



УДК 539.3

А. Ф. Верлань*, **Х. Эшматов****, доктора техн. наук,
Б. Х. Эшматов***, **Ш. П. Бобаназаров****, канд. техн. наук,
О. Р. Кучаров**, **Д. А. Ходжаев****

*Ин-т проблем моделирования
в энергетике им. Г. Е. Пухова НАН Украины
(Украина, 03164, Киев, ул. Генерала Наумова, 15,
тел. (044) 4241063, E-mail: averlan@i.com.ua),

**Ташкентский институт ирригации и мелиорации
(Республика Узбекистан, 100000, Ташкент, ул. Кары Ниязова, 39,
тел. (99871) 2371948, E-mail: heshmatov@mail.ru; bshp@mail.ru;
olimjon_kucharov@mail.ru; dhodjaev@mail.ru)

***Department of Mechanical and Aerospace Engineering, University at Buffalo
(318 Jarvis Hall, Buffalo, NY 14260-4400, USA, E-mail: ebkh@mail.ru)

Математическое моделирование нелинейных колебаний и исследование динамической устойчивости вязкоупругих прямоугольных пластин и цилиндрических панелей. I

(Статью представил чл.-кор. НАН Украины В. В. Васильев)

Приведены метод и алгоритм решения задач динамики вязкоупругих систем. С помощью предложенного метода решены задачи о нелинейных колебаниях и динамической устойчивости вязкоупругих прямоугольных пластин и цилиндрических панелей.

Наведено метод та алгоритм розв'язування задач динаміки в'язкопружних систем. З використанням запропонованого методу розв'язано задачі про нелінійні коливання та динамічну стійкість в'язкопружних прямокутних пластин і циліндричних панелей.

К л ю ч е в ы е с л о в а: прямоугольная пластина, цилиндрическая панель, теория Кирхгофа-Лява, теория Тимошенко, нелинейные колебания, динамическая устойчивость, флаттер.

Метод и алгоритм решения задачи для общего случая. Многие динамические задачи вязкоупругости сводятся к решению систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерры вида [1—16]

$$\ddot{x}_i + \lambda_i \dot{x}_i + \omega_i^2 x_i = X_i \left(t, x_1, \dots, x_n, \Psi_{11}, \dots, \Psi_{1n}, \Psi_{21}, \dots, \Psi_{2n}, \int_0^t \Phi_i(t, \tau, x_1(\tau), \dots, x_n(\tau), \Psi_{11}(\tau), \dots, \Psi_{1n}(\tau), \Psi_{21}(\tau), \dots, \Psi_{2n}(\tau)) d\tau \right),$$

$$\begin{aligned}
 \ddot{\Psi}_{1i} + \gamma_{1i}^2 \Psi_{1i} &= \Psi_{1i} \left(t, x_1, \dots, x_n, \Psi_{11}, \dots, \Psi_{1n}, \Psi_{21}, \dots, \Psi_{2n}, \right. \\
 &\left. \int_0^t \varphi_{1i}(t, \tau, x_1(\tau), \dots, x_n(\tau), \Psi_{11}(\tau), \dots, \Psi_{1n}(\tau), \Psi_{21}(\tau), \dots, \Psi_{2n}(\tau)) d\tau \right), \\
 \ddot{\Psi}_{2i} + \gamma_{2i}^2 \Psi_{2i} &= \Psi_{2i} \left(t, x_1, \dots, x_n, \Psi_{11}, \dots, \Psi_{1n}, \Psi_{21}, \dots, \Psi_{2n}, \right. \\
 &\left. \int_0^t \varphi_{2i}(t, \tau, x_1(\tau), \dots, x_n(\tau), \Psi_{11}(\tau), \dots, \Psi_{1n}(\tau), \Psi_{21}(\tau), \dots, \Psi_{2n}(\tau)) d\tau \right), \quad (1) \\
 x_i(0) &= x_{0i}, \quad \dot{x}_i(0) = \dot{x}_{0i}, \quad \Psi_{1i}(0) = \Psi_{01i}, \quad \dot{\Psi}_{1i}(0) = \dot{\Psi}_{01i}, \\
 \Psi_{2i}(0) &= \Psi_{02i}, \quad \dot{\Psi}_{2i}(0) = \dot{\Psi}_{02i}, \quad i=1, 2, \dots, n.
 \end{aligned}$$

Здесь $x_i(t), \Psi_{1i}(t), \Psi_{2i}(t)$ — искомые функции аргумента t ; $X_i, \Psi_{1i}, \Psi_{2i}, \varphi_i, \varphi_{1i}, \varphi_{2i}$ — заданные непрерывные функции в области изменения аргументов; $\lambda_i, \omega_i, \gamma_{1i}, \gamma_{2i}, i=1, 2, \dots, n$, — постоянные числа. Двукратным интегрированием системы (1) по t с учетом начальных условий получаем

$$\begin{aligned}
 x_i(t) &= x_{0i} + \dot{x}_{0i}t + \lambda_i x_{0i}t - \lambda_i \int_0^t x_i(\tau) d\tau - \omega_i^2 \int_0^t (t-\tau) x_i(\tau) d\tau + \\
 &+ \int_0^t (t-\tau) X_i \left(\tau, x_1(\tau), \dots, x_n(\tau), \Psi_{11}(\tau), \dots, \Psi_{1n}(\tau), \Psi_{21}(\tau), \dots, \Psi_{2n}(\tau), \right. \\
 &\left. \int_0^t \varphi_i(\tau, s, x_1(s), \dots, x_n(s), \Psi_{11}(s), \dots, \Psi_{1n}(s), \Psi_{21}(s), \dots, \Psi_{2n}(s)) ds \right) d\tau, \\
 \Psi_{1i}(t) &= \Psi_{01i} + \dot{\Psi}_{01i}t - \gamma_{1i}^2 \int_0^t (t-\tau) \Psi_{1i}(\tau) d\tau + \\
 &+ \int_0^t (t-\tau) \Psi_{1i} \left(\tau, x_1(\tau), \dots, x_n(\tau), \Psi_{11}(\tau), \dots, \Psi_{1n}(\tau), \Psi_{21}(\tau), \dots, \Psi_{2n}(\tau), \right. \\
 &\left. \int_0^t \varphi_{1i}(\tau, s, x_1(s), \dots, x_n(s), \Psi_{11}(s), \dots, \Psi_{1n}(s), \Psi_{21}(s), \dots, \Psi_{2n}(s)) ds \right) d\tau, \\
 \Psi_{2i}(t) &= \Psi_{02i} + \dot{\Psi}_{02i}t - \gamma_{2i}^2 \int_0^t (t-\tau) \Psi_{2i}(\tau) d\tau + \\
 &+ \int_0^t (t-\tau) \Psi_{2i} \left(\tau, x_1(\tau), \dots, x_n(\tau), \Psi_{11}(\tau), \dots, \Psi_{1n}(\tau), \Psi_{21}(\tau), \dots, \Psi_{2n}(\tau), \right.
 \end{aligned}$$

$$\int_0^t \varphi_{2i}(\tau, s, x_1(s), \dots, x_n(s), \psi_{11}(s), \dots, \psi_{1n}(s), \psi_{21}(s), \dots, \psi_{2n}(s)) ds \Big) d\tau, i=1, 2, \dots, n.$$

Для численного решения данной системы применим метод прямой замены входящих в систему интегралов конечной суммой по какой-либо квадратурной формуле [2,4]. Тогда для приближенного решения системы в узлах $t_m = (m-1) \Delta t, m=1, 2, 3, \dots$, где Δt — шаг интегрирования, получим следующую рекуррентную формулу:

$$\begin{aligned} x_{mi} &= \frac{1}{1+\lambda_i B_m} \left[x_{0i} + (\dot{x}_{0i} + \lambda_i x_{0i}) t_m - \lambda_i \sum_{j=0}^{m-1} B_j x_{ji} + \right. \\ &+ \sum_{j=0}^{m-1} B_j (t_m - t_j) \left\{ -\omega_i^2 x_{ji} + X_i \left(t_j, x_{j1}, \dots, x_{jn}, \Psi_{j11}, \dots, \Psi_{j1n}, \Psi_{j21}, \dots, \Psi_{j2n}, \right. \right. \\ &\left. \left. \sum_{k=1}^j C_k \varphi_i(t_j, t_k, x_{k1}, \dots, x_{kn}, \Psi_{k11}, \dots, \Psi_{k1n}, \Psi_{k21}, \dots, \Psi_{k2n}) \right) \right\} \Big], \\ \Psi_{m1i} &= \Psi_{01i} + \dot{\Psi}_{01i} t_m + \\ &+ \sum_{j=0}^{m-1} B_j (t_m - t_j) \left\{ -\gamma_{1i}^2 \Psi_{j1i} + \Psi_{1i} \left(t_j, x_{j1}, \dots, x_{jn}, \Psi_{j11}, \dots, \Psi_{j1n}, \Psi_{j21}, \dots, \Psi_{j2n}, \right. \right. \\ &\left. \left. \sum_{k=1}^j C_k \varphi_{1i}(t_j, t_k, x_{k1}, \dots, x_{kn}, \Psi_{k11}, \dots, \Psi_{k1n}, \Psi_{k21}, \dots, \Psi_{k2n}) \right) \right\}, \\ \Psi_{m2i} &= \Psi_{02i} + \dot{\Psi}_{02i} t_m + \\ &+ \sum_{j=0}^{m-1} B_j (t_m - t_j) \left\{ -\gamma_{2i}^2 \Psi_{j2i} + \Psi_{2i} \left(t_j, x_{j1}, \dots, x_{jn}, \Psi_{j11}, \dots, \Psi_{j1n}, \Psi_{j21}, \dots, \Psi_{j2n}, \right. \right. \\ &\left. \left. \sum_{k=1}^j C_k \varphi_{2i}(t_j, t_k, x_{k1}, \dots, x_{kn}, \Psi_{k11}, \dots, \Psi_{k1n}, \Psi_{k21}, \dots, \Psi_{k2n}) \right) \right\}, m=1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь B_j, C_k — числовые коэффициенты, независящие от выбора подынтегральных функций и принимающие различные значения в зависимости от использования квадратурных формул [4].

Тестовый пример. Рассмотрим систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений вида

$$\ddot{w} + \lambda \dot{w} + \omega_1^2 w = q + \gamma_1 \left[w - \int_0^t \Gamma_1(t-\tau) w(\tau) d\tau \right] +$$

$$\begin{aligned}
 & +\gamma_2 \left[\delta_1 \psi_1 + \delta_2 \psi_2 - \delta_1 \int_0^t \Gamma_2(t-\tau) \psi_1(\tau) d\tau - \right. \\
 & \left. - \delta_2 \int_0^t \Gamma_3(t-\tau) \psi_2(\tau) d\tau \right] + \gamma_3 \left[w^3 - \int_0^t \Gamma_4(t-\tau) w^3(\tau) d\tau \right], \\
 \dot{\psi}_1 + \omega_2^2 \psi_1 = & p_1 + \gamma_4 \left[\delta_3 \psi_1 + \delta_4 \psi_2 + \delta_5 w - \delta_3 \int_0^t \Gamma_2(t-\tau) \psi_1(\tau) d\tau - \right. \\
 & \left. - \delta_4 \int_0^t \Gamma_3(t-\tau) \psi_2(\tau) d\tau - \delta_5 \int_0^t \Gamma_1(t-\tau) w(\tau) d\tau \right], \quad (3) \\
 \dot{\psi}_2 + \omega_3^2 \psi_2 = & p_2 + \gamma_5 \left[\delta_6 \psi_1 + \delta_7 \psi_2 + \delta_8 w - \delta_6 \int_0^t \Gamma_2(t-\tau) \psi_1(\tau) d\tau - \right. \\
 & \left. - \delta_7 \int_0^t \Gamma_3(t-\tau) \psi_2(\tau) d\tau - \delta_8 \int_0^t \Gamma_1(t-\tau) w(\tau) d\tau \right]
 \end{aligned}$$

с начальными условиями

$$w(0)=1, \dot{w}(0)=-\beta_1, \psi_1(0)=1, \dot{\psi}_1(0)=-\beta_2, \psi_2(0)=1, \dot{\psi}_2(0)=-\beta_3,$$

где

$$\begin{aligned}
 \Gamma_1(t) &= A_1 e^{-\beta_1 t} t^{\alpha_1-1}, \Gamma_2(t) = A_2 e^{-\beta_2 t} t^{\alpha_2-1}, \Gamma_3(t) = A_3 e^{-\beta_3 t} t^{\alpha_3-1}, \\
 \Gamma_4(t) &= A_4 e^{-\beta_4 t} t^{\alpha_4-1}, \quad 0 < \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 < 1, \\
 q &= \left(\beta_1^2 - \lambda \beta_1 + \omega_1^2 - \gamma_1 + \frac{A_1}{\alpha_1} \gamma_1 t^{\alpha_1} \right) e^{-\beta_1 t} - \left(\delta_1 - \frac{A_2}{\alpha_2} \delta_1 t^{\alpha_2} \right) \gamma_2 e^{-\beta_2 t} - \\
 & - \left(\delta_2 - \frac{A_3}{\alpha_3} \delta_2 t^{\alpha_3} \right) \gamma_2 e^{-\beta_3 t} - \left(1 - \frac{A_4}{\alpha_4} t^{\alpha_4} \right) \gamma_3 e^{-\beta_4 t}, \\
 p_1 &= \left(\beta_2^2 + \omega_2^2 - \gamma_4 \delta_3 + \frac{A_2}{\alpha_2} \gamma_4 \delta_3 t^{\alpha_2} \right) e^{-\beta_2 t} - \left(\delta_4 - \frac{A_3}{\alpha_3} \delta_4 t^{\alpha_3} \right) \gamma_4 e^{-\beta_3 t} - \\
 & - \left(\delta_5 - \frac{A_1}{\alpha_1} \delta_5 t^{\alpha_1} \right) \gamma_4 e^{-\beta_1 t}, \\
 p_2 &= \left(\beta_3^2 + \omega_3^2 - \gamma_5 \delta_7 + \frac{A_3}{\alpha_3} \gamma_5 \delta_7 t^{\alpha_3} \right) e^{-\beta_3 t} - \left(\delta_6 - \frac{A_2}{\alpha_2} \delta_6 t^{\alpha_2} \right) \gamma_5 e^{-\beta_2 t} -
 \end{aligned}$$

$$-\left(\delta_8 - \frac{A_1}{\alpha_1} \delta_8 t^{\alpha_1}\right) \gamma_5 e^{-\beta_1 t}.$$

Система уравнений (3) имеет точное решение $w = e^{-\beta_1 t}$, $\psi_1 = e^{-\beta_2 t}$, $\psi_2 = e^{-\beta_3 t}$, удовлетворяющее начальным условиям. Числовые значения $w_n = w(t_n)$, $\psi_{1n} = \psi_{1n}(t_n)$, $\psi_{2n} = \psi_{2n}(t_n)$ в узлах $t_i = (i-1)h$, $i=1, 2, \dots$, аналогично (2) находим из рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} w_i &= \frac{1}{1+\lambda B_i} \left\{ 1 + (-\beta_1 + \lambda) t_i - \lambda \sum_{j=0}^{i-1} B_j w_j + \right. \\ &+ \sum_{j=0}^{i-1} B_j (t_i - t_j) \left[q_j + (\gamma_1 - \omega_1^2) w_j + \gamma_2 \delta_1 \psi_{1j} + \gamma_2 \delta_2 \psi_{2j} + \right. \\ &+ \gamma_3 w_j^3 - \sum_{s=0}^j \left(\frac{A_1}{\alpha_1} \gamma_1 C_{1s} e^{-\beta_1 t_s} w_{j-s} + \frac{A_2}{\alpha_2} \gamma_2 \delta_1 C_{2s} e^{-\beta_2 t_s} \psi_{1,j-s} + \right. \\ &\left. \left. + \frac{A_3}{\alpha_3} \gamma_2 \delta_2 C_{3s} e^{-\beta_3 t_s} \psi_{2,j-s} + \frac{A_4}{\alpha_4} \gamma_3 C_{4s} e^{-3\beta_1 t_s} w_{j-s}^3 \right) \right] \left. \right\}, \\ \psi_{1i} &= 1 - \beta_2 t_i + \sum_{j=0}^{i-1} B_j (t_i - t_j) \left[p_{1j} + (\gamma_4 \delta_3 - \omega_2^2) \psi_{1j} + \gamma_4 \delta_4 \psi_{2j} + \gamma_4 \delta_5 w_j - \right. \\ &- \sum_{s=0}^j \left(\frac{A_2}{\alpha_2} \gamma_4 \delta_3 C_{2s} e^{-\beta_2 t_s} \psi_{1,j-s} + \frac{A_3}{\alpha_3} \gamma_4 \delta_4 C_{3s} e^{-\beta_3 t_s} \psi_{2,j-s} + \frac{A_1}{\alpha_1} \gamma_4 \delta_5 C_{1s} e^{-\beta_1 t_s} w_{j-s} \right) \left. \right], \\ \psi_{2i} &= 1 - \beta_3 t_i + \sum_{j=0}^{i-1} B_j (t_i - t_j) \left[p_{2j} + (\gamma_5 \delta_7 - \omega_3^2) \psi_{2j} + \gamma_5 \delta_6 \psi_{1j} + \gamma_5 \delta_8 w_j - \right. \\ &- \sum_{s=0}^j \left(\frac{A_2}{\alpha_2} \gamma_5 \delta_6 C_{2s} e^{-\beta_2 t_s} \psi_{1,j-s} + \frac{A_3}{\alpha_3} \gamma_5 \delta_7 C_{3s} e^{-\beta_3 t_s} \psi_{2,j-s} + \frac{A_1}{\alpha_1} \gamma_5 \delta_8 C_{1s} e^{-\beta_1 t_s} w_{j-s} \right) \left. \right], \end{aligned} \quad (4)$$

где $B_j, C_{1s}, C_{2s}, C_{3s}, C_{4s}$ — коэффициенты квадратурной формулы; $B_0 = h/2$, $B_j = h$, $j=1, 2, \dots, i$;

$$\begin{aligned} C_{k0} &= \frac{h^{\alpha_k}}{2}, \quad C_{kj} = \frac{h^{\alpha_k} [j^{\alpha_k} - (j-1)^{\alpha_k}]}{2}, \\ C_{ks} &= \frac{h^{\alpha_k} [(s+1)^{\alpha_k} - (s-1)^{\alpha_k}]}{2}, \quad s=1, 2, \dots, j-1, \quad k=1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

В табл. 1 приведены результаты расчетов, выполненных согласно (4) в интервале от 0 до 1 с шагом $h = 0,001$. При этом использованы следующие исходные данные:

$$A_1 = 0,01; A_2 = 0,02; A_3 = 0,03; A_4 = 0,04; \beta_1 = 0,21; \beta_2 = 0,22; \beta_3 = 0,23;$$

$$\alpha_1 = 0,01; \alpha_2 = 0,02; \alpha_3 = 0,03; \alpha_4 = 0,04; \lambda = 1;$$

$$\omega_1 = 1,1; \omega_2 = 1,2; \omega_3 = 1,3; \delta_1 = 1,1; \delta_2 = 1,2; \delta_3 = 1,3; \delta_4 = 1,4; \delta_5 = 1,5;$$

$$\delta_6 = 1,6; \delta_7 = 1,7; \delta_8 = 1,8; \gamma_1 = 1,1; \gamma_2 = 1,2; \gamma_3 = 1,3; \gamma_4 = 1,4; \gamma_5 = 1,5.$$

Как видно из полученных результатов, погрешность Δ описанного метода совпадает с погрешностью использованных квадратурных формул и имеет тот же порядок малости относительно шага интерполяции.

Нелинейные колебания вязкоупругих прямоугольных пластин с сосредоточенными массами. Рассмотрим вязкоупругую прямоугольную пластину толщиной h со сторонами a и b , изготовленную из однородного изотропного материала с сосредоточенными массами M_p в точках (x_p, y_p) , $p = 1, 2, \dots, I$ (рис. 1). Связь между напряжениями $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ и деформациями $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ в срединной поверхности запишем в виде [17]

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2} (1-\Gamma^*) (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2} (1-\Gamma^*) (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x), \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} (1-\Gamma^*) \gamma_{xy}. \end{aligned} \quad (5)$$

Таблица 1

t	Точное решение	Приближенное решение	Δ
0,0	1,000000	1,000000	0
0,1	0,979219	0,979067	$0,2 \cdot 10^{-3}$
0,2	0,958870	0,958454	$0,4 \cdot 10^{-3}$
0,3	0,938943	0,937875	$1,1 \cdot 10^{-3}$
0,4	0,919431	0,917623	$1,8 \cdot 10^{-3}$
0,5	0,900325	0,897917	$2,4 \cdot 10^{-3}$
0,6	0,881615	0,878933	$2,7 \cdot 10^{-3}$
0,7	0,863294	0,860888	$2,4 \cdot 10^{-3}$
0,8	0,845354	0,843692	$1,7 \cdot 10^{-3}$
0,9	0,827787	0,826331	$1,5 \cdot 10^{-3}$
1,0	0,810584	0,809176	$1,4 \cdot 10^{-3}$

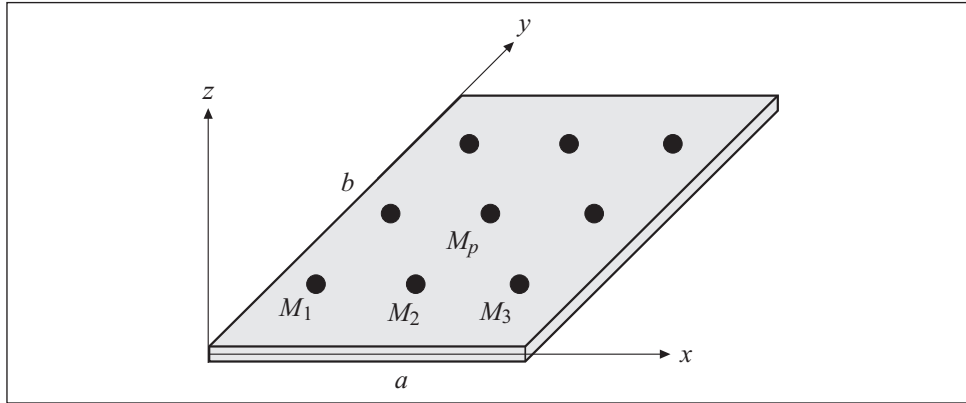


Рис. 1. Вязкоупругая прямоугольная пластина с сосредоточенными массами

Здесь E — модуль упругости; μ — коэффициент Пуассона; Γ^* — интегральный оператор с ядром релаксации $\Gamma(t)$,

$$\Gamma^* \varphi = \int_0^t \Gamma(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau.$$

Связь между деформациями $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ в срединной поверхности и перемещениями точек поверхности u, v, w по направлениям x, y, z представим в виде [17]

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (6)$$

Изгибающие и крутящие моменты M_x, M_y и H вязкоупругой прямоугольной пластины имеют следующий вид [4, 17]:

$$M_x = -D(1-\Gamma^*) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right], \quad M_y = -D(1-\Gamma^*) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right],$$

$$H = -D(1-\mu)(1-\Gamma^*) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (7)$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ — цилиндрическая жесткость пластины при изгибе.

При выводе уравнения движения элемента вязкоупругой прямоугольной пластины с сосредоточенными массами будем исходить из уравнений [17]

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{p_x}{h} - \frac{m}{h} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{p_y}{h} - \frac{m}{h} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0,$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma_x \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left(\tau_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{q}{h} - \frac{m}{h} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \\ & \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{2} L(w, w), \end{aligned} \quad (8)$$

где p_x, p_y, q — интенсивность заданных внешних нагрузок;

$$L(w, w) = 2 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right].$$

Влияние сосредоточенных масс на вязкоупругую пластину имеет инерционный характер и учитывается в (8) с помощью δ -функции Дирака [18]:

$$m(x, y) = \rho h + \sum_{p=1}^I M_p \delta(x - x_p) \delta(y - y_p), \quad (9)$$

где ρ — плотность материала пластины. Подставляя (5), (6) и (7) в (8) и вводя функцию напряжения в виде [17]

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad (10)$$

для определения прогиба $w = w(x, y, t)$ и функции напряжения $F = F(x, y, t)$ (без учета распространения упругих волн [17] и при $p_x = p_y = 0$) с учетом (9) получаем следующую систему уравнений типа Кармана:

$$\begin{aligned} & \frac{D}{h} (1 - \Gamma^*) \nabla^4 w = L(w, F) + \frac{q}{h} - \left[\rho + \frac{1}{h} \sum_{p=1}^I M_p \delta(x - x_p) \delta(y - y_p) \right] \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ & \frac{1}{E} \nabla^4 F = -\frac{1}{2} (1 - \Gamma^*) L(w, w), \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$L(w, F) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}.$$

Решение системы (11), удовлетворяющее граничным условиям задачи (края шарнирно оперты), будем искать в виде

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M w_{nm}(t) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}, \quad (12)$$

где $w_{nm} = w_{nm}(t)$ — неизвестные функции времени. Подставляя (12) в (11) и выполняя процедуру Бубнова—Галеркина, с учетом безразмерных величин аналогично [4] относительно неизвестных $w_{nm} = w_{nm}(t)$ получаем следующую систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M B_{klnm} \dot{w}_{nm} + \frac{1}{4} \left[\left(\frac{k}{\lambda} \right)^2 + l^2 \right]^2 (1 - \Gamma^*) w_{kl} = \frac{48\alpha_{kl}(1 - \mu^2)}{kl\pi^6} q - \\ - \frac{3(1 - \mu^2)}{\pi^2} \sum_{n,i,j=1}^N \sum_{m,r,s=1}^M a_{klnmirjs} w_{nm} (1 - \Gamma^*) w_{ir} w_{js}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$w_{kl}(0) = w_{0kl}, \quad \dot{w}_{kl}(0) = \dot{w}_{0kl}, \quad k = 1, 2, \dots, N; \quad l = 1, 2, \dots, M,$$

где

$$B_{klnm} = 1 + 4 \sum_{p=1}^l \frac{M_p}{M_0} \sin \frac{k\pi x_p}{a} \sin \frac{n\pi x_p}{a} \sin \frac{l\pi y_p}{b} \sin \frac{m\pi y_p}{b}$$

при $n = k$ и $m = l$; в иных случаях

$$B_{klnm} = 4 \sum_{p=1}^l \frac{M_p}{M_0} \sin \frac{k\pi x_p}{a} \sin \frac{n\pi x_p}{a} \sin \frac{l\pi y_p}{b} \sin \frac{m\pi y_p}{b};$$

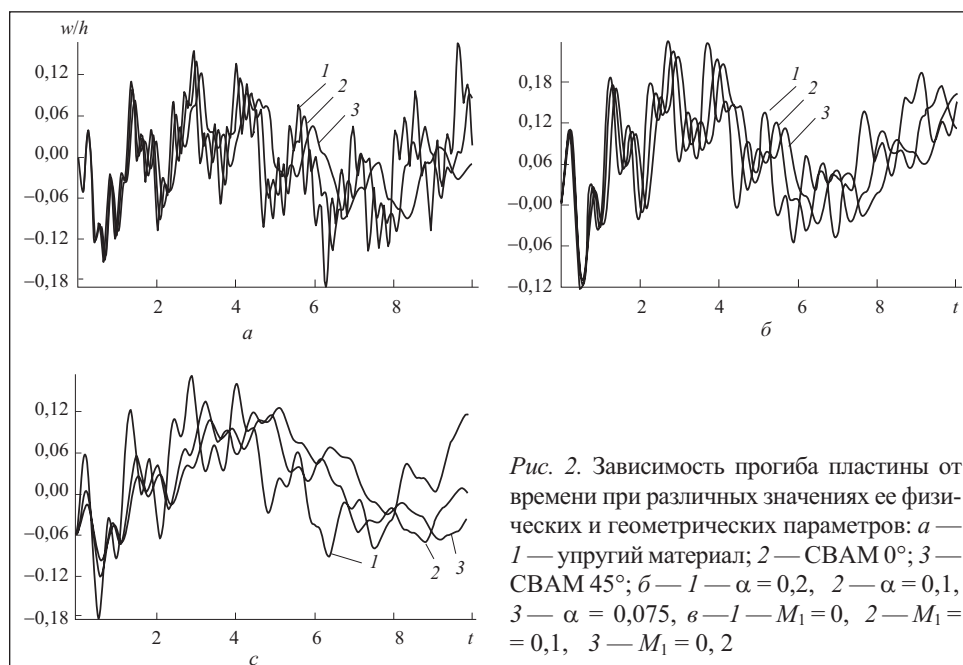
$M_0 = ab\rho h$ — масса всей пластины; $\lambda = a/b$; коэффициент a_{kl} равен единице, если k и l нечетные, и он равен нулю, если k или l четное; коэффициент $a_{klnmirjs}$ определяется из [4].

Полученную систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений (13) проинтегрируем с помощью численного метода, основанного на использовании квадратурных формул [4]. Далее в качестве ядра релаксации $\Gamma(t)$ в расчетах будем использовать ядро Колтунова—Ржаницына [19]:

$$\Gamma(t) = A e^{-\beta t} t^{\alpha-1}, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (14)$$

В работе [20] исследованы релаксационные свойства конкретных материалов: стеклопластиков КАСТ-В, ЭДФ, СВМ и текстолита с различным направлением волокон для этого ядра релаксации. Параметры A , β и α и модуль упругости E найдены методом логарифмических сдвигов [19].

На рис. 2, а, представлена зависимость прогиба в центре упругой (кривая 1) и вязкоупругих пластин (кривые 2, 3) от времени. Видно, что



вязкоупругие свойства материала пластины приводят к затуханию колебательного процесса. В начальный период решения упругой и вязкоупругой задач мало различаются, однако с течением времени вязкоупругие свойства начинают оказывать существенное влияние.

На рис. 2, б, показано влияние реологического параметра α на колебательный процесс вязкоупругой пластины. Анализ полученных результатов свидетельствует о том, что уменьшение параметра α приводит к сдвигу фазы вправо и, следовательно, к уменьшению частоты колебаний. Из рис. 2, б, также видно, что реологический параметр α играет важную роль по сравнению с реологическими параметрами A и β . Так, результаты вычислений, полученные при $\alpha = 0,2$ и $\alpha = 0,075$, $t = 9$, различаются более чем на 30 %, и с течением времени эти различия продолжают возрастать. Согласно результатам исследования увеличение параметра A и уменьшение параметра α приводит к уменьшению амплитуды и соответственно частоты колебаний.

Влияние сосредоточенной массы M в центре пластины на колебательный процесс показано на рис. 2, в, из которого видно, что увеличение значения M приводит к уменьшению амплитуды колебаний.

Параметрические колебания вязкоупругих прямоугольных пластин с сосредоточенными массами. Пусть пластина подвергается динамичес-

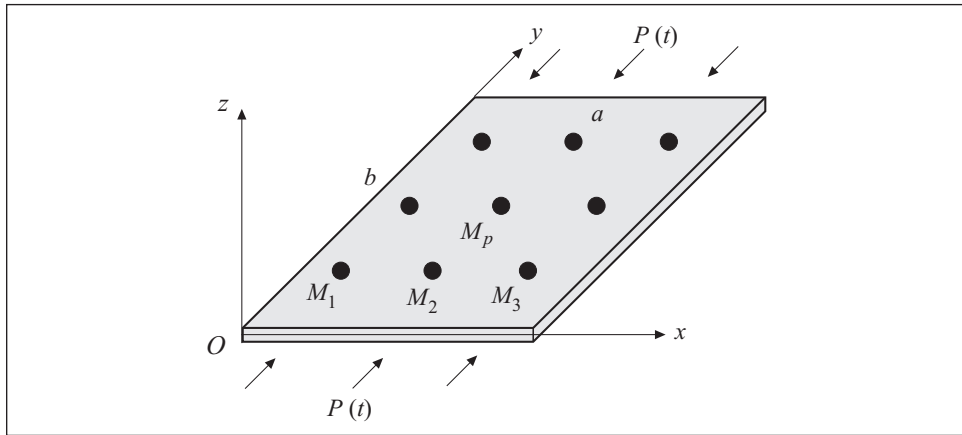


Рис. 3. Вязкоупругая прямоугольная пластина, подвергнутая периодической нагрузке по направлению Oy

кому нагружению вдоль стороны b периодической нагрузкой $P(t) = P_0 + P_1 \cos \theta t$, где $P_0, P_1 = \text{const}$; θ — частота внешней периодической нагрузки (рис. 3). Математическая модель данной задачи аналогично задаче о поперечном прогибе и функциях напряжений описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} & \frac{D}{h} (1 - \Gamma^*) \nabla^4 w + P(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \\ & + \left[\rho + \frac{1}{h} \sum_{p=1}^I M_p \delta(x - x_p) \delta(y - y_p) \right] \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{q}{h} + L(w, F), \\ & \frac{1}{E} \nabla^4 F = -\frac{1}{2} (1 - \Gamma^*) L(w, w). \end{aligned} \quad (15)$$

Полагая, что пластина шарнирно закреплена по краям, решение уравнения (15), удовлетворяющее граничным условиям задачи, будем искать на основе многочленной аппроксимации вида (12). Подставляя (12) во второе уравнение (15) и приравнявая в обеих частях этого уравнения коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях, находим функцию усилий:

$$\begin{aligned} F(x, y, t) = E \sum_{i,j=1}^N \sum_{r,s=1}^M (1 - \Gamma^*) w_{ir} w_{js} & \left[C_{irjs} \cos \frac{(i+j)\pi x}{a} \cos \frac{(r+s)\pi y}{b} + \right. \\ & \left. + A_{irjs} \cos \frac{(i+j)\pi x}{a} \cos \frac{(r-s)\pi y}{b} + D_{irjs} \cos \frac{(i-j)\pi x}{a} \cos \frac{(r+s)\pi y}{b} + \right. \\ & \left. + B_{irjs} \cos \frac{(i-j)\pi x}{a} \cos \frac{(r-s)\pi y}{b} \right] \end{aligned}$$

$$+ B_{irjs} \cos \frac{(i-j)\pi x}{a} \cos \frac{(r-s)\pi y}{b} \left] - \frac{P(t)y^2}{2}, \quad (16)$$

где коэффициенты $C_{irjs}, A_{irjs}, D_{irjs}, B_{irjs}$ определяются из [4]. Подставляя (12) и (16) в первое уравнение (15) и выполняя процедуру Бубнова—Галеркина, используя при этом свойства функции Дирака [18] и вводя безразмерные величины, для определения неизвестных $w_{kl} = w_{kl}(t)$ получаем следующую систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений:

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M B_{klnm} \dot{w}_{nm} + p_{kl}^2 (1 - 2\mu_{kl} \cos \theta t) w_{kl} = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{k}{\lambda} \right)^2 + l^2 \right]^2 \Gamma^* w_{kl} + \frac{48\alpha_{kl}(1-\mu^2)}{kl\pi^6} q - \frac{3(1-\mu^2)}{\pi^2} \sum_{n,i,j=1}^N \sum_{m,r,s=1}^M a_{klnmirjs} w_{nm} (1 - \Gamma^*) w_{ir} w_{js}, \quad (17)$$

$$w_{kl}(0) = w_{0kl}, \quad \dot{w}_{kl}(0) = \dot{w}_{0kl}, \quad k = 1, 2, \dots, N; \quad l = 1, 2, \dots, M,$$

где

$$p_{kl}^2 = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{k}{\lambda} \right)^2 + l^2 \right]^2 \left\{ 1 - \frac{4 \left(\frac{k}{\lambda} \right)^2 P_0}{\left[\left(\frac{k}{\lambda} \right)^2 + l^2 \right]^2 P_{kp}} \right\};$$

$$\mu_{kl} = \frac{\left(\frac{k}{\lambda} \right)^2 P_1}{2p_{kl}^2 P_{kp}}; \quad P_{kp} = \frac{\pi^2}{3(1-\mu^2)} E \left(\frac{h}{b} \right)^2.$$

Рассмотрим частный случай этой задачи. В линейной постановке для вязкоупругих квадратных пластин с сосредоточенной в центре массой соответствующая система уравнений (17) имеет следующий вид:

$$(1 + 4M) \dot{w} + p^2 (1 - 2\mu \cos \theta t) w = \int_0^t \Gamma(t - \tau) w(\tau) d\tau, \quad (18)$$

где $p = \sqrt{1 - \frac{P_0}{P_{kp}}}$. Для удобства записи в уравнении (18) опущены индексы у коэффициентов p_{kl}, μ_{kl} и w_{kl} .

Уравнение (18) без правой части, без учета вязкоупругих свойств ($A = 0$) и без учета сосредоточенной массы ($M = 0$) представляет собой известное уравнение Матье [21]. Одно из наиболее интересных свойств этого уравнения заключается в том, что при некоторых соотношениях между его коэффициентами оно имеет неограниченно возрастающие решения [21]. Значения параметров уравнения, которым соответствуют такие решения, заполняют целые области на плоскости параметров $\theta/2p \sim \mu$. Эти области называются областями динамической неустойчивости (ОДН). Определение таких областей составляет одну из важнейших задач теории вязкоупругости.

Согласно [21] определение границ ОДН сводится к отысканию условий, при которых заданное интегро-дифференциальное уравнение (18) имеет периодические решения с периодами T и $2T$ ($T = 2\pi/\theta$). Периодическое решение уравнения (18) с периодом $2T$ находим в виде

$$w(t) = a \cos \frac{\theta t}{2} + b \sin \frac{\theta t}{2}. \quad (19)$$

Подставляя (19) в (18) и приравнявая коэффициенты при $\cos \frac{\theta t}{2}$ и $\sin \frac{\theta t}{2}$, для определения a и b аналогично [22] получаем следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \left[-(1+4M) \left(\frac{\theta}{2p} \right)^2 + 1 - \mu - \frac{1}{p^2} \Gamma_c \right] a + \frac{1}{p^2} \Gamma_s b &= 0, \\ -\frac{1}{p^2} \Gamma_s a + \left[-(1+4M) \left(\frac{\theta}{2p} \right)^2 + 1 + \mu - \frac{1}{p^2} \Gamma_c \right] b &= 0, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\Gamma_c = \int_0^{\infty} \Gamma(\tau) \cos \frac{\theta \tau}{2} d\tau; \quad \Gamma_s = \int_0^{\infty} \Gamma(\tau) \sin \frac{\theta \tau}{2} d\tau; \quad 0 < \Gamma_c, \Gamma_s < 1.$$

Известно, что система однородных алгебраических уравнений (20) имеет отличные от нуля решения только тогда, когда определитель, составленный из коэффициентов этой системы, равен нулю. Приравняв нулю определитель системы (20), для определения главной ОДН получаем

$$\frac{\theta}{2p} = \frac{1}{\sqrt{1+4M}} \sqrt{1 - p^{-2} \Gamma_c \pm \sqrt{\mu^2 - p^{-4} \Gamma_s^2}}.$$

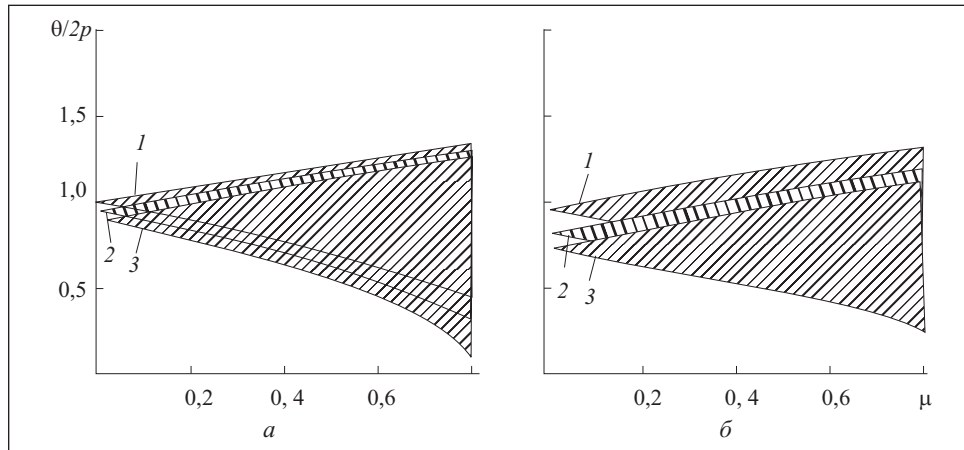


Рис. 4. Влияние на ОДН реологического параметра A (a) и сосредоточенной массы (b): a — 1 — $A = 0$; 2 — $A = 0,05$; 3 — $A = 0,1$; b — 1 — $M = 0$; 2 — $M = 0,1$; 3 — $M = 0,2$

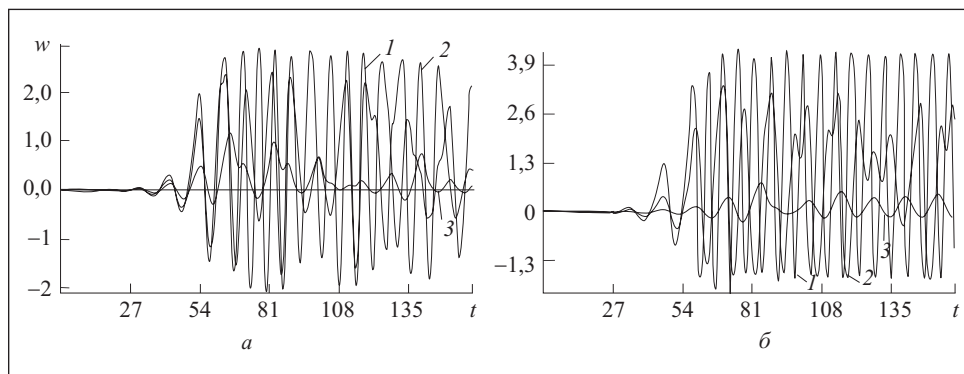


Рис. 5. Зависимость прогиба от времени срединной точки упругой (1) и вязкоупругих (2, 3) пластин (a) и влияние сосредоточенной массы на колебательный процесс (b): a — 1 — $A = 0$; 2 — $A = 0,01$; 3 — $A = 0,05$; b — 1 — $M_1 = 0$; 2 — $M_1 = 0,1$; 3 — $M_1 = 0,2$

В частности, из этой формулы для упругих систем без учета сосредоточенных масс получаем известную формулу В.В.Болотина [21]

$$\frac{\theta}{2p} = \sqrt{1 \pm \mu},$$

а для вязкоупругих систем без учета сосредоточенных масс — формулу В. И. Матяша [22]:

$$\frac{\theta}{2p} = \sqrt{1 - p^{-2}\Gamma_c \pm \sqrt{\mu^2 - p^{-4}\Gamma_s^2}}.$$

На рис. 4, а, показаны главные области динамической неустойчивости упругих и вязкоупругих пластин, построенные для различных значений реологического параметра A . Как видим, с увеличением этого параметра ОДН пластины смещается вниз. Аналогично смещение вниз происходит под влиянием сосредоточенной массы на ОДН вязкоупругой пластины (рис. 4, б).

Интегрирование уравнений (17), полученных на основе многочленной аппроксимации прогиба с учетом различных факторов, выполнялось с помощью численного метода, предложенного в работах [2, 4]. В качестве ядра использовано ядро Колтунова—Ржаницына (14). Результаты вычислений, выполненных с помощью ЭВМ на языке Delphi, графически представлены на рис. 5, из которого видно, что во всех рассмотренных случаях в начальной стадии колебания происходят вблизи начального равновесного состояния. С течением времени амплитуда медленно возрастает и, доходя до уровня толщины пластины, начинается устойчивый колебательный процесс. На рис. 5, б, показано, что увеличение сосредоточенной массы приводит к уменьшению амплитуды и частоты колебаний.

(Продолжение статьи см. в следующем номере).

A method and algorithm are presented to solve the problems of dynamics of viscoelastic systems. The proposed method has helped to solve the problems on nonlinear oscillations and dynamic stability of viscoelastic rectangular plates and cylindrical panels.

1. Карнаухов В. Г., Сенченков И. К., Гуменюк Б. П. Термомеханическое поведение вязкоупругих тел при гармоническом нагружении. — Киев : Наук. думка, 1985. — 288 с.
2. Бадалов Ф. Б., Эшматов Х., Юсупов М. О некоторых методах решения систем интегродифференциальных уравнений, встречающихся в задачах вязкоупругости // ПММ. — 1987. — **51**, № 5. — С. 867—871.
3. Бадалов Ф. Б., Эшматов Х. Краткий обзор и сравнение интегральных методов математического моделирования в задачах наследственной механики твердых тел // Электрон. моделирование. — 1989. — **11**, № 2. — С. 81—90.
4. Эшматов Х. Интегральный метод математического моделирования задач динамики вязкоупругих систем // Автореф. дис... д-ра техн. наук. — Киев, 1991. — 37с.
5. Верлань А. Ф., Эшматов Х., Худаяров Б. А., Бобаназаров Ш.П. Численное решение нелинейных задач динамики вязкоупругих систем // Электрон. моделирование. — 2004. — **26**, № 3. — С. 3—14.
6. Potapov V. D. Stability of Elastic and Viscoelastic Plates in a Gas Flow Taking into Account Shear Strains // J. of Sound and Vibration. — 2004. — Vol. 276. — P. 615—626.
7. Верлань А. Ф., Эшматов Б. Х. Математическое моделирование колебаний ортотропных вязкоупругих пластин с учетом геометрической нелинейности // Электрон. моделирование. — 2005. — **27**, № 4. — С. 3—17.
8. Eshmatov B. Kh. Nonlinear Vibration Analysis of Viscoelastic Plates Based on a Refined Timoshenko Theory // Intern. Applied Mechanics. — 2006. — Vol. 42, № 5. — P. 596—605.

9. *Eshmatov B. Kh., Khodjaev D. A.* Non-linear Vibration and Dynamic Stability of a Viscoelastic Cylindrical Panel with Concentrated Mass // *Acta Mechanica*. — 2007. — № 1-4 (190). — P. 165—183.
10. *Ходжаев Д. А., Эшматов Б. Х.* Нелинейные колебания вязкоупругой пластины с сосредоточенными массами // *Прикладная механика и техническая физика*. — 2007. — № 6 (48). — С. 158—169 (Новосибирск).
11. *Eshmatov B. Kh., Mukherjee S.* Nonlinear Vibrations of Viscoelastic Composite Cylindrical Panels // *J. of Vibration and Acoustics*. — 2007. — № 3 (129). — P. 285—296.
12. *Eshmatov B. Kh.* Nonlinear Vibrations and Dynamic Stability of Viscoelastic Orthotropic Rectangular Plates // *J. of Sound and Vibration*. — 2007. — № 300. — P. 709—726.
13. *Eshmatov B. Kh.* Dynamic Stability of Viscoelastic Circular Cylindrical Shells Taking into Account Shear Deformation and Rotatory Inertia // *Applied Mathematics and Mechanics*. — 2007. — № 28 (10). — P. 1319—1330.
14. *Eshmatov B. Kh.* Nonlinear Vibrations of Viscoelastic Cylindrical Shells Taking Into Account Shear Deformation and Rotatory Inertia // *J. of Nonlinear Dynamics*. — 2007. — № 2. — P. 43—53.
15. *Eshmatov B. Kh., Khodjaev D. A.* Dynamic Stability of a Viscoelastic Plate with Concentrated Masses // *Intern. Applied Mechanics*. — 2008. — № 2 (44). — P. 208—216 (USA).
16. *Eshmatov B. Kh., Khodjaev D. A.* Dynamic Stability of a Viscoelastic Cylindrical Panel with Concentrated Masses // *Strength of Materials*. — 2008. — № 4 (40). — P. 491—502 (USA).
17. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. — М.: Наука, 1972. — 432 с.
18. *Amba-Rao C.L.* On the Vibration of a Rectangular Plate Carrying a Concentrated Mass // *J. Applied Mechanics*. — 1964. — Vol. 31. — P. 550—551.
19. *Колтунов М.А.* К вопросу выбора ядер при решении задач с учетом ползучести и релаксации // *Механика полимеров*. — 1966. — №4. — С. 483—497.
20. *Тюнеева И.М.* Релаксационные характеристики стеклопластиков // Там же. — 1970. — №3. — С. 560—562.
21. *Болотин В.В.* Динамическая устойчивость упругих систем. — М.: Гостехиздат, 1956. — 600 с.
22. *Матяш В.И.* Параметрические колебания вязкоупругой цилиндрической оболочки // *Механика полимеров*. — 1974. — № 3. — С. 479—483.

Поступила 16.12.08;
после доработки 08.04.09

ВЕРЛАНЬ Анатолий Федорович, д-р техн. наук, зав. отделом Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины. В 1956 г. окончил Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований — методы математического и компьютерного моделирования в задачах исследования динамических систем, электрических цепей; численные методы и алгоритмы решения интегральных уравнений.

ЭШМАТОВ Хасан, д-р техн. наук, зав. кафедрой «Информационных технологий» Ташкентского ин-та ирригации и мелиорации. В 1969 г. окончил Самаркандский госуниверситет. Область научных исследований — математическое моделирование.

ЭШМАТОВ Бахтиёр Хасанович, канд. физ.-мат. наук, проф. факультета механики и космической техники университета Буффало, США. В 1997 г. окончил Ташкентский госуниверситет. Область научных исследований — математическое моделирование.

БОБАНАЗАРОВ Шароф Пулатович, канд. техн. наук, доцент кафедры «Информационных технологий» Ташкентского ин-та ирригации и мелиорации. В 1992 г. окончил Ташкентский госуниверситет. Область научных исследований — математическое моделирование.

КУЧАРОВ Олимжон Рузимуратович, ст. препод. кафедры «Высшей математики» Ташкентского ин-та ирригации и мелиорации. В 1994 г. окончил Ташкентский госуниверситет. Область научных исследований — математическое моделирование.

ХОДЖАЕВ Дадахан Акмарханович, ассистент кафедры «Информационных технологий» Ташкентского ин-та ирригации и мелиорации. В 1996 г. окончил Ташкентский госуниверситет. Область научных исследований — механика деформируемого твердого тела.