
УДК 519.67

С. И. Яремчук *, канд. физ.-мат. наук,
В. В. Рудюк **, **Ю. А. Шаповалов** *, кандидаты техн. наук,
Л. В. Рудюк *, канд. физ.-мат. наук

* Житомирский государственный технологический университет
(Украина, 10005, Житомир, ул. Черняховского, 103,
тел. (0412) 418-542, E-mail: yuri-ua@yandex.ru)

** (Украина, 10005, Житомир, просп. Мира, 59,
тел. 80502145205, E-mail: rudyuk@war3.com.ua)

Моделирование размещения нагрузок, обеспечивающего предельный продольный изгибающий момент в строительных сооружениях

(Статью представил д-р техн. наук В. Д. Самойлов)

Рассмотрена задача моделирования размещения нагрузок, при котором возникает максимальный продольный изгибающий момент, действующий на колонну строительного сооружения. Разработан метод решения поставленной задачи. Приведены результаты численного эксперимента.

Розглянуто задачу моделювання розміщення навантажень, при якому виникає максимальний поздовжній вигинаючий момент, що діє на колону будівельної споруди. Розроблено метод розв'язання поставленої задачі. Наведено результати чисельного експерименту.

Ключевые слова: продольный изгибающий момент, метод возможных направлений, метод направленного перехода.

В 1955 году в СССР был внедрен новый прогрессивный метод расчетов строительных конструкций и сооружений на прочность и устойчивость по предельному состоянию. Этот метод и сегодня используют в Украине. Суть метода заключается в том, что при расчетах строительных конструкций рассматривают их предельные условия равновесия, возникающие при действии возможных максимальных (расчетных) постоянных и временных нагрузок. Исследуют такое геометрическое расположение нагрузок, при котором в строительной конструкции возникают максимальные внутренние усилия (изгибающий момент, поперечная и продольная силы) при возможно наименьшей прочности строительного материала, из которого она изготовлена. В результате наступления предельного состояния могут возникнуть значительные деформации или разрушение конструкции.

При проектировании изгибающих конструкций, как правило, решающее значение имеет расчет на прочность и устойчивость по величине возможного максимального (расчетного) изгибающего момента, возникающего под воздействием внешних сил. Исходя из этой величины рассчитывают плиты (балки), перекрытия (покрытия) и другие стержневые системы, а сжатые гибкие конструкции — колонны (опоры), элементы строительных ферм и другие — рассчитывают по величине максимального расчетного продольного изгибающего момента. Известно, что величина изгибающего момента зависит не только от величины внешних сил (нагрузок), но и от их геометрического расположения [1, 2].

Обычно определение расчетного изгибающего момента при проектировании конструкций осуществляется вручную моделированием геометрического расположения возможных нагрузок согласно соответствующим строительным нормам и правилам. При этом рассматривают несколько вариантов геометрического расположения внешних временных нагрузок.

Такой подход к моделированию расчетного максимального изгибающего момента, который может возникнуть в колоннах (опорах) при каркасных конструктивных схемах строительных сооружений, не всегда может обеспечить прочность и устойчивость колонн на длительный период эксплуатации строительных сооружений, так как на стадии проектирования спрогнозировать возможные изменения производственного (технологического) использования здания через десятки лет его эксплуатации практически невозможно.

Примером этого может быть разрушение недавно построенного в Москве Аквапарка вследствие возникновения в центральной опоре, несущей нагрузку от покрытия здания, продольного изгибающего момента, величина которого стала больше расчетной. Поэтому актуальной является проблема разработки специального математического аппарата для многовариантного моделирования величины продольного изгибающего момента, возникающего в колоннах при каркасных конструктивных схемах строительных сооружений.

Данную задачу можно рассматривать как задачу оптимального размещения геометрических объектов в заданной области. Применение методов геометрического проектирования к практическим задачам давно вызывает интерес ученых [3, 4]. Ввиду особенностей таких задач (большая размерность, несвязность множества допустимых решений с многосвязными компонентами связности, часто невыпуклость функции цели) исследования в данной области не прекращаются. Например в работе [5] рассмотрена задача моделирования неудачного размещения нагрузок, при котором в конструкции возникает максимальный поперечный изгибающий момент. Эта задача была сведена к задаче оптимального размещения

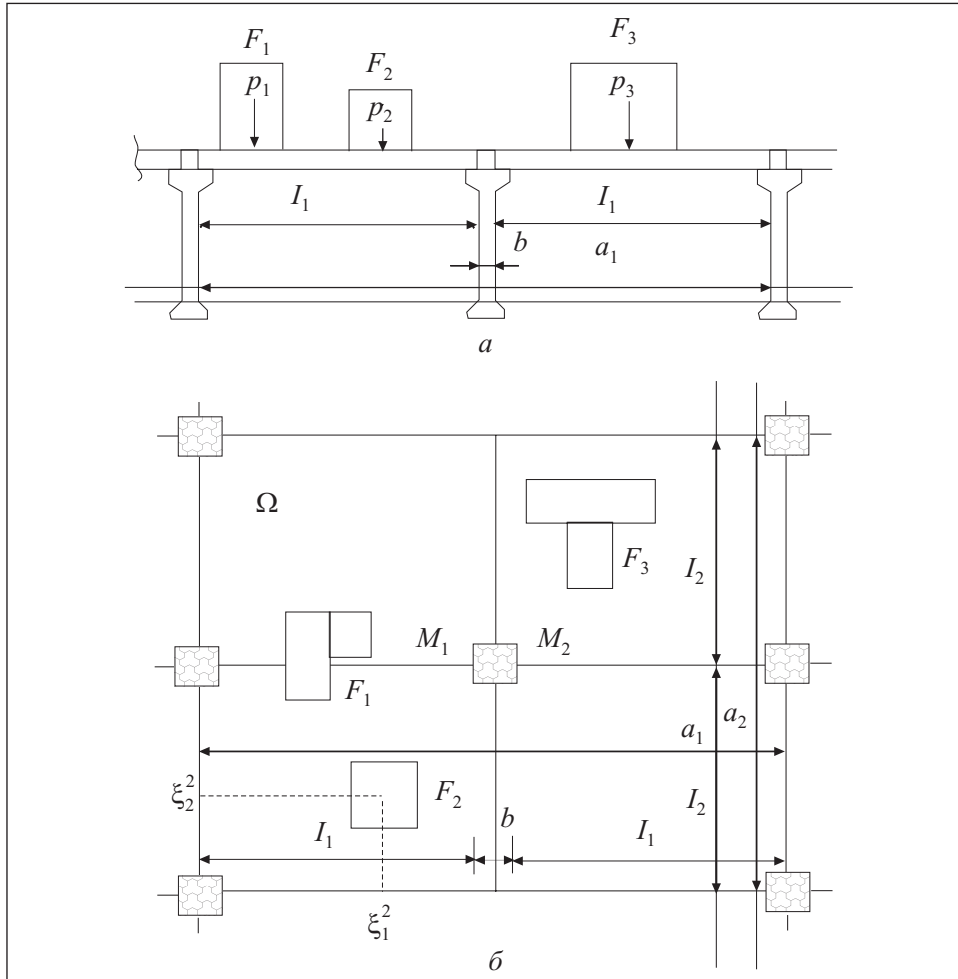


Рис. 1. Схема размещения временных нагрузок на покрытие (а) и пример допустимого размещения нагрузок (б)

прямоугольников в прямоугольной области. Для ее решения разработан метод G -проекции.

Постановка задачи. Будем моделировать возможное размещение нагрузок, при котором возникает максимальный расчетный продольный изгибающий момент в сжатых гибких колоннах, и соответственно изгибающий момент, действующий при этом на фундамент колонн (рис. 1). Рассмотрим конструктивную схему каркаса для случая, когда балки, опирающиеся на колонны, и плиты покрытия, опирающиеся на балки, имеют шарнирные опоры [6].

Задано: размеры $a(a_1, a_2)$ прямоугольной области размещения Ω , геометрические размеры колонны b , размещаемые объекты $F_i, i=\overline{1, m}$. Область размещения разделена пополам. Объекты могут быть передвинуты в пределах заданной (левой или правой) части области. Кроме того, в области могут находиться объекты, положение которых фиксировано. Каждый объект $F_i, i=\overline{1, m}$, имеет свои геометрические размеры, вес p_i и форму:

$$F_i = \bigcup_{j=1}^{m_i} D_{ij}, \quad i \in \overline{1, m+s},$$

где D_{ij} — прямоугольник; s — число фиксированных объектов.

Полюсом [3] объекта F_i назовем геометрический центр одного из его прямоугольников $(D_{i1}, D_{i2}, \dots, D_{im_i})$. Для определенности пусть полюсом $Z^i(\xi_1^i, \xi_2^i)$ объекта F_i будет центр первого прямоугольника $D_{i1}, i=\overline{1, m}$. В свою очередь, полюсом прямоугольника $D_{ij}, i=\overline{1, m}, j=\overline{1, m_i}$, будем считать его геометрический центр. Тогда для определения каждого объекта $F_i, i=\overline{1, m}$, необходимо задать его вес p_i , размеры $L^{ij}(l_1^{ij}, l_2^{ij})$ всех прямоугольников $D_{ij}, j=\overline{1, m_i}$, положение $C^{ij}(c_1^{ij}, c_2^{ij})$ этих прямоугольников в подвижной системе координат, центр которой совпадает с полюсом $Z^i(\xi_1^i, \xi_2^i)$ соответствующего объекта F_i , а оси параллельны сторонам прямоугольников. Положение объектов в области Ω определяется координатами вектора

$$Z(Z^1, Z^2, \dots, Z^m) = (\xi_1^1, \xi_2^1, \xi_1^2, \xi_2^2, \dots, \xi_1^m, \xi_2^m).$$

Кроме подвижных, заданы объекты $F_i, i=\overline{m+1, m+s}$, положение которых фиксировано и не может измениться. Координаты их полюсов $(\xi_1^{m+1}, \dots, \xi_n^{m+1}, \dots, \xi_1^{m+s}, \dots, \xi_n^{m+s})$ являются константами. В центре области размещения существует преграда в виде неподвижного прямоугольника заданных размеров (b, a_2) .

Необходимо определить размещение объектов, при котором величина продольного изгибающего момента, возникающего в колонне, будет максимальной. При этом объекты не должны взаимно пересекаться и не могут выходить за пределы области Ω .

Пусть центр масс объекта F_i совпадает с его полюсом. Тогда нагрузка $R_i(Z)$, передаваемая на балку от объекта F_i (опорная реакция), определяется по формуле

$$R_i(Z) = \frac{(l_2 - |l_2 - \xi_2^i|)p_i}{l_2}, \quad i \in \overline{1, m},$$

где Z — параметр размещения объектов. Опорную реакцию колонны при нагрузке покрытия слева от колонны $R_l(Z)$ определяем так:

$$R_l(Z) = \sum_{i \in I_l} \frac{R_i(Z) \xi_1^i}{l_1} = \sum_{i \in I_l} \frac{(l_2 - |l_2 - \xi_2^i|) p_i \xi_1^i}{l_1 l_2},$$

$$I_l \subseteq \{1, 2, \dots, m, m+1, \dots, m+s\}, \quad (1)$$

где I_l — множество индексов объектов, находящихся в левой части области.

Выражение для опорной реакции колонны при нагрузке правой части покрытия $R_r(Z)$ запишем в виде

$$R_r(Z) = \sum_{i \in I_r} \frac{R_i(Z) (a_1 - \xi_1^i)}{l_1} = \sum_{i \in I_r} \frac{(l_2 - |l_2 - \xi_2^i|) p_i (a_1 - \xi_1^i)}{l_1 l_2},$$

$$I_l \subseteq \{1, 2, \dots, m, m+1, \dots, m+s\}, \quad I_r = \{1, 2, \dots, m+s\} \setminus I_l, \quad (2)$$

где I_l и I_r — множество индексов объектов, находящихся в левой и правой частях области. Величина продольного изгибающего момента имеет вид

$$|f(Z)| = b |R_l(Z) - R_r(Z)|.$$

Таким образом, получена задача условной оптимизации

$$|f(Z)| \rightarrow \max, \quad Z \in G,$$

где G — множество допустимых размещений. Следует заметить, что при $\xi_2^i = l_2$ производной функции $f(Z)$ не существует, поэтому для применения градиентных методов в выражениях (1), (2) можно сделать замену $|l_2 - \xi_2^i|$ на $\sqrt{(l_2 - \xi_2^i)^2 + \delta}$, $\delta > 0$. Тогда

$$f(Z) = \frac{b}{l_1 l_2} \left(\sum_{i \in I_r} ((l_2 - \sqrt{(l_2 - \xi_2^i)^2 + \delta}) p_i \xi_1^i) - \sum_{i \in I_l} ((l_2 - \sqrt{(l_2 - \xi_2^i)^2 + \delta}) p_i (a_1 - \xi_1^i)) \right),$$

$$I_l \subseteq \{1, 2, \dots, m, m+1, \dots, m+s\}, \quad I_r = \{1, 2, \dots, m+s\} \setminus I_l, \quad \delta > 0.$$

Величина δ сравнима с погрешностью вычислений.

В случае, когда центр масс объекта не совпадает с его полюсом, в функции $f(Z)$ выполняется замена ξ_j^i на $\xi_j^i + d_j^i$ ($i=1, m+s, j=1, 2$), где d_j^i определяет смещение центра масс объекта F_i относительно его полюса.

Задачу (3) можно решить так: найти решение задачи

$$\chi(Z) \rightarrow \min, Z \in G, \quad (4)$$

для случаев, когда $\chi(Z) = f(Z)$ и $\chi(Z) = -f(Z)$, а затем из двух полученных размещений выбрать то, для которого значение $|f(Z)|$ будет наибольшим.

Множество G определяется условиями принадлежности объектов к области Ω и условиями их взаимного непересечения. Для невыхода объекта $F_i, i = \overline{1, m}$, за границы области Ω достаточно наложить ограничения на координаты вершин, которые являются угловыми точками выпуклой оболочки его составных $D_{ij}, j = \overline{1, m_i}$:

$$\frac{l_k^{ij}}{2} \leq (\xi_k^i + c_k^{ij}) \leq a_k - \frac{l_k^{ij}}{2}, \quad \forall (\xi_k^i + c_k^{ij}) \in S_i, \\ i = \overline{1, m}, j = \overline{1, m_i}, k = 1, 2, \quad (5)$$

где S_i — множество угловых точек выпуклой оболочки, построенной из вершин соответствующих прямоугольников $D_{ij}, j = \overline{1, m_i}$, объекта $F_i, i = \overline{1, m}$. Число ограничений (5) зависит от числа и формы объектов $F_i, i = \overline{1, m}$. Для непересечения объектов $F_i, F_k, i = \overline{1, m}, k = i+1, m+s$, необходимо обеспечить непересечение составляющих $D_{ij}, D_{kl}, j = \overline{1, m_i}, l = \overline{1, m_k}$, принадлежащих различным объектам, а для этого достаточно, чтобы для каждой пары D_{ij}, D_{kl} выполнялось одно из следующих неравенств [7]:

$$|\xi_t^i + c_t^{ij} - (\xi_t^k + c_t^{kl})| \geq \frac{l_t^{ij} + l_t^{kl}}{2}, \\ i = \overline{1, m}, j = \overline{1, m_i}, k = i+1, m+s, l = \overline{1, m_k}, t = 1, 2. \quad (6)$$

Множество допустимых решений G задачи (3) задается ограничениями (5),(6). С учетом (6) множество G — невыпуклое, многосвязное — может быть несвязным с большим числом компонент связности.

В данном случае используем идею замены решения исходной задачи решением последовательности подзадач [8], при построении которых осуществляется декомпозиция множества допустимых решений G на выпуклые подмножества G_u [9]:

$$G = \bigcup_{u=1}^r G_u, \quad (7)$$

где $r = 4^{C_m^n}$. В качестве решения исходной задачи (4) принимаем лучшее из решений построенных подзадач:

$$\chi(Z) \rightarrow \min, Z \in G_u, u = \overline{1, r}. \quad (8)$$

Ограничение непересечения пары составляющих $D_{ij}, D_{kl}, i=\overline{1, m}, j=\overline{1, m_i}, k=i+1, m+s, l=\overline{1, m_k}$, можно записать в виде

$$\begin{aligned} (\xi_1^i + c_1^{ij}) - (\xi_1^k + c_1^{kl}) &\geq \frac{l_1^{ij} + l_1^{kl}}{2} \vee (\xi_2^i + c_2^{ij}) - (\xi_2^k + c_2^{kl}) \geq \frac{l_2^{ij} + l_2^{kl}}{2} \vee \\ \vee (\xi_1^k + c_1^{kl}) - (\xi_1^i + c_1^{ij}) &\geq \frac{l_1^{ij} + l_1^{kl}}{2} \vee (\xi_2^k + c_2^{kl}) - (\xi_2^i + c_2^{ij}) \geq \frac{l_2^{ij} + l_2^{kl}}{2}. \end{aligned}$$

Для построения системы ограничений, определяющей выпуклое подмножество $G_u, u=\overline{1, r}$, необходимо следующее:

для каждой пары составляющих $D_{ij}, D_{kl}, i=\overline{1, m}, j=\overline{1, m_i}, k=i+1, m+s, l=\overline{1, m_k}$ выбрать по одному из неравенств (7);

добавить ограничения (5), задающие условия невыхода объектов $F_i, i=\overline{1, m}$, за границы области Ω .

Запишем неравенства, задающие G_u , в виде

$$\phi_i(Z) \leq 0, i=\overline{1, q}, \quad (9)$$

где q — общее число ограничений, зависящее от формы и числа объектов.

Подзадачи (8) являются задачами условной оптимизации. В ограничения (9) входят только линейные функции. Для решения полученных подзадач используется модификация метода возможных направлений [10]. Для решения исходной задачи разработан метод направленного перехода [10].

Алгоритм решения задачи оптимизации размещения нагрузок. Начальное размещение, необходимое для работы алгоритма, получено методом циклического покоординатного спуска с использованием штрафных функций [11].

1. $k=0$. Выбираем начальное размещение

$$Z^0 = (\xi_1^1, \xi_2^1, \xi_1^2, \xi_2^2, \dots, \xi_1^m, \xi_2^m) \in G_u \subset G, u=\overline{1, r};$$

параметры метода: $\varepsilon > 0, \varepsilon_0 > \varepsilon, 0 < \gamma < 1$.

2. Поиск k -го приближения, $k=0, 1, \dots$; входные данные: $Z^k, \varepsilon_k > 0$.

2.1. Проверяем ограничения, задающие условия взаимного непересечения объектов. Если для размещения Z^k ограничение $\phi_i^*(Z^k) \leq 0$, обеспечивающее непересечение составляющих $D_{pj}, D_{vl}, p \neq v$, удовлетворяет условию $-\varepsilon < \phi_i^*(Z^k) \leq 0$, т. е. $\phi_i^u(Z^k) \leq 0$ является « ε_k -активным», то осуществляем проверку: если для пары D_{pj}, D_{vl} выполняется условие $\phi_i(Z^k) \leq 0$ (ограничение их непересечения по другой координате), причем $\phi_i(Z^k) \leq -\varepsilon_k$ (т. е. ограничение $\phi_i(Z^k) \leq 0$ в точке Z^k не является ε_k -активным), то в системе ограничений делаем замену неравенства $\phi_i^*(Z^k) \leq 0$ на $\phi_i(Z^k) \leq 0$.

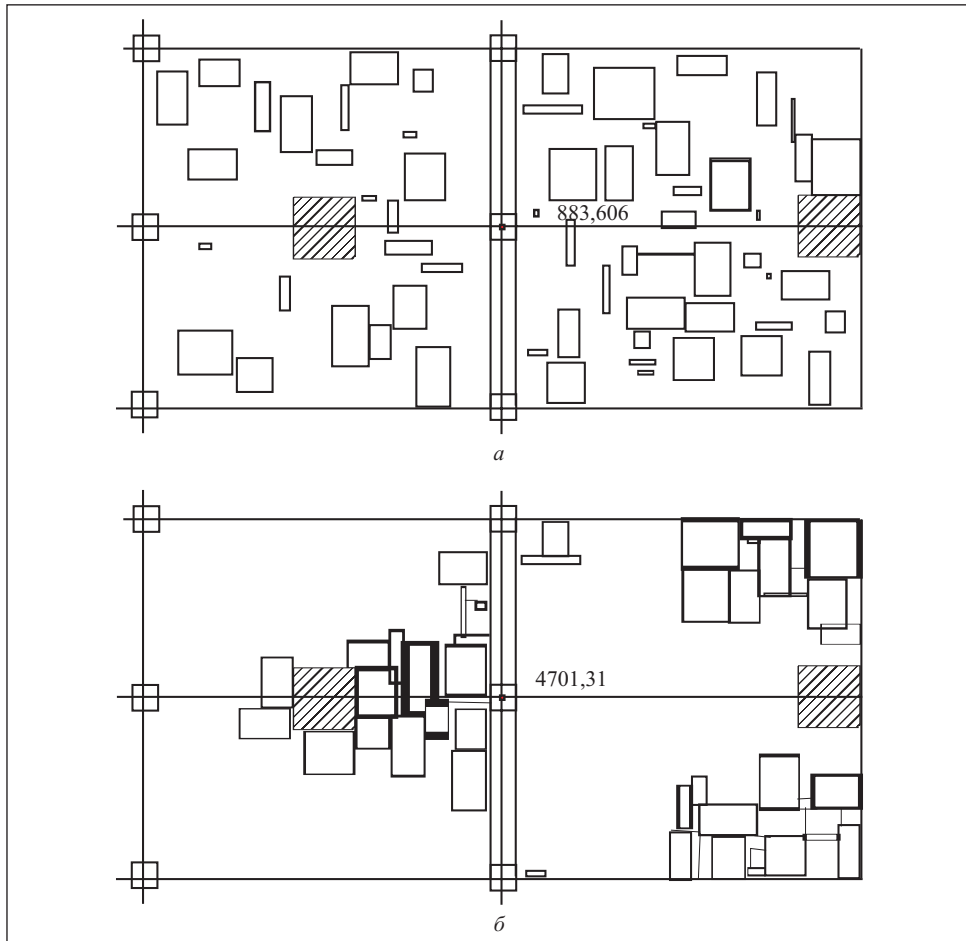


Рис. 2. Начальное (а) и полученное (б) размещение объектов

2.2. Строим множество индексов ε_k -активных ограничений:

$$I(Z^k, \varepsilon_k) = \{i \in \overline{1, q} : -\varepsilon_k < \phi_i(Z^k) \leq 0\}.$$

2.3. Находим вектор спуска, для чего решаем вспомогательную задачу линейного программирования:

$$\bar{\chi}(h_1, h_2, \dots, h_{2m}) = (\nabla \chi(Z^k), h) \rightarrow \min,$$

$$(\nabla \phi_i(Z^k), h) \leq 0, \forall i \in I(Z^k, \varepsilon_k),$$

$$|h_i| \leq 1, i = \overline{1, 2m};$$

решение вспомогательной задачи: $h^k(h_1^k, h_2^k, \dots, h_{2m}^k)$.

Если $y_k \geq -\varepsilon_k$ и $\varepsilon_k \leq \varepsilon$, то вычисления прекращаются, Z^k принимается в качестве решения задачи.

Если $\bar{\chi}(h^k) \geq -\varepsilon_k$ и $\varepsilon_k > \varepsilon$, то $Z^{k+1} = Z^k$, $\varepsilon_{k+1} = \gamma\varepsilon_k$, переменной k присваивается значение $k+1$ и осуществляется переход к п. 2.

Если $\bar{\chi}(h^k) < -\varepsilon_k$, то h^k — вектор спуска.

2.4. Поиск $k+1$ -го приближения; $Z^{k+1} = Z^k + \beta_k h^k$; β_k находится из условия

$$\beta_k = \arg \min_{0 < \beta < B_k} \chi(Z^k + \beta h^k),$$

где B_k — максимально допустимое β , при котором выполняются все неравенства $\phi_i(Z^k + B_k h^k) \leq 0$, $i = \overline{1, q}$, системы ограничений подзадачи.

2.5. Переменной k присваиваем значение $k+1$ и осуществляем переход к п. 2.

Корректность работы данного алгоритма проверена на тестовых примерах с использованием программной реализации.

На рис.2, *a* и *б* приведено начальное размещение объектов и полученное в результате решения тестовой задачи. Параметры тестовой задачи следующие:

число объектов — 60;

фиксированных объектов — три (два заштрихованы и вертикальная перегородка в центре области (см. рис. 2);

параметры объектов и их начальное размещение получено случайным образом;

размеры области размещения — 12×6 ;

размеры колонны — $0,5 \times 0,5$.

Полученная величина продольного изгибающего момента:

$$|f(Z^0)| = 883,606, \quad |f(Z^*)| = 4701,31.$$

На ЭВМ Core2Duo E6300 512MB RAM решение получено за 31,9 с. Сделано 199 итераций алгоритма и 50 переходов между выпуклыми подмножествами.

Для повышения качества результата решения рекомендуется решать задачу несколько раз, используя различные начальные размещения нагрузок. Результат следует выбрать тот, который обеспечит прочность и устойчивость колонны и фундамента под колонной с учетом прогноза возможных изменений производственного (технологического) характера за период эксплуатации здания.

Таким образом, разработанный метод позволяет определять максимальный продольный изгибающий момент, который может возникнуть в колонне в течение эксплуатации здания при неудачном размещении расчетных нагрузок. В созданном программном продукте использован математический аппарат, разработанный для решения поставленной задачи.

The paper deals with a problem of modeling the allocation of loads when a maximum longitudinal bending moment arises which affects the building structure column. A method to solve the posed problem has been developed. Numerical results of the experiment are presented.

1. Дарков А. В. Строительная механика. — Москва : Высшая школа, 1976. — 600 с.
2. Улицкий И. И., Ривкин С. А., Самолетов М. В. и др. Железобетонные конструкции (расчет и конструирование). Изд. третье, переработ. и доп. — Киев : Будівельник, 1972. — 992 с.
3. Стоян Ю. Г., Гиль Н. И. Методы и алгоритмы размещения плоских геометрических объектов. — Киев : Наук. думка, 1976. — 248 с.
4. Яловкина Е. Б. Способ построения области возможных положений нагрузки на тонкой жесткой пластине при свободном опирании по контуру // Методы поисковой оптимизации и размещения геометрических объектов. — Киев : ИК АН УССР, 1976. — С. 8—14.
5. Рудюк Л. В. Математична модель та чисельні методи розв'язання задачі оптимізації розміщення прямокутників: Автореф. дис. канд. фіз.-мат. наук. — Харків, 2006. — 20 с.
6. Байков В. Н., Сигалов Э. Е. Железобетонные конструкции. Общий курс: Учеб. для вузов. — 5-е изд., перераб. и доп. — М. : Стройиздат, 1991. — 767 с.
7. Яремчук С. І., Шаповалов Ю. О. Оптимізація розміщення об'єктів, які можна розкласти на прямокутники // Радиоелектроника и информатика. — 2006. — № 1. — С. 87—90.
8. Яремчук С. І., Жовновський Д. О., Снівак А. В. Модифікація методу умовного градієнта для розв'язання задач оптимального розміщення джерел фізичних полів // Вісн. ЖІТІ. — 1999. — № 9 (Технічні науки) — С. 248—253.
9. Власенко О. В., Снівак А. В., Яремчук С. І. Метод умовного градієнта для оптимального розташування джерел фізичних полів // Там же. — 1998. — № 7 (Технічні науки) — С. 248—253.
10. Яремчук С. І., Шаповалов Ю. О. Модифікація методу можливих напрямків для задачі оптимізації розміщення // Вісн. Хмельницького національного університету. — 2005. — № 5. Ч. 1. — Т. 2. — С. 146—151.
11. Яремчук С. І. Введення в математичні методи дослідження операції. — Житомир: ЖІТІ, 2002. — 300 с.

Поступила 14.10.08;
после доработки 18.02.09

ЯРЕМЧУК Светлана Ивановна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры программного обеспечения вычислительной техники Житомирского государственного технологического университета. В 1970 г. окончила Казахский госуниверситет (г. Алма-Аты). Область научных исследований — математическое моделирование, методы оптимизации.

РУДЮК Василий Васильевич, канд. техн. наук, доцент кафедры финансов Житомирского филиала Европейского университета. В 1967 г. окончил Воронежский инженерно-строительный ин-т. Область научных исследований — строительная механика.

ШАПОВАЛОВ Юрий Александрович, канд. техн.-мат. наук, доцент кафедры программного обеспечения вычислительной техники Житомирского государственного технологического университета. В 2002 г. окончил Житомирский инженерно-технологический ин-т. Область научных исследований — математическое моделирование, методы оптимизации.

РУДЮК Лидия Васильевна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры программного обеспечения вычислительной техники Житомирского государственного технологического университета. В 2001 г. окончила Житомирский инженерно-технологический ин-т. Область научных исследований — математическое моделирование.