предложенного метода решены задачи о нелинейных колебаниях и динамической устойчивости вязкоупругих прямоугольных пластин и цилиндрических панелей.

Наведено метод та алгоритм розв'язування задач динаміки в'язкопружних систем. З використанням запропонованого методу розв'язано задачі про нелінійні коливання та динамічну стійкість в'язкопружних прямокутних пластин і циліндричних панелей.

*Ключевые слова: прямоугольная пластина, цилиндрическая панель, теория Кирхгофа—Лява, теория Тимошенко, нелинейные колебания, динамическая устойчивость, флаттер.*

**Нелинейный флаттер вязкоупругой пластины по уточненной теории Тимошенко.** Рассмотрим задачу об устойчивости тонкой вязкоупругой прямоугольной пластины со сторонами  $a$  и  $b$ , обтекаемой сверхзвуковым потоком газа со скоростью  $V$  (рис. 6), по обобщенной теории Тимошенко [23, 24] в геометрически нелинейной постановке.

---

\* *А. Ф. Верлань, Х. Эшматов, Б. Х. Эшматов, Ш. П. Бобаназаров, О. Р. Кучаров, Д. А. Ходжаев*  
Математическое моделирование нелинейных колебаний и исследование динамической устойчивости вязкоупругих прямоугольных пластин и цилиндрических панелей. I. — Электронное моделирование, № 3, 2009.

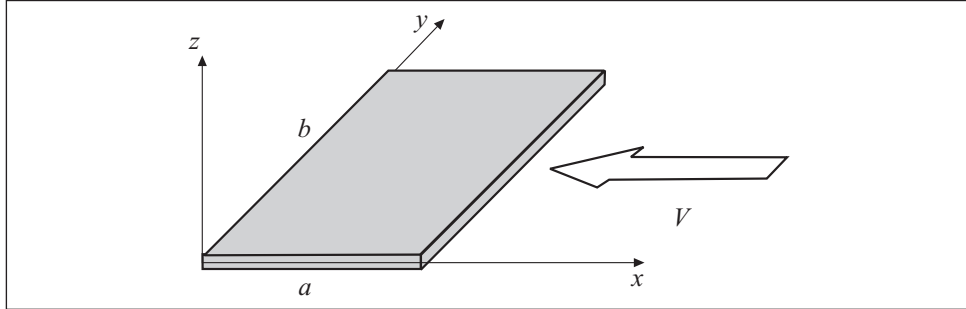


Рис. 6. Вязкоупругая пластина, обтекаемая сверхзвуковым потоком газа

Физические соотношения между напряжениями в срединной поверхности  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  и деформациями  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$  примем в виде (5), а связь между деформациями в срединной поверхности  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$  и перемещениями  $u, v, w$  — в виде (6). Геометрические соотношения между деформациями  $\varepsilon_x^z, \varepsilon_y^z, \gamma_{xy}^z$  и угловыми перемещениями  $\psi_x, \psi_y$  представим в следующем виде [17]:

$$\varepsilon_x^z = \varepsilon_x + z \frac{\partial \psi_x}{\partial x}, \quad (x \leftrightarrow y), \quad \gamma_{xy}^z = \gamma_{xy} + z \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right), \quad (21)$$

где  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  и  $\gamma_{xy}$  определяются из соотношений (6); символ  $(x \leftrightarrow y)$  указывает, что остальные соотношения получаются круговой перестановкой индексов.

С учетом (5) и (21) изгибающие и крутящие моменты  $M_x, M_y, H$  и поперечные силы  $Q_x, Q_y$  имеют вид [8, 12—14]:

$$M_x = D(1-\Gamma^*) \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \mu \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right), \quad (x \leftrightarrow y), \quad H = \frac{D(1-\mu)}{2} (1-\Gamma^*) \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right),$$

$$Q_x = K^2 \frac{Eh}{2(1+\mu)} (1-\Gamma^*) \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x \right), \quad (x \leftrightarrow y), \quad (22)$$

где  $K^2 = \pi^2/12$  (Миндлин) [24],  $K^2 = 2/3$  (Уфлянд) [23] и  $K^2 = 5/6$  (Рейснер) [17]. Подставив (5), (21) и (22) в уравнения, приведенные в работе [25], получим

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + h \frac{\partial}{\partial x} \left( \sigma_x \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + h \frac{\partial}{\partial y} \left( \tau_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \Delta p - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - Q_x - \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} = 0, \quad (x \leftrightarrow y),$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{2} L(w, w).$$

Здесь  $\Delta p = p - p_\infty$  — избыточное давление, где

$$p = p_\infty \left( 1 + \frac{\kappa - 1}{2} \frac{\vartheta}{V_\infty} \right)^{\frac{2\kappa}{\kappa - 1}} —$$

давление на поверхности пластины;  $p_\infty$  — давление в невозмущенном потоке газа;  $\kappa$  — показатель политропа газа;  $V_\infty$  — скорость в невозмущенном потоке газа;  $\vartheta$  — нормальная составляющая скорости на поверхности пластины.

В случае линеаризованного течения газа вдоль пластины, по которой распространяются упругие волны, нормальная составляющая скорости примет вид [25]

$$\vartheta = \frac{\partial w}{\partial t} + V \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (23)$$

где  $V$  — скорость потока на поверхности пластины.

Введя функцию напряжений  $F$  в срединной поверхности (10) для определения поперечного прогиба  $w = w(x, y, t)$ , функции напряжений  $F = F(x, y, t)$  и угловых перемещений  $\psi_x = \psi_x(x, y, t)$ ,  $\psi_y = \psi_y(x, y, t)$ , получим следующую систему уравнений типа Тимошенко:

$$\frac{K^2 E}{2(1+\mu)} (1-\Gamma^*) \left[ \nabla^2 w + \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right] + L(w, F) - \frac{1}{h} \frac{\kappa p_\infty}{V_\infty} \left( \frac{\partial w}{\partial t} + V \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$

$$\frac{D}{h} (1-\Gamma^*) \left[ \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + \frac{1}{2} (1+\mu) \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} (1-\mu) \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} \right] -$$

$$- \frac{K^2 E}{2(1+\mu)} (1-\Gamma^*) \left[ \frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x \right] - \rho \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} = 0, \quad (x \leftrightarrow y),$$

$$\frac{1}{E} \nabla^4 F = -\frac{1}{2} (1-\Gamma^*) L(w, w). \quad (24)$$

Удовлетворяя граничным условиям задачи, выберем выражения для прогибов и угловых перемещений на основе многочленной аппроксимации в виде [8, 12—14]

$$\begin{aligned} w(x, y, t) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M w_{nm}(t) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}, \\ \Psi_x(x, y, t) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \Psi_{xnm}(t) \cos \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}, \\ \Psi_y(x, y, t) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \Psi_{ynm}(t) \sin \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b}. \end{aligned} \quad (25)$$

Подставляя первое выражение (25) в четвертое уравнение системы (24) и приравнявая в обеих частях этого уравнения коэффициенты при одинаковых гармониках тригонометрических функций, находим функцию усилий:

$$\begin{aligned} F(x, y, t) &= E \sum_{i,r=1}^N \sum_{j,s=1}^M (1-\Gamma^*) w_{ij} w_{rs} \left[ C_{ijrs} \cos \frac{(i+r)\pi x}{a} \cos \frac{(j+s)\pi y}{b} + \right. \\ &+ A_{ijrs} \cos \frac{(i+r)\pi x}{a} \cos \frac{(j-s)\pi y}{b} + D_{ijrs} \cos \frac{(i-r)\pi x}{a} \cos \frac{(j+s)\pi y}{b} + \\ &\left. + B_{ijrs} \cos \frac{(i-r)\pi x}{a} \cos \frac{(j-s)\pi y}{b} \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Подставляя (25) и (26) в (24) и выполняя процедуру Бубнова—Галеркина с введением безразмерных величин  $\frac{w_{kl}}{h}$ ,  $\frac{V_\infty t}{a}$ ,  $\frac{a\Gamma(t)}{V_\infty}$  и сохраняя при этом прежние обозначения, относительно безразмерных  $w_{kl}$ ,  $\Psi_{xkl}$ ,  $\Psi_{ykl}$  получим

$$\begin{aligned} \ddot{w}_{kl} + M_p \kappa \lambda \delta \dot{w}_{kl} + \frac{K^2 M_E \pi^2 \lambda^2}{2(1+\mu)} \left[ \left( \frac{k}{\lambda} \right)^2 + l^2 \right] (1-\Gamma^*) w_{kl} + \\ + 2M^* M_p \kappa \lambda \delta \sum_{n=1}^N n (\gamma_{n+k} - \gamma_{n-k}) w_{nl} + \frac{K^2 M_E \pi \lambda^2 \delta}{2(1+\mu)} (1-\Gamma^*) \left[ \left( \frac{k}{\lambda} \right) \Psi_{xkl} + l \Psi_{ykl} \right] + \\ + \frac{\pi^2 M_E \lambda^2}{\delta^2} \sum_{n,i,r=1}^N \sum_{m,j,s=1}^M a_{klnmijrs} w_{nm} (1-\Gamma^*) w_{ij} w_{rs} = 0, \\ \ddot{\Psi}_{xkl} + \frac{M_E}{2(1-\mu^2)} [2\pi^2 k^2 + \pi^2 \lambda^2 (1-\mu) l^2 + 12K^2 \lambda^2 \delta^2 (1-\mu)] (1-\Gamma^*) \Psi_{xkl} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{M_E \pi^2 \lambda}{2(1-\mu)} kl(1-\Gamma^*) \psi_{ykl} + \frac{6K^2 M_E \pi \lambda \delta}{1+\mu} k(1-\Gamma^*) w_{kl} = 0, \\
 \ddot{\psi}_{ykl} + \frac{M_E}{2(1-\mu^2)} [2\pi^2 \lambda^2 l^2 + \pi^2(1-\mu)k^2 + 12K^2 \lambda^2 \delta^2(1-\mu)](1-\Gamma^*) \psi_{ykl} + \\
 & + \frac{M_E \pi^2 \lambda}{2(1-\mu)} kl(1-\Gamma^*) \psi_{xkl} + \frac{6K^2 M_E \pi \lambda^2 \delta}{1+\mu} l(1-\Gamma^*) w_{kl} = 0, \quad (27)
 \end{aligned}$$

где  $M^* = V/V_\infty$  — число Маха;  $M_E = E/(\rho V_\infty^2)$ ,  $M_p = p_\infty/(\rho V_\infty^2)$ ,  $\delta = b/h$  — безразмерные параметры.

Интегрирование системы (27) проведено численным методом, предложенным в [2, 4]. При этом в качестве ядра релаксации использовано слабосингулярное ядро Колтунова—Ржаницына вида (14).

Результаты вычислений нелинейного флаттера вязкоупругой прямоугольной пластины, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, приведены на рис. 7—10. При исследовании поведения вязкоупругой пластины с различными физическими и геометрическими параметрами, скорость потока газа принята равной 400 м/с. Такими приняты следующие исходные данные:  $w_0 = 10^{-1}$ ;  $A = 0,05$ ;  $\alpha = 0,15$ ;  $\beta = 0,05$ ;  $\lambda = 3$ ;  $\delta = 133$ ;  $M_E = 4,71$ ;  $M_p = 0,003$ .

Как видно из рис. 7, учет вязкоупругих свойств материала пластины приводит к затуханию колебательного процесса и соответственно к уменьшению критической скорости флаттера. При этом различия результатов решения упругой и вязкоупругой задач в начальный период времени незначительны, однако с течением времени вязкоупругие свойства оказывают существенное влияние на процесс флаттера. Аналогичные результаты наблюдаются и при исследовании напряжений.

Анализ результатов, представленных на рис. 8, свидетельствует о том, что уменьшение значения реологического параметра  $\alpha$ , приводит к интенсивному уменьшению амплитуды и сдвигу фаз вправо, а следовательно, к уменьшению частоты колебаний и критической скорости. Из графиков также видно, что реологический параметр  $\alpha$  оказывает более существенное влияние на процесс флаттера по сравнению с другими реологическими параметрами  $A$  и  $\beta$ .

Дальнейшие расчеты показали, что изменение третьего реологического параметра вязкости  $\beta$  ( $0 < \beta < 1$ ) не оказывает существенного влияния на процесс флаттера вязкоупругой пластины, а это подтверждает вывод о неприемлемости применения экспоненциальных ядер релаксации при расчетах динамических задач вязкоупругих систем.

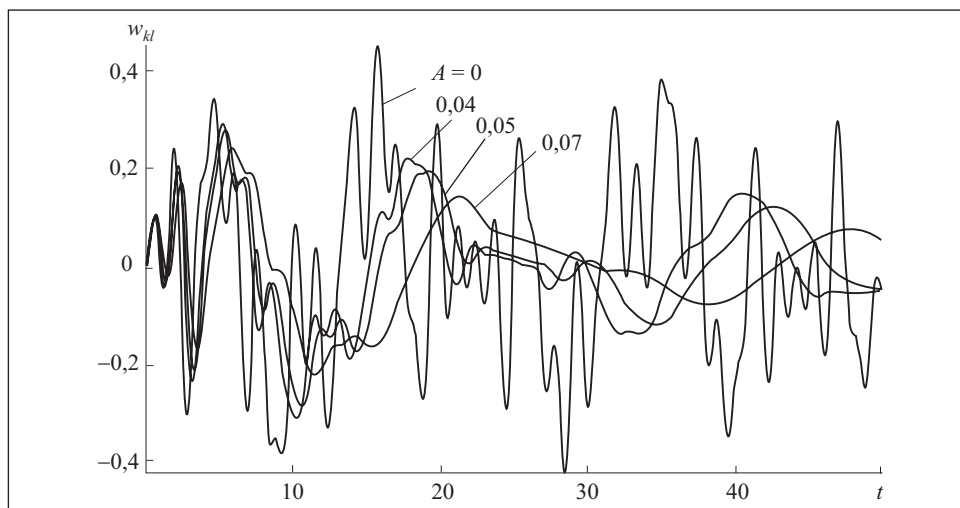


Рис. 7. Зависимость от времени прогиба срединной точки упругой ( $A = 0$ ) и вязкоупругих пластин ( $A = 0,04; 0,05; 0,07$ )

На рис. 9 видно, что в начальные моменты времени результаты, полученные для этих ядер, почти совпадают, но с течением времени наблюдается их существенное различие, которое в момент времени  $t = 10$  составляет более 30 % и с течением времени продолжает возрастать. В тоже время, значения амплитуд, полученные для вязкоупругой задачи при экспоненциальном ядре релаксации, не существенно отличаются от результатов, полученных для задачи в упругой постановке. Это наблюдается не только в начальные моменты времени, но и на достаточно большом временном промежутке.

Из рис. 10 видно, что область динамической устойчивости нелинейных задач полностью включена в область динамической устойчивости линейных задач. Согласно работе [25], пользуясь линейной теорией, можно найти наименьшее значение скорости (критическую скорость флаттера или дивергенции), при которой невозмущенная форма плоской или криволинейной панели перестает быть устойчивой.

В табл. 2 и 3 приведены численные значения критических скоростей  $V_{cr}$  потока газа в случае линейного флаттера вязкоупругой пластины при ее различных физико-механических и геометрических параметрах. В качестве критерия, определяющего значения  $V_{cr}$ , принимается скорость, при которой конструкция совершает гармонические колебания. Значения критических скоростей получены согласно различным теориям: классической линейной теории (Л), линейной теории Тимошенко (Т), теории Бергера (Б), теории Кирхгофа—Лява (К—Л) и нелинейной теории Тимошенко (НТ).

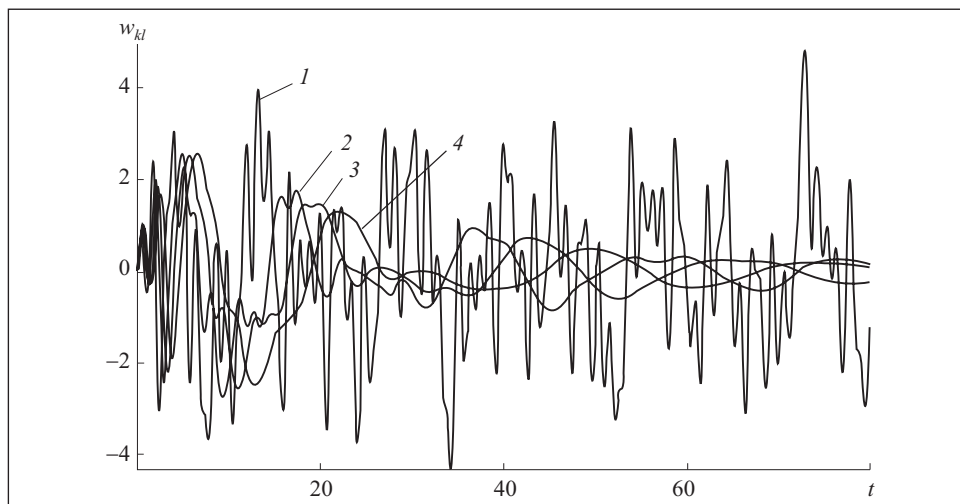


Рис. 8. Влияние реологического параметра на прогиб срединной точки: 1 —  $A = 0$ ; 2 —  $\alpha = 0,15$ ; 3 —  $\alpha = 0,1$ ; 4 —  $\alpha = 0,08$

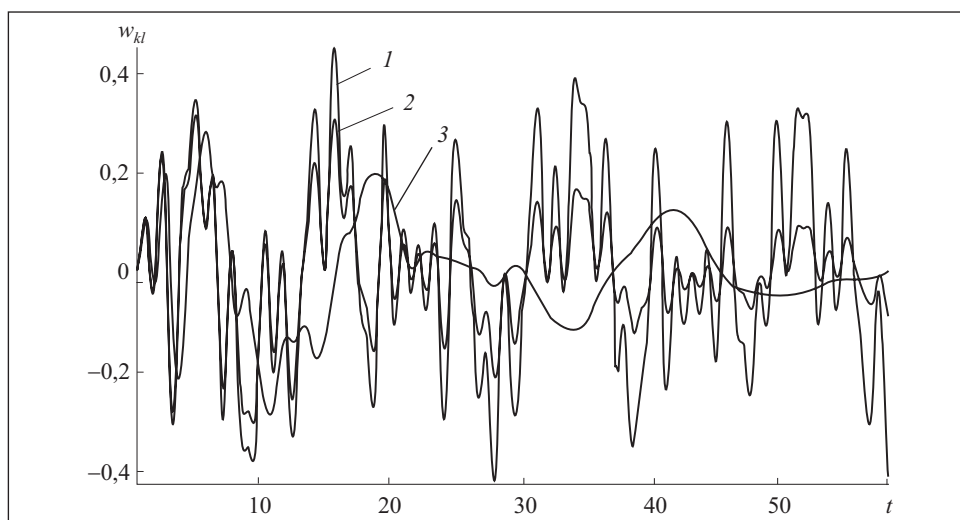


Рис. 9. Графики расчета деформирования упругой (кривая 1) и вязкоупругих (кривые 2, 3) пластин, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа: 2 — при экспоненциальном ядре релаксации; 3 — при ядре Колтунова—Ржаницына

Изучена численная сходимость метода Бубнова—Галеркина. Приведенные в табл. 2 результаты показывают, что при вычислении критических скоростей в (25) необходимо учитывать, по крайней мере, 11 первых гармоник. Как видно из табл. 2, результаты, полученные при двухчленной аппроксимации, которые считаются достаточным и для описания реаль-

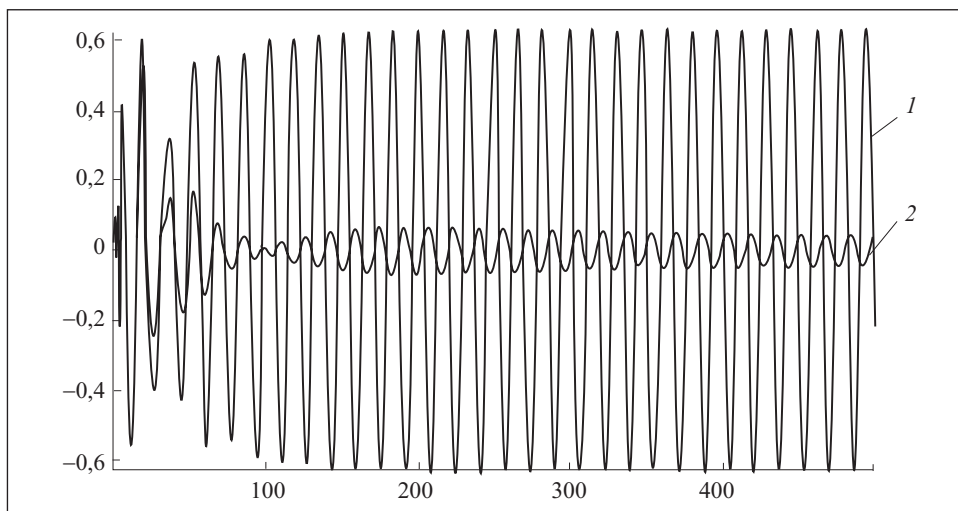


Рис. 10. Результаты решения линейной (кривая 1) и нелинейной (кривая 2) задач для вязкоупругих пластин

Таблица 2

A	$\alpha$	$\beta$	$\delta$	$\lambda$	$M_E$	$M_p$	Л—Т					HT	
							$V_{cr}$					$V_{cr}$	$M_{cr}^*$
							N = 2	N = 6	N = 9	N = 10	N = 11	N = 11	
0,0	—	—	133	3	4,71	0,003	883,1	1255	1240	1242	1241	1517,3	4,46
0,04	0,15	0,05	133	3	4,71	0,003	667,1	1162,6	1192,5	1189,1	1191	1369,7	3,5
0,05	0,15	0,05	133	3	4,71	0,003	630,9	1059	1086,4	1082,9	1084,8	1258,4	3,19
0,07	0,15	0,05	133	3	4,71	0,003	584,5	860,6	871	869,8	870,5	1018,5	2,56
0,05	0,1	0,05	133	3	4,71	0,003	498,7	792,5	807,3	805,5	806,5	919,4	2,37
0,05	0,08	0,05	133	3	4,71	0,003	405,4	593,8	598,8	598,3	598,5	691,3	1,76
0,05	0,15	0,03	133	3	4,71	0,003	636,5	1060,9	1088	1084,5	1086,4	1265,7	3,2
0,05	0,15	0,07	133	3	4,71	0,003	625,7	1057,4	1085	1081,5	1083,5	1273,1	3,19
0,05	0,15	0,05	100	3	4,71	0,003	1489	2498,4	2582,5	2570	2577	2950,7	7,58
0,05	0,15	0,05	150	3	4,71	0,003	440,2	734,5	748,3	746,9	747,6	859,7	2,2
0,05	0,15	0,05	133	4	4,71	0,003	516,8	730,5	841,2	846	843	973,7	2,48
0,05	0,15	0,05	133	3	6	0,003	1032,8	1738,3	1792,1	1784,6	1788,8	2075,0	5,26
0,05	0,15	0,05	133	3	4	0,003	452,6	756,5	772,5	770,7	771,7	883,6	2,27
0,05	0,15	0,05	133	3	4,71	0,004	449,9	748,3	759,6	758,6	759,1	870,7	2,23
0,05	0,15	0,05	133	3	4,71	0,005	295,4	475,1	475,5	475,8	475,6	546,0	1,4



ных процессов, происходящих в пластинах при флаттере, в действительности не дают ожидаемых результатов [6]. Значения критических скоростей, полученные при двухчленной и многочленной аппроксимации ( $N = 11$ ), различаются для упругой и вязкоупругой задач более чем на 30—35 %. Кроме того, из табл. 2 видно, что учет вязкоупругих свойств материала пластины оказывает существенное влияние на изменение критических скоростей. Следует заметить, что в этом случае результаты, полученные для упругой и вязкоупругой задач, различаются на более чем 50 %.

Заметим также, что увеличение реологического параметра  $A$  и уменьшение реологического параметра  $\alpha$  приводит к уменьшению значений  $V_{cr}$ . Изменение реологического параметра вязкости  $A$  в диапазоне от 0,04 до 0,07 приводит к уменьшению значений  $V_{cr}$  более чем на 27 %. Изменение реологического параметра  $\alpha$  в диапазоне 0,08 до 0,15 приводит к увеличению значений  $V_{cr}$  более чем на 45 %. Это подтверждает тот факт, что влияние изменения этого параметра достаточно существенно по сравнению с изменениями других реологических параметров. В то время, как изменение реологического параметра  $\beta$  не оказывает существенного влияния на поведение вязкоупругой пластины.

Изменение безразмерного параметра жесткости  $M_E$  оказывает существенное влияние на поведение вязкоупругой пластины. Как показывают результаты исследования, увеличение этого параметра приводит к интенсивному увеличению  $V_{cr}$ .

В случае упругой задачи, увеличение безразмерного параметра давления  $M_p$  приводит к значительному уменьшению  $V_{cr}$ .

Как свидетельствуют многочисленные исследования, основным фактором, влияющим на результаты, полученные с помощью различных теорий, является параметр  $\delta$ . Как видно из табл. 3, при увеличении этого параметра увеличивается различие результатов, полученных по этим теориям.

**Нелинейный флаттер вязкоупругой цилиндрической панели по уточненной теории Тимошенко.** Рассмотрим задачу об устойчивости

Таблица 3

$\delta$	$M_p$	$V_{cr}$				
		$L$	$L-T$	$B$	$K-L$	$HT$
133	0,003	1085	1084,8	1616,7	1578,9	1410,7
150	0,005	757,4	756,2	1262,6	1220,4	984,8
175	0,006	600,6	599,3	1030,5	1002,9	780,9
200	0,007	409,7	409,5	827	788,4	531,6
250	0,008	225,8	225,7	371,3	353,6	293,2

тонкой вязкоупругой цилиндрической панели со сторонами  $a$  и  $b$ , постоянной толщины  $h$  и радиусом срединной поверхности  $R$ , обтекаемой сверхзвуковым потоком газа со скоростью  $V$ , по обобщенной теории Тимошенко в геометрически нелинейной постановке.

Физические соотношения между напряжениями в срединной поверхности  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  и деформациями  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$  представим в виде (5), а геометрические соотношения между деформациями  $\varepsilon_x^z, \varepsilon_y^z, \gamma_{xy}^z$  и угловыми перемещениями  $\psi_x, \psi_y$  — в виде (21). Тогда связь между деформациями в срединной поверхности  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$  и перемещениями  $u, v, w$  запишем в виде [17]

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{R} w + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (28)$$

С учетом (5) и (21) изгибающие и крутящие моменты  $M_x, M_y, H$  и поперечные силы  $Q_x, Q_y$  имеют вид (22). Подставим (5), (21) и (22) в следующие уравнения [25]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + h \frac{\sigma_y}{R} + h \frac{\partial}{\partial x} \left( \sigma_x \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \\ &+ h \frac{\partial}{\partial y} \left( \tau_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \Delta p - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - Q_x - \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} &= 0, \quad (x \leftrightarrow y), \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= -\frac{1}{2} L(w, w) - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

В случае линеаризованного течения газа вдоль панели, по которой распространяются упругие волны, нормальная составляющая скорости примет вид (23).

Далее, введя функцию напряжения  $F$  (10) для поперечного прогиба  $w = w(x, y, t)$ , функции напряжений  $F = F(x, y, t)$  и угловых перемещений  $\psi_x = \psi_x(x, y, t)$ ,  $\psi_y = \psi_y(x, y, t)$ , получим следующую систему уравнений типа Тимошенко:

$$\frac{K^2 E}{2(1+\mu)} (1-\Gamma^*) \left[ \nabla^2 w + \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right] + L(w, F) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1}{h} \frac{\kappa p_\infty}{V_\infty} \left( \frac{\partial w}{\partial t} + V \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \\
 & \frac{D}{h} (1 - \Gamma^*) \left[ \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + \frac{1}{2} (1 + \mu) \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} (1 - \mu) \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} \right] - \\
 & - \frac{K^2 E}{2(1 + \mu)} (1 - \Gamma^*) \left[ \frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x \right] - \rho \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} = 0, \quad (x \leftrightarrow y), \quad (29) \\
 & \frac{1}{E} \nabla^4 F = - (1 - \Gamma^*) \left\{ \frac{1}{2} L(w, w) + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\}.
 \end{aligned}$$

Удовлетворяя граничным условиям задачи, выберем выражения для прогибов и угловых перемещений на основе многочленной аппроксимации в виде (25). Подставляя первое выражение (25) в четвертое уравнение системы (29) и приравнявая в обеих частях этого уравнения коэффициенты при одинаковых гармониках тригонометрических функций, находим функцию усилий:

$$\begin{aligned}
 F(x, y, t) = E \sum_{i,r=1}^N \sum_{j,s=1}^M (1 - \Gamma^*) w_{ij} w_{rs} & \left[ C_{ijrs} \cos \frac{(i+r)\pi x}{a} \cos \frac{(j+s)\pi y}{b} + \right. \\
 & + A_{ijrs} \cos \frac{(i+r)\pi x}{a} \cos \frac{(j-s)\pi y}{b} + D_{ijrs} \cos \frac{(i-r)\pi x}{a} \cos \frac{(j+s)\pi y}{b} + \\
 & \left. + B_{ijrs} \cos \frac{(i-r)\pi x}{a} \cos \frac{(j-s)\pi y}{b} \right] + \theta h E \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M E_{ij} (1 - \Gamma^*) w_{ij} \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b}, \quad (30)
 \end{aligned}$$

где

$$E_{ij} = \frac{i^2 \lambda^2}{\pi^2 (i^2 + j^2 \lambda^2)^2}, \quad \theta = \frac{b^2}{Rh}.$$

Подставляя (25) и (30) в (29), и выполняя процедуру Бубнова—Галеркина с введением безразмерных величин аналогично предыдущей задаче и сохраняя при этом прежние обозначения, относительно безразмерных  $w_{kl}$ ,  $\psi_{xkl}$ ,  $\psi_{ykl}$  получаем

$$\begin{aligned}
 \ddot{w}_{kl} + M_p \kappa \lambda \delta \dot{w}_{kl} + \frac{M_E \pi^2 \lambda^2}{12 \delta^2 (1 + \mu)} \left\{ 5 \delta^2 \left[ \left( \frac{k}{\lambda} \right)^2 + l^2 \right] + 12 \theta^2 (1 + \mu) \left( \frac{k}{\lambda} \right)^2 E_{kl} \right\} (1 - \Gamma^*) w_{kl} + \\
 + 2 M^* M_p \kappa \lambda \delta \sum_{n=1}^N n (\gamma_{n+k} - \gamma_{n-k}) w_{nl} + \frac{5 M_E \pi \lambda^2 \delta}{12 (1 + \mu)} (1 - \Gamma^*) \left[ \left( \frac{k}{\lambda} \right) \psi_{xkl} + l \psi_{ykl} \right] -
 \end{aligned}$$

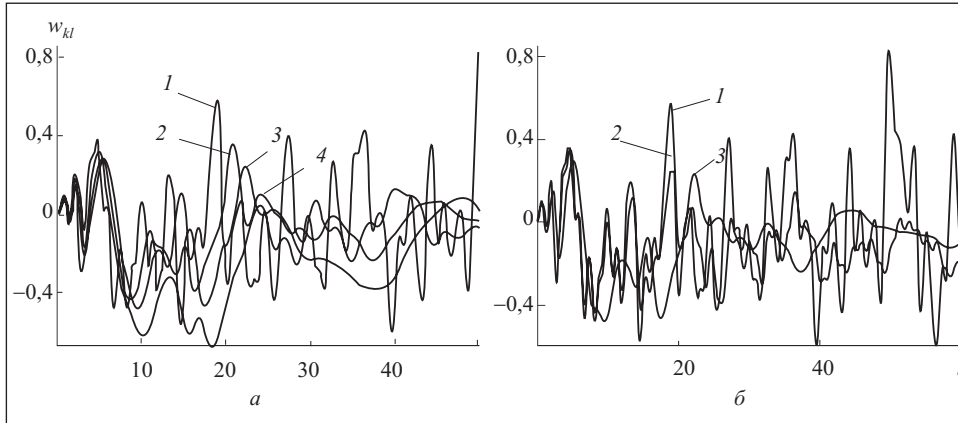


Рис. 11. Зависимость прогиба от времени при различных значениях реологического параметра  $A$  (а) и различных ядрах релаксации (б) для упругой (кривая 1) и вязкоупругой (кривые 2, 3) панелей: а — 1 —  $A = 0$ ; 2 —  $A = 0,03$ ; 3 —  $A = 0,05$ ; 4 —  $A = 0,07$ ; б — 1 —  $A = 0$ ; 2 — экспоненциальное ядро; 3 — ядро Колтунова—Ржаницына

$$\begin{aligned}
 & -\frac{M_E \pi^2 \lambda^2}{\delta^2} \left\{ \frac{\theta}{\lambda^2} \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M F_{klmij} w_{nm} (1-\Gamma^*) w_{ij} + \right. \\
 & \left. + \frac{4\theta}{\pi^2 \lambda^2} \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M K_{klmij} (1-\Gamma^*) w_{nm} w_{ij} - \sum_{n,i,r=1}^N \sum_{m,j,s=1}^M a_{klmijrs} w_{nm} (1-\Gamma^*) w_{ij} w_{rs} \right\} = 0, \\
 & \ddot{\psi}_{xkl} + \frac{M_E}{2(1-\mu^2)} [2\pi^2 k^2 + \pi^2 \lambda^2 (1-\mu) l^2 + 10\lambda^2 \delta^2 (1-\mu)] (1-\Gamma^*) \psi_{xkl} + \quad (31) \\
 & + \frac{M_E \pi^2 \lambda}{2(1-\mu)} kl (1-\Gamma^*) \psi_{ykl} + \frac{5M_E \pi \lambda \delta}{1+\mu} k (1-\Gamma^*) w_{kl} = 0, \\
 & \ddot{\psi}_{ykl} + \frac{M_E}{2(1-\mu^2)} [2\pi^2 \lambda^2 l^2 + \pi^2 (1-\mu) k^2 + 10\lambda^2 \delta^2 (1-\mu)] (1-\Gamma^*) \psi_{ykl} + \\
 & + \frac{M_E \pi^2 \lambda}{2(1-\mu)} kl (1-\Gamma^*) \psi_{xkl} + \frac{5M_E \pi \lambda^2 \delta}{1+\mu} l (1-\Gamma^*) w_{kl} = 0.
 \end{aligned}$$

Интегрирование системы (31) проведено численным методом, предложенным в [2, 4]. При этом в качестве ядра релаксации использовано слабосингулярное ядро Колтунова—Ржаницына вида (14).

При различных физико-механических и геометрических параметрах вязкоупругой цилиндрической панели найдем критические скорости по-

тока газа и рассмотрим результаты вычислений нелинейного флаттера вязкоупругой цилиндрической панели, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа. Скорость потока газа принята равной 400 м/с. В качестве исходных приняты следующие данные:  $w_0 = 10^{-1}$ ;  $A = 0,05$ ;  $\alpha = 0,15$ ;  $\beta = 0,05$ ;  $\lambda = 3$ ;  $\delta = 133$ ;  $\theta = 6$ ;  $M_E = 4,71$ ;  $M_p = 0,003$ .

Влияние вязкоупругих свойств материала панели на динамику ее поведения графически представлено на рис. 11. Как видно из рис. 11, *а*, учет вязкоупругих свойств материала панели позволяет выявить затухание колебательного процесса. При этом в начальный период времени различие результатов решения упругой и вязкоупругой задач незначительно, однако с течением времени вязкоупругие свойства материала оказывают существенное влияние на процесс нелинейного флаттера.

Анализ результатов исследования влияния реологического параметра  $\alpha$  в данном случае свидетельствует о том, что уменьшение значения этого параметра, как и для вязкоупругой прямоугольной пластины, приводит к интенсивному уменьшению амплитуды и сдвигу фаз вправо, а следовательно, к уменьшению частоты колебаний.

Дальнейшие расчеты показали, что изменение третьего реологического параметра вязкости  $\beta$  ( $0 < \beta < 1$ ) не оказывает существенного влияния на процесс флаттера вязкоупругой панели, подтверждая вывод о неприемлемости применения экспоненциальных ядер релаксации при расчетах динамических задач вязкоупругих систем.

На рис. 11, *б* приведены графики расчета флаттера вязкоупругой панели, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, при различных ядрах релаксации.

Из рис. 11, *б* видно, что в начальные моменты времени полученные результаты при различных ядрах, почти совпадают, но затем наблюдается их существенное расхождение; в момент времени  $t = 10$  различие результатов составляет более 35 % и с течением времени оно продолжает возрастать. В тоже время, результаты, полученные по амплитудным значениям при экспоненциальном ядре релаксации для вязкоупругой задачи существенно отличаются от результатов, полученных для задачи в упругой постановке. Это обстоятельство наблюдается не только в начальные моменты времени, но и на достаточно большом промежутке времени.

На рис. 12 представлены результаты исследования влияния на прогиб вязкоупругой панели ее физических параметров:  $M_E$  (рис. 12, *а*) и  $M_p$  (рис. 12, *б*). Как видим, изменение этих параметров приводит к противоположным результатам. В частности, увеличение параметра  $M_E$  приводит к уменьшению амплитуды колебания, а увеличение параметра  $M_p$  — к ее увеличению.

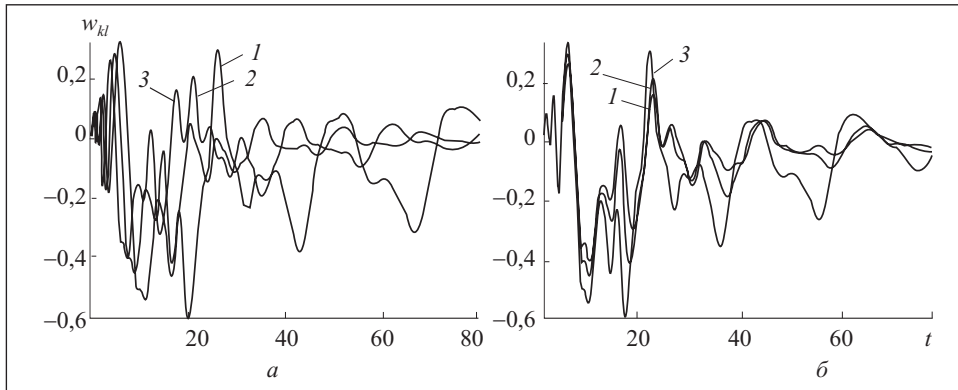


Рис. 12. Зависимость прогиба вязкоупругой панели от времени при различных значениях  $M_E$  (а) и  $M_p$  (б): а — 1 —  $M_E = 4$ ; 2 —  $M_E = 5$ ; 3 —  $M_E = 6$ ; б — 1 —  $M_p = 0,002$ ; 2 —  $M_p = 0,003$ ; 3 —  $M_p = 0,004$

Таблица 4

$\theta$	$\delta$	$M_p$	$V_{cr}$				
			Л	Л—Т	Б	К—Л	НТ
6	133	0,003	1265,2	1271,3	1885,2	1841,1	1645
9	150	0,005	883,2	887,4	1472,3	1423,1	1148,3
12	175	0,006	700,4	703,8	1201,6	1170,2	910,6
15	200	0,007	477,7	480	964,4	919,4	621,1
18	250	0,008	263,3	264,6	433	412,3	342,4

В табл. 4 приведены значения  $V_{cr}$ , полученные по различным теориям. Расчеты показывают, что с увеличением параметра  $\delta$  наблюдается расхождение в результатах, полученных по этим теориям.

Задачи о флаттере вязкоупругих пластин в различных постановках были исследованы в работах [26—33].

Таким образом, первым этапом к эффективной компьютерной реализации сложных математических моделей задачи о нелинейных колебаниях и динамической устойчивости вязкоупругих пластин и цилиндрических панелей является дискретизация исходных уравнений в частных производных и сведение их к системам скалярных интегро-дифференциальных уравнений. Последующее эквивалентное преобразование данных систем к эквивалентным интегральным уравнениям Вольтерры позволило предложить эффективный квадратурный алгоритм численного решения задач рассматриваемого класса, обеспечивающий получение результатов моделирования с необходимой точностью.

A method and algorithm are presented to solve the problems of dynamics of viscoelastic systems. The proposed method has helped to solve the problems on nonlinear oscillations and dynamic stability of viscoelastic rectangular plates and cylindrical panels.

23. *Uflyand Ya. S.* Distribution of Waves at Transverse Vibrations of Cores and Plates // *J. Appl. Mech.* — 1948. — **12** (3). — P. 287—300.
24. *Mindlin R. D.* Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates // *Ibid.* — 1951. — **19** (1). — P. 31—38.
25. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. — М. : Физматгиз, 1961. — 270 с.
26. *Evensen D. A., Olson M. D.* Nonlinear Flutter of a Circular Cylindrical Shell in Supersonic Flow // *NASA TN D-4265.1967.*
27. *Dowell E. H.* Aeroelasticity of Plates and Shells. — Leyden : Noordhoff international publishing, 1975.
28. *Bolotin V. V., Grishko A. A., Kounadis A. N., Gantes C. J.* Non-linear Panel Flutter in Remote Post-critical Domains // *Intern. J. of Non-linear Mechanics.* — 1998. — Vol. 33, № 5. — P. 753—764.
29. *Bismarck-Nasr M. N., Bones C. A.* Damping Effects in Nonlinear Panel Flutter // *AIAA J.* — 2000. — Vol. 38, № 4. — P. 711—713.
30. *Ariaratnam S. T., Abdelrahman N. M.* Almost-sure Stochastic Stability of Viscoelastic Plates in Supersonic Flow // *Ibid.* — 2001. — Vol. 39, № 3. — P. 465—472.
31. *Beldica C. E., Hilton H. H., Kubair D.* Viscoelastic Panel Flutter — Stability, Probabilities of Failure and Survival Times // *Proc.42nd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conf.* — Seattle. — 2001. — P. 3423—3433.
32. *Gordnier R. E., Visbal M. R.* Computation of a 3-D Nonlinear Panel Flutter // *J. of Aerospace Engineering.* — 2003. — Vol. 16, № 4. — P. 155—166.
33. *Pourtakdoust S. H., Fazelzadeh S. A.* Chaotic Analysis of Nonlinear Viscoelastic Panel Flutter in Supersonic Flow // *J. of Nonlinear Dynamics.* — 2003. — № 32. — P. 387—404.

Поступила 16.12.08;  
после доработки 08.04.09

*ВЕРЛАНЬ Анатолий Федорович, д-р техн. наук, зав. отделом Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины. В 1956 г. окончил Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований — методы математического и компьютерного моделирования в задачах исследования динамических систем, электрических цепей; численные методы и алгоритмы решения интегральных уравнений.*

*ЭШМАТОВ Хасан, д-р техн. наук, зав. кафедрой информационных технологий Ташкентского ин-та ирригации и мелиорации. В 1969 г. окончил Самаркандский госуниверситет. Область научных исследований — математическое моделирование.*

*ЭШМАТОВ Бахтиёр Хасанович, канд. физ.-мат. наук, проф. факультета механики и космической техники университета Буффало, США. В 1997 г. окончил Ташкентский госуниверситет. Область научных исследований — математическое моделирование.*

*БОБАНАЗАРОВ Шароф Пулатович, канд. техн. наук, доцент кафедры информационных технологий Ташкентского ин-та ирригации и мелиорации. В 1992 г. окончил Ташкентский госуниверситет. Область научных исследований — математическое моделирование.*

*КУЧАРОВ Олимжон Рузимуратович, ст. препод. кафедры высшей математики Ташкентского ин-та ирригации и мелиорации. В 1994 г. окончил Ташкентский госуниверситет. Область научных исследований — математическое моделирование.*

*ХОДЖАЕВ Дадахан Акмарханович, ассистент кафедры информационных технологий Ташкентского ин-та ирригации и мелиорации. В 1996 г. окончил Ташкентский госуниверситет. Область научных исследований — механика деформируемого твердого тела.*