
УДК 519.711

Е. А. Башков, д-р техн. наук, **В. С. Бабков**, аспирант
Донецкий национальный технический университет
(Украина, 83001, Донецк, ул. Артема, 58,
тел. (062) 3010856, E-mail: victor.babkov@gmail.com)

Исследование возможностей применения метода радиальных симметричных функций и его модификаций для построения поверхностных компьютерных моделей в медицинской практике

Выполнен сравнительный анализ характеристик модификаций метода радиальных симметричных функций (RBF) применительно к построению 3D-моделей органов по результатам 2D- и 3D-сканирования. Описана схема построения модели на основе метода компактной RBF и приведены результаты моделирования на примере модели позвонка и головного мозга.

Виконано порівняльний аналіз характеристик модифікацій методу радіальних симетричних функцій (RBF) відносно побудови 3D-моделей органів за результатами 2D- і 3D-сканування. Описано схему побудови моделі на основі методу компактної RBF і наведено результати моделювання на прикладі моделі хребця і головного мозку.

К л ю ч е в ы е с л о в а: проекционные данные, поверхность, RBF, реконструкция, 3D-модель.

Постановка задачи. Во многих областях науки и техники существует практическая необходимость в построении трехмерных компьютерных моделей реальных объектов, например при исследовании органов человека в медицине, изучении внутренней структуры объектов при неразрушающем контроле, в реконструктивной археологии, криминалистике, при создании систем виртуальной реальности — имитаторов и тренажеров.

Исходными данными для реконструкции таких моделей является информация, полученная в результате сканирования реального объекта с использованием одной из известных технологий 2D- или 3D-сканирования: рентгеновская компьютерная томография, магниторезонансная томография, ультразвуковое исследование, лазерное трехмерное сканирование и др. [1]. Результат сканирования представлен преимущественно в виде точечного описания объекта (поверхности и внутренней структуры). Результатом реконструкции на основе указанного представления является

трехмерная модель в полигональном, поверхностном или ином виде. Поскольку в современных средствах сканирования объектов число точек на выходе составляет от 10^4 до 10^6 , полигональное представление становится нерациональным. Поэтому исследователи в первую очередь уделяют внимание получению моделей на основе поверхностного представления, учитывая то, что оно, по оценкам экспертов, позволяет получать более реалистичные модели и легко устранять такие дефекты как неполнота входных данных, их повреждения и др. [2].

Существует множество методов получения подобных моделей. Проведем сравнительный анализ существующих методов и оценим возможность их применения в составе программной системы для моделирования объектов в медицинской практике [3].

Построение модели объекта в трехмерном пространстве на основе проекционных данных. Модели объектов в медицинской практике имеют следующие особенности [3]:

значительное число проекционных точек (10^4 — 10^6), что обусловлено особенностями получения проекционных данных как совокупности точек контуров объектов на 2D-проекциях;

повышенные требования к точности модели, что связано с необходимостью учитывать мелкие множественные артефакты;

возможность построения модели в реальном времени, что связано с необходимостью учитывать динамику моделируемого объекта (например, в системах визуализации хирургических операций и др. [4]).

Для построения указанных моделей используются сплайны, классическая триангуляция, α -поверхности и другие методы(средства) интерполяции. Методы моделирования на основе сплайнового представления рассмотрены в работе [5], а в работе [6] установлено, что наиболее эффективным средством моделирования поверхностей в трехмерном пространстве является метод радиальных симметричных функций (RBF).

Проанализируем возможность применения различных модификаций метода RBF применительно к объектам, имеющим перечисленные выше особенности (большое число проекционных точек, высокая точность, реальное время).

Согласно методу RBF объект (поверхность) представляется в следующем виде:

$$f(x) = \sum_{i=1}^N \lambda_i \varphi(x, c_i), \quad (1)$$

где $\lambda_{1...N}$ — коэффициенты; φ — RBF, вычисленная для произвольной точки пространства; $c_{1...N}$ — заданные точки поверхности (проекционные данные).

Определяем λ_i как вектор-столбец, являющийся решением системы уравнений вида

$$\begin{bmatrix} \varphi(c_1, c_1) & \varphi(c_1, c_2) & \cdots & \varphi(c_1, c_N) \\ \varphi(c_2, c_1) & \varphi(c_2, c_2) & \cdots & \varphi(c_2, c_N) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi(c_N, c_1) & \varphi(c_N, c_2) & \cdots & \varphi(c_N, c_N) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdots \\ \lambda_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \cdots \\ h_N \end{bmatrix},$$

где h_i — значение интерполянта в заданных точках поверхности.

В методах получения 2D-моделей, например в методе моделирования рельефа по изолиниям [7], значения вектора-столбца свободных членов — это значения, которые принимает искомая модель в заданных точках множества

$$P = \{c_i = (x_i, y_i) |_{i=1}^N\} \subset R^2.$$

В случае трехмерного пространства множество P принимает вид

$$P = \{c_i = (x_i, y_i, z_i) |_{i=1}^N\} \subset R^3.$$

В этом случае модель объекта (поверхность) задается неявно в виде функции, принимающей некоторое установленное значение в каждой точке поверхности: $F(c) = \text{const}$. В качестве RBF можно использовать различные функции, значения которых определяются расстоянием между двумя точками пространства [8], где $r = \|x - c\|$ — радиус функции RBF (табл. 1).

Таким образом, процесс построения модели объекта заключается в следующем:

расчет матрицы значений функции RBF для заданных точек;

Таблица 1

Тип функции	Вид функции
Полигармонический сплайн	$\varphi(r) = r ^n$ $\varphi(r) = r ^n \ln r $
Мультиквадрик	$\varphi(r) = \sqrt{1 + (\varepsilon r)^2}$
Инверсный мультиквадрик	$\varphi(r) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\varepsilon r)^2}}$
Инверсный квадратик	$\varphi(r) = \frac{1}{1 + (\varepsilon r)^2}$

решение системы линейных уравнений для определения коэффициентов λ ;

расчет функции (1) для искомым точек пространства и выделение множества точек, для которых $f(x) = \text{const}$ с учетом точности ε .

Недостатком прямого метода RBF является значительная вычислительная сложность, обусловленная необходимостью решения системы большой размерности и сохранения больших объемов данных. Обобщенные характеристики временной и пространственной сложности данного алгоритма приведены в табл. 2.

Предложенное в работе [9] уменьшение сложности вычислений достигнуто в результате уменьшения числа проекционных точек, т. е. отбрасывания точек, не влияющих на результат. Для отбрасывания использован итерационный алгоритм [9]. В соответствии с алгоритмом формируется множество точек, при использовании которых ошибка в определении поверхности не превышает заданный параметр точности ε .

В зависимости от выбранного параметра точности ε и набора входных данных наблюдается различная степень уменьшения сложности вычислений. Согласно экспериментальным данным [9] степень уменьшения находится в пределах 0,14—0,92, при этом любая закономерность отсутствует.

Общее уменьшение времени обусловлено тем, что при работе итерационного алгоритма и незначительном числе проекционных точек на каждом шаге решается система маленькой размерности. Таким образом, данный алгоритм не является универсальным, так как не обеспечивает гарантированного уменьшения вычислительных затрат для произвольных объектов.

Усовершенствованный метод, предложенный в [10], предполагает уменьшение числа операций в результате использования так называемых компактных RBF. Такие RBF обладают следующим свойством: функция меньше или равна единице в окрестности исходной точки и больше единицы при удалении от нее. Вычисление данной функции до решения системы позволяет значительно уменьшить ее размер отбрасыванием точек, удаленных от заданной и минимально влияющих на результат. В зависимости от пространственного расположения заданных точек наблюдается различная степень уменьшения вычислительной сложности, а пре-

Таблица 2

Этап обработки	Алгоритм построения модели методом RBF			
	обычным	с минимизацией	компактным	быстрым
Расчет RBF	$O(n^2)$	$O(n^2)$	$O(n \log n)$	$O(n^2)$
Решение системы	$O(n^2)$	$O(n^2)$	$O(n^{1,2...1,5})$	$O(n \log n)$
Расчет поверхности	$O(mn)$	$O(mn)$	$O(m \log n)$	$O(m + n \log n)$

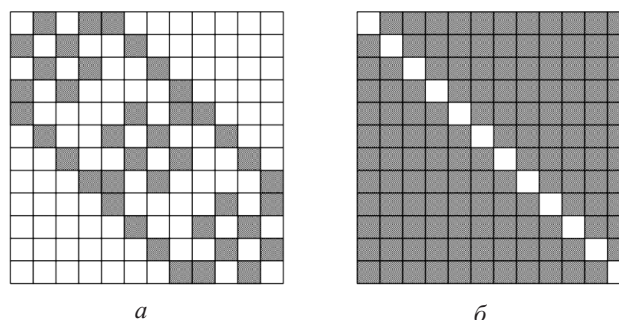


Рис. 1. Результирующая матрица (а) и матрица, полученная методом RBF (б)

обладание в матрице системы нулевых элементов позволяет сохранять ее в более компактной форме.

На этапе построения матрицы и вычисления поверхности удобной и эффективной структурой для организации хранения данных является k -дерево [11]. Как показано на рис. 1, результирующая матрица является сильно разреженной по сравнению с матрицей, полученной с помощью обычного метода RBF. Это свидетельствует о том, что в данном случае можно использовать ускоренные методы решения систем [12].

Следовательно, способом сокращения вычислительных затрат при построении моделей методом компактной RBF является применение эффективной древовидной структуры данных и использование методов ускоренного решения систем с разреженными матрицами.

Еще один известный метод быстрого вычисления множества потенциалов был адаптирован для решения данной задачи в работе [13]. Этот метод также позволяет значительно снизить временные и пространственные характеристики алгоритма за счет использования древовидных структур данных и аппроксимации модели с помощью, например, разложения в ряд Тейлора.

Суть метода быстрого вычисления состоит в следующем. Пространство, в котором расположены заданные точки, иерархически делится на элементарные подпространства, в результате чего образуется дерево. Для любого подпространства на последнем уровне определяется два множества подпространств: приближенное и отдаленное. Приближенное содержит подпространства, которые расположены на том же уровне, что и искомое, и имеют тот же родительский узел. Все другие подпространства составляют отдаленное множество.

Процесс формирования модели поверхности с помощью функции вида (1) делится на два этапа: этап подготовки, выполняемый один раз, и этап вычисления, повторяемый для каждой искомой точки.

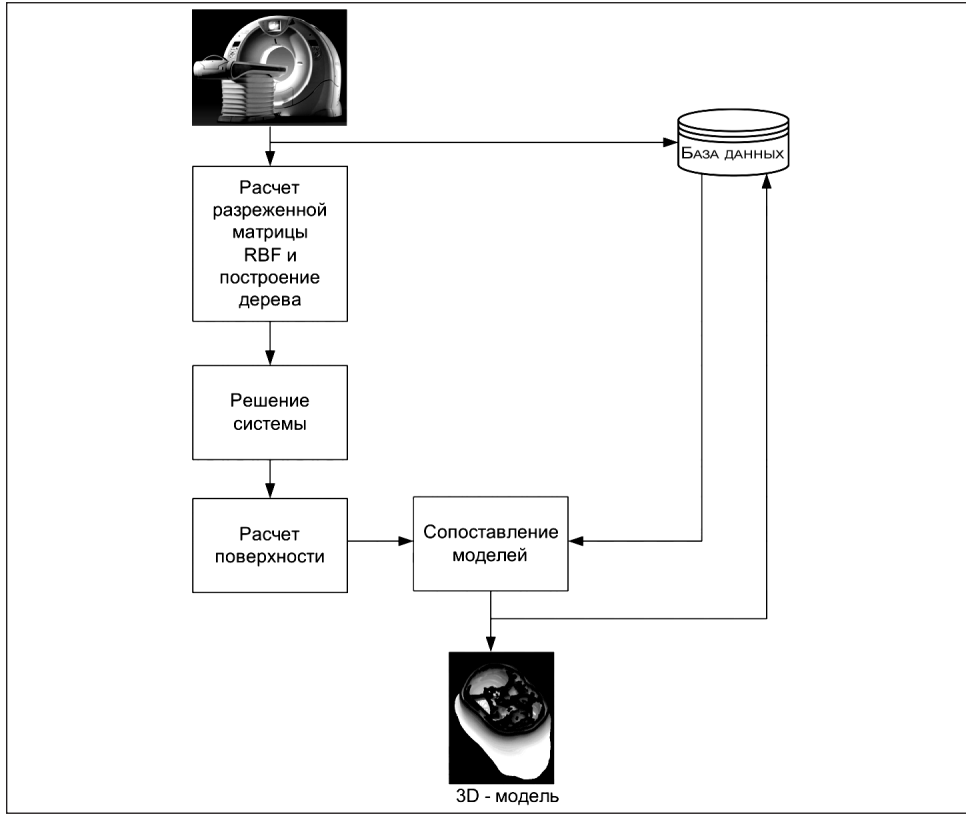


Рис. 2. Схема построения 3D-модели

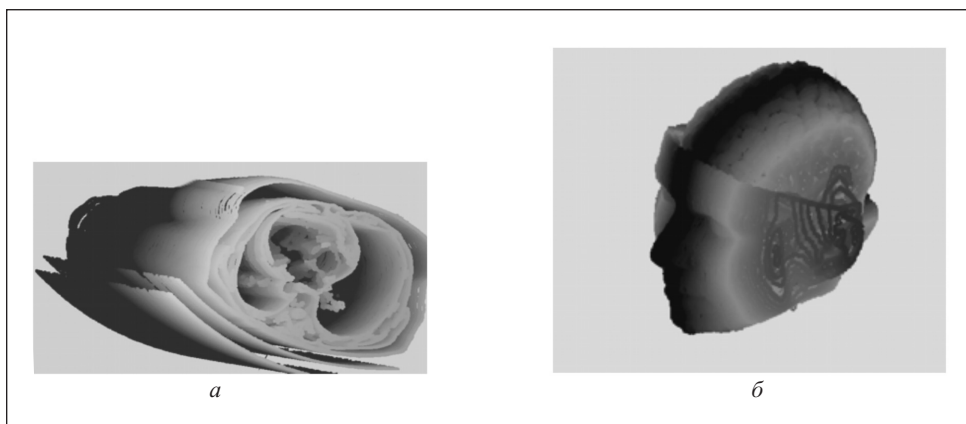


Рис. 3. Модели, полученные в результате применения схемы (см. рис. 2): а — позвонок; б — голова без крышки черепной коробки

На этапе вычисления часть функции (1), которая определяется точками из приближенных подпространств, вычисляется непосредственно, а часть, которая определяется точками в отдаленных подпространствах — с помощью аппроксимации. В зависимости от вида используемой RBF применяются различные средства аппроксимации [13]. Однако метод RBF не является универсальным, и выбор различных функций требует различных подходов к аппроксимации.

Теоретические оценки рассмотренных методов, полученные в результате анализа соответствующих алгоритмов и экспериментальных исследований на наборах тестовых объектов [14], приведены в табл. 2. Анализируя данные табл. 2, можно сделать следующие выводы о том, что наименьшую вычислительную сложность на этапе расчета матрицы значений функции имеет метод компактной RBF, на этапе решения системы — метод быстрой RBF, на этапе расчета поверхности — метод компактной RBF.

Таким образом, если считать процесс реконструкции последовательным применением рассмотренных ранее этапов, то лучшие результаты с точки зрения минимального времени реконструкции при больших значениях N следует ожидать от применения метода компактной RBF. Поэтому целесообразно именно его использовать в составе программной системы для реконструкции моделей органов по результатам томографических исследований, структура которой предложена в [15].

Практическая реализация метода компактной RBF. Для осуществления трехмерного моделирования объектов предлагается схема, представленная на рис. 2. В соответствии с данной схемой предполагается совместное применение метода RBF и метода деформационного сопоставления трехмерных моделей на основе исследований, изложенных в [16]. Примеры моделей, полученных с помощью предложенной схемы и компактного метода RBF, показаны на рис. 3.

В табл. 3 приведены численные результаты экспериментов по построению моделей, представленных на рис. 3. При моделировании использована система Intel Core 2 Duo 3.0 ГГц, 2 Гб RAM. Как видно из табл. 3, при числе точек, достигающем $10^6 \dots 10^7$, суммарное время построения модели свидетельствует о том, что использование метода компактной RBF позволяет приблизиться к реальному времени и получить лучший результат по сравнению, например, с описанным в работе [17].

Для того чтобы определить, как влияет уменьшение числа центров интерполяции, задействованных при расчете каждой точки поверхности, на точность реконструкции, была проведена оценка погрешности. В качестве эталонной использована модель объекта, полученная с помощью обычного метода RBF. В качестве абсолютной погрешности принята вели-

чина $\Delta(x) = |1 - F(x)|$, где $F(x)$ — значение интерполянта (1), вычисленного методом компактной RBF в точке x . При этом $x \in X$ — множество точек, образующих поверхность эталонной модели.

В табл. 4 приведены значения $\Delta(x)$ для моделей двух объектов [16], полученные при различном числе центров интерполяции. Анализируя табл. 4, можно сделать вывод о том, что при увеличении числа центров интерполяции погрешность уменьшается. Это обусловлено пропорциональным увеличением числа точек, попадающих в радиус действия каждой RBF, т. е. при $N \rightarrow \infty$ наблюдается тенденция $\Delta(x) \rightarrow 0$.

В работе [9] показано, что погрешность реконструкции в пределах $10^{-3} \dots 10^{-5}$ является вполне допустимой, так как визуальное представление 3D-модели в этом случае субъективно не отличается от результата реконструкции с помощью обычного метода RBF. Следовательно, результат, полученный с помощью предложенной схемы моделирования можно считать удовлетворительным. Следует также заметить, что для тестового объекта «позвонок» наблюдается увеличение погрешности при прочих равных условиях. Обоснованием данного факта может быть то, что объект

Таблица 3

Объект	Число точек	Время, с			Суммарное время построения модели, с
		построения дерева	решения системы	расчета поверхности	
Мозг	10^3	0,12	0,20	0,15	0,47
	10^4	0,34	0,97	0,45	1,76
	10^5	1,05	3,65	1,34	6,04
	10^6	4,24	12,3	4,96	21,50
	10^7	24,6	67,2	26,5	118,3
Позвонок	10^3	0,16	0,31	0,18	0,65
	10^4	0,45	1,07	0,51	2,04
	10^5	1,24	5,06	2,04	8,34
	10^6	5,48	14,6	6,12	26,2
	10^7	35,7	76,5	30,4	142,6

Таблица 4

Объект	Погрешность $\overline{\Delta(x)}$ при числе точек				
	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7
Мозг	$(7,1 \pm 0,2) \times 10^{-3}$	$(3,2 \pm 0,1) \times 10^{-3}$	$(1,7 \pm 0,1) \times 10^{-3}$	$(1,10 \pm 0,08) \times 10^{-3}$	$(8,7 \pm 0,5) \times 10^{-4}$
Позвонок	$(10,0 \pm 0,5) \times 10^{-3}$	$(6,8 \pm 0,2) \times 10^{-3}$	$(4,5 \pm 0,1) \times 10^{-3}$	$(2,80 \pm 0,09) \times 10^{-3}$	$(1,63 \pm 0,06) \times 10^{-3}$

«позвонок» обладает большим числом малых артефактов, определяющих его внешний вид. Это, в свою очередь, приводит к тому, что уменьшение числа точек, участвующих в построении модели, приводит к утрате мелких деталей и соответственно к увеличению погрешности. Следовательно, метод компактной RBF, в отличие от обычного метода, чувствителен к форме моделируемого объекта.

Выводы. В результате анализа временных и пространственных характеристик методов построения трехмерных моделей, основанных на использовании RBF и поверхностном представлении результата, установлено, что при реконструкции моделей с большим числом точек ($N > 10^4$) наиболее эффективен относительно минимизации временных затрат метод компактной RBF. Этот метод обеспечивает удовлетворительную точность, но чувствителен к виду моделируемого объекта. При прочих равных условиях наличие мелких деталей увеличивает погрешность при построении 3D-модели. Алгоритм, реализующий метод компактной RBF, был реализован в составе программной системы для реконструкции трехмерных моделей органов. Результаты экспериментов подтверждают возможность использования метода компактной RBF при построении 3D-моделей объектов в реальном времени.

Наиболее актуальной задачей для дальнейших исследований является исследование возможности адаптации метода построения 3D-моделей на основе RBF к параллельной реализации, что теоретически позволит сократить временные затраты на моделирование сложных динамически изменяющихся во времени объектов.

A comparative analysis of RBF-modification characteristic applied for the construction of 3D-models of organs by 2D and 3D-scanning data is proposed in the work. Outline of the model construction based on compactly supported RBF is described and modeling results for human brain and vertebra are proposed.

1. *Farrell E.J. et al.* Graphical 3D Medical Image Registration and Quantification // J-Med-Sys.— 1997. — № 21 (3). — P. 155—172.
2. *Morse B. S. et al.* Interpolating Implicit Surfaces from Scattered Surface Data Using Compactly Supported Radial Basis Functions // SMI 2001. Intern. Conf., May, 2001. — IEEE Computer Society Press. — P. 89—98.
3. *Бабков В. С.* Реконструкція 3D-моделей органів в комп'ютерній томографії при обмеженому об'ємі вхідних даних // Наук. праці Донецького національного технічного університету. Серія «Проблеми моделювання та автоматизації проектування динамічних систем». Вип. 52. — Донецьк : ДонНТУ, 2002. — С. 100—105.
4. *Xu F., Mueller K.* Real-time 3D Computed Tomographic Reconstruction Using Commodity Graphics Hardware // Phys. Med. Biol. — 2007. — Vol 52, № 12. P. 3405—3419.
5. *Бабков В.С.* Застосування сплайнів для подання контурів в методах обробки томографічних зображень // Наук. праці Донецького національного технічного університету. Серія «Інформатика, кібернетика та обчислювальна техніка». Вип. 70. — Донецьк : ДонНТУ, 2003. — С. 30—38.

6. Duchon J. Splines Minimizing Rotation-invariant Semi-norms in Sobolev Spaces // Constructive Theory of Functions of Several Variables. / Ed. W. Schempp and K. Zeller. — Berlin : Springer-Verlag, 1977. — № 571. — P. 85—100.
7. Pouderox J. Adaptive hierarchical RBF interpolation for creating smooth digital elevation models // Proc. 12-th ACM Int. Symp. Advances in Geographical information Systems 2004. — ACP Press, 2004. — P. 232—240.
8. Larsson E., Fornberg B. A Numerical Study of some Radial Basis Function based Solution Methods for Elliptic PDEs // Computers and Mathematics with Applications. — 2003. — № 46. — P. 891—902.
9. Carr J. C. et al. Reconstruction and Representation of 3D Objects with Radial Basis Functions // ACM SIGGRAPH 2001, 12-17 August 2001. — P. 67—76.
10. Kojekine N. et al. Software Tools Using CSRBFs for Processing Scattered Data // Computers & Graphics. — 2003. — Vol. 27, № 2. — P. 311—319.
11. Bentley J.L. Multidimensional Binary Search Trees Used for Associative Searching // CACM. — 1975. — № 18 (9). — P. 509—517.
12. Саух С. Е. Метод CR-факторизации неупорядоченных матриц // Сб. тр. междунар. конф. «Моделирование-2008», 14—16 мая 2008 г. Т. 1. — Киев : Институт проблем моделирования в энергетике им. Г. Е. Пухова, 2008. — С. 3—10.
13. Beatson R. K. et al. Fast Fitting of Radialbasis Functions: Methods Based on Preconditioned GMRES Iteration // Advances in Computational Math. — 1999. — № 11. — P. 253—270.
14. Level of Detail for 3D Graphics [Электронный ресурс], 2008. — <http://lodbook.com/models/>.
15. Бабков В. С., Иваишковец Е. В. Проектирование многофункциональной программной системы для реконструкции трехмерных объектов в медицинской практике // Сб. тр. Третьей междунар. науч.-тех. конф. молодых ученых и студентов «Информатика и компьютерные технологии», 11—13 декабря 2007 г. — Донецк : ДонНТУ, Мин. образования и науки, 2007. — С. 285—287.
16. Бабков В. С. Співвіднесення щільних 3D-моделей органів в комп'ютерній томографії // Вісн. Севастопольського національного технічного університету. Спеціальний випуск за матеріалами Міжнародної наук.-тех. конф. «ІНФОТЕХ-2004». — Севастополь: Вид-во СевНТУ, 2004. — С. 87—88.
17. Qiang W., Pan Z., Chun C., Jiajun B. Surface Rendering for Parallel Slice of Contours from Medical Imaging // Computing in Science & Engineering, January-February 2007. — 2007. — Vol. 9, № 1. — P. 32—37.

Поступила 28.08.08;
после доработки 01.12.08

БАШКОВ Евгений Александрович, д-р техн. наук, профессор, зав. кафедрой «Прикладная математика и информатика», проректор по научной работе Донецкого национального технического университета. В 1969 г. окончил Донецкий политехнический ин-т. Область научных исследований — высокопроизводительные системы компьютерной графики, специализированные вычислительные системы.

БАБКОВ Виктор Светозарович, аспирант, ассистент кафедры «Прикладная математика и информатика» Донецкого национального технического университета, который окончил в 2001 г. Область научных исследований — высокопроизводительные системы компьютерной графики, цифровая обработка сигналов.