УДК 519.213:621.391

А.И. Красильников, канд. физ.-мат. наук
Ин-т технической теплофизики НАН Украины
(Украина, 03057, Киев, ул. Желябова, 2а,
тел. (044) 4532857, e-mail: tangorov@voliacable.com)

Модели несимметричных распределений случайных величин с нулевым коэффициентом асимметрии

С помощью метода рандомизации обосновано применение смесей распределений для нахождения возможных несимметричных распределений с нулевым коэффициентом асимметрии. Проанализированы математические модели несимметричных распределений с нулевыми коэффициентами асимметрии, полученные рандомизацией параметров сдвига и масштаба базовой функции распределения. Приведены примеры нахождения таких распределений. Полученные результаты позволяют осуществлять математическое и компьютерное моделирование несимметричных распределений с нулевыми коэффициентами асимметрии.

За допомогою методу рандомізації обгрунтовано застосування сумішей розподілів для знаходження можливих несиметричних розподілів з нульовим коефіцієнтом асиметрії. Проаналізовано математичні моделі несиметричних розподілів з нульовими коефіцієнтами асиметрії, які отримані рандомізацією параметрів зсуву та масштабу базової функції розподілу. Наведено приклади знаходження таких розподілів. Отримані результати дозволяють здійснювати математичне та комп'ютерне моделювання несиметричних розподілів з нульовим коефіцієнтом асиметрії.

Ключевые слова: несимметричные распределения, кумулянтные коэффициенты, коэффициент асимметрии, смеси распределений, сопряженные распределения.

Современные статистические методы решения различных прикладных задач [1—8] основаны на применении негауссовских моделей исследуемых случайных величин и случайных процессов. Одним из главных вопросов при решении таких задач является выбор адекватных математических моделей, прежде всего, плотности вероятностей. В большинстве практических случаев получение точного аналитического выражения плотности вероятностей исследуемых негауссовских случайных величин, или случайных процессов, не представляется возможным. Поэтому для описания негауссовских моделей, как правило, используют различные аппроксимации плотности вероятностей, среди которых в настоящее время наиболее распространенными являются системы распределений Пирсона и Джонсона [9], отрезки рядов по ортогональным полиномам (чаще всего применяют ряды Грама — Шарлье и Эджворта) [10], гауссовские смеси распределений [11].

При построении и анализе аппроксимирующих распределений наибольшее значение имеют моменты и кумулянты, в частности кумулянтные коэффициенты $\gamma_s = \kappa_s / \kappa_2^{s/2}$, где κ_s — кумулянты распределения,

$$\kappa_s = \left. \frac{d^s \ln f(u)}{i^s du^s} \right|_{u=0};$$

$f(u)$ — характеристическая функция; $i = \sqrt{-1}$.

Следует заметить, что кумулянты лежат в основе моментно-кумулянтных моделей [12, 13], применение которых позволяет достаточно просто и эффективно исследовать негауссовские случайные величины и случайные процессы. В настоящее время в технических приложениях наиболее часто используют два кумулянтных коэффициента — асимметрии γ_3 и эксцесса γ_4 [1, 2, 4, 8, 12]. При выполнении условия $\gamma_3 = 0$ обычно считается, что распределение является симметричным, а при $\gamma_3 = \gamma_4 = 0$ — гауссовским. На основании коэффициентов γ_3 и γ_4 осуществляется выбор аппроксимирующих плотностей вероятностей из систем распределений Пирсона и Джонсона. При аппроксимации плотности вероятностей отрезком ряда Эджворта рекомендуют [12] ограничиваться четырьмя слагаемыми, коэффициенты которых можно выразить через γ_3 и γ_4.

При использовании конечного числа кумулянтных коэффициентов для анализа негауссовских случайных величин и случайных процессов и построения аппроксимирующих распределений возможны ошибочные результаты и выводы. Поэтому при практическом применении кумулянтных моделей в технических задачах необходимо учитывать результаты исследований кумулянтных коэффициентов [12—22].

В работе [14] исследован коэффициент эксцесса симметричных распределений. В работе [15] проанализированы кумулянты аддитивных и мультипликативных моделей дополнительных погрешностей. В работе [16] рассмотрены свойства кумулянтов безгранично делимых распределений. В [17] внимание сосредоточено на необходимости учитывать классическую проблему моментов, согласно которой даже при бесконечной последовательности моментов не всегда возможно однозначное определение распределения. В работе [18] построены модели негауссовских плотностей вероятностей, для которых коэффициенты асимметрии и эксцесса равны нулю.

Исследованию областей допустимых значений кумулянтных коэффициентов посвящены работы [12, 13, 19—22]. Некоторые неравенства для кумулянтных коэффициентов приведены в работе [12]. Области допустимых значений коэффициентов γ_3 и γ_4 для рядов Грама — Шарлье и Эджворта определены в [19, 20], области значений коэффициентов γ_s для некоторых моментно-кумулянтных моделей исследованы в [13], а для двухкомпонентных гауссовских смесей — в работах [21, 22].

В работе [13] на основе кумулянтного анализа установлено, что в классе асимметричных случайных величин второго типа существуют распределения, у которых $\gamma_3 = 0$, а коэффициент γ_5 отличен от нуля. Однако открытым остается вопрос, как в общем случае получить функцию распределения или плотность вероятностей несимметричных распределений с нулевым коэффициентом асимметрии? В отечественной и зарубежной литературе последних десятилетий ответ на этот вопрос отсутствует.

В связи с этим представляется целесообразным построение математических моделей несимметричных распределений с нулевым коэффициентом асимметрии.

Постановка задачи. Функция распределения $F(x)$ случайной величины ξ является симметричной относительно точки x_0, если она удовлетворяет условию [23]

$$F(x_0 + x) = 1 - F(x_0 - x + 0). \tag{1}$$

Условия симметрии характеристической функции и плотности вероятностей относительно точки x_0 имеют следующий вид:

$$e^{-iux_0} f(u) = e^{iux_0} f(-u), \tag{2}$$

$$p(x_0 + x) = p(x_0 - x). \tag{3}$$

Обычно точкой симметрии x_0 распределения $F(x)$ является математическое ожидание случайной величины ξ, которое в большинстве случаев равно нулю. Такие распределения называют симметричными. Заметим, что у симметричных распределений характеристическая функция — действительная и четная, а плотность вероятностей — четная функция. При этом каждое из трех свойств — симметричность функции распределения, действительность и четность характеристической функции — обусловливает выполнение двух других [24]. Распределения, для которых одно из условий (1)—(3) не выполняется, являются несимметричными.

Из симметричности распределений всегда следует, что все их нечетные центральные моменты μ_s равны нулю, однако обратное утверждение в общем случае неверно. В частности, равенство нулю третьего центрального момента μ_3 является лишь необходимым условием симметричности распределений, поскольку конечное число моментов в общем случае не может определять ни само распределение, ни его свойства [23, 24].

Таким образом, возникает следующая задача. Пусть имеется случайная величина ξ с неизвестным несимметричным распределением. Известно, что у рассматриваемой случайной величины существует, как минимум, начальный момент α_5. Предположим, что центральные моменты μ_3 и μ_5 одновременно удовлетворяют условиям

$$\mu_3 = \kappa_3 = 0, \tag{4}$$

$$\mu_5 \neq 0. \tag{5}$$

Необходимо определить одну из характеристик этой случайной величины, а именно функцию распределения $F(x)$, характеристическую функцию $f(u)$ или плотность вероятностей $p(x)$, которая одновременно удовлетворяет условиям (4) и (5).

Общий подход к построению моделей. Для нахождения возможных несимметричных распределений с нулевым коэффициентом асимметрии воспользуемся методом рандомизации [24], суть которого заключается в следующем.

Пусть ξ_0 — случайная величина с функцией распределения $F_0(x)$, которая зависит от параметра Q. Этим параметром может быть параметр сдвига, масштаба или формы. Предположим, что параметр Q — случайная величина с функцией распределения $F_1(y)$, и будем считать случайные величины ξ_0 и Q независимыми. Тогда функция $F_0(x|Q \in [y, y+dy])$ является условной функцией распределения новой случайной величины ξ, зависящей от ξ_0 и вероятности попадания значений параметра Q в область $[y, y+dy]$. На основании интегральной формулы полной вероятности безусловная функция распределения $F(x)$ случайной величины ξ имеет вид

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_0(x, y)\, dF_1(y), \tag{6}$$

где $F_0(x, y)$ — семейство функций распределения, зависящих от параметра y.

Функции, определяемые выражением (6), называются смесями распределений функций распределения $F_0(x)$ и $F_1(y)$ [24]. Случайную величину ξ_0 будем называть базовой, функцию $F_0(x)$ — базовой функцией распределения, а функцию $F_1(y)$ — смешивающей функцией распределения. Формула (6) позволяет получать распределения любого типа — дискретные, непрерывные и смешанные.

Рассмотрим частные случаи формулы (6). Пусть базовая функция распределения абсолютно непрерывна, т.е. случайная величина ξ_0 непрерывна и имеет плотность вероятностей $p_0(x)$. В этом случае при любых смешивающих распределениях функция распределения (6) является абсолютно непрерывной и для нее существует плотность вероятностей $p(x)$.

Предположим, что параметр Q является дискретной случайной величиной, которая принимает значения q_k с вероятностями $p_k = P(Q = q_k)$. Тогда смешивающее распределение является дискретным и его функция распределения имеет вид

$$F_1(y) = \sum_k p_k E(y - q_k),$$

где $E(x)$ — единичная функция. В этом случае из формулы (6) получаем плотность вероятностей смеси:

$$p(x) = \sum_k p_k p_0(x, q_k). \tag{7}$$

Если смешивающее распределение абсолютно непрерывно и имеет плотность вероятностей $p_1(y)$, то из (6) получаем следующую плотность вероятностей:

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_0(x, y)\, p_1(y)\, dy. \tag{8}$$

Использование формул (6)—(8) дает возможность получать множество моделей распределений. Будем рассматривать несимметричные распределения, центральные моменты μ_3 и μ_5 которых удовлетворяют условиям (4) и (5). Для нахождения центральных моментов μ_s смеси в общем случае целесообразно использовать ее начальные моменты α_s, которые на основании (6) имеют вид

$$\alpha_s = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^s dF_0(x, y)\, dF_1(y). \tag{9}$$

В частности,

$$\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_1 + 2\alpha_1^3, \tag{10}$$

$$\mu_5 = \alpha_5 - 5\alpha_4\alpha_1 + 10\alpha_3\alpha_1^2 - 10\alpha_2\alpha_1^3 + 4\alpha_1^5. \tag{11}$$

Таким образом, в общем случае решение поставленной задачи с использованием смеси (6) сводится к нахождению таких функций распределения $F_0(x)$ и $F_1(y)$, для которых одновременно выполняются условия (4) и (5). Для проверки несимметричности полученной характеристики в общем случае необходимо использовать одно из соотношений (1)—(3), однако в большинстве случаев можно ограничиться проверкой условия (5).

Конкретизируем рассматриваемую задачу, осуществляя рандомизацию параметров сдвига и масштаба базовой функции распределения.

Модели, полученные в результате рандомизации параметра сдвига. Пусть базовая случайная величина ξ_0 с функцией распределения $F_0(x)$ подвергается функциональному преобразованию $z = x + a$, где a — некоторое действительное число. Результатом такого преобразования является случайная величина $\xi = \xi_0 + a$, у которой функция распределения имеет вид

$$F(x) = F_0(x - a). \tag{12}$$

Из формулы (12) видно, что число a является параметром сдвига базовой функции распределения. Рандомизируем этот параметр, заменяя его случайной величиной ξ_1, которая независима от случайной величины ξ_0 и имеет функцию распределения $F_1(y)$. В результате получаем случайную величину

$$\xi = \xi_0 + \xi_1, \tag{13}$$

функция распределения которой с учетом (6) и (12) имеет вид

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_0(x - y)\, dF_1(y). \tag{14}$$

Выражение (14) представляет собой свертку функций $F_0(x)$ и $F_1(y)$ и является общей формулой для нахождения функции распределения суммы независимых случайных величин ξ_0 и ξ_1. Используя выражения (7) и (8), из (14) несложно получить формулы для нахождения плотности вероятностей случайной величины (13).

Таким образом, в результате рандомизации параметра сдвига получаем семейство моделей распределений (14), из которых, выбрав базовую и смешивающую функции распределения, можно получить несимметричные распределения, удовлетворяющие условиям (4) и (5).

Поскольку случайные величины ξ_0 и ξ_1 независимы, в рассматриваемом случае вместо громоздких вычислений по формулам (9)—(11) центральные моменты μ_s смеси (14) можно непосредственно выразить через центральные моменты $\mu_{s,0}$ и $\mu_{s,1}$ случайных величин ξ_0 и ξ_1. Например условию (4) в данном случае соответствует уравнение

$$\mu_3 = \mu_{3,0} + \mu_{3,1} = 0, \tag{15}$$

а формула (11) при выполнении условия (15) принимает следующий вид:

$$\mu_5 = \mu_{5,0} + 10\mu_{3,0}(\mu_{2,1} - \mu_{2,0}) + \mu_{5,1}, \tag{16}$$

где $\mu_{2,0}$ и $\mu_{2,1}$ — дисперсии случайных величин ξ_0 и ξ_1.

Из формул (14) и (15) следует, что для решения поставленной задачи необходимо использовать только несимметричные базовые и смешивающие функции распределения, у которых центральные моменты $\mu_{3,0}$ и $\mu_{3,1}$ должны иметь разные знаки.

Пример 1. Пусть базовым является показательное распределение, у которого плотность вероятностей [25] имеет вид

$$p_0(x) = \beta \exp(-\beta x)\, E(x),\ \beta > 0\,. \tag{17}$$

Центральные моменты базового распределения следующие:

$$\mu_{2,0} = \beta^{-2},\ \ \mu_{3,0} = 2\beta^{-3},\ \ \mu_{5,0} = 44\beta^{-5}. \tag{18}$$

Из (15) и (18) получаем формулу для нахождения параметра β:

$$\beta = (-2\mu_{3,1}^{-1})^{1/3}. \tag{19}$$

В качестве смешивающего распределения выберем степенное распределение, плотность вероятностей которого определяется выражением [25]

$$p_1(y) = \begin{cases} cy^{c-1}, & y \in [0,1], \\ 0, & y \notin [0,1], \end{cases} \tag{20}$$

где $c > 0$ — параметр формы. Начальные моменты распределения (20) имеют вид

$$\alpha_{s,1} = \frac{c}{c+s}. \tag{21}$$

При $c > 1$ момент $\mu_{3,1} < 0$ [25]. Зададим значение $c = 2$. Тогда дисперсия смешивающего распределения будет $\mu_{2,1} = \alpha_{2,1} - \alpha_{1,1}^2 = 0{,}0556$. Используя формулы (10), (11) и (21), получаем его центральные моменты: $\mu_{3,1} = -0{,}0074$, $\mu_{5,1} = -0{,}0024$.

По формуле (19) находим значение параметра базового распределения $\beta = 6{,}466$. Подставив это значение в (18), получим центральные моменты базового распределения: $\mu_{2,0} = 0{,}0239$, $\mu_{3,0} = 0{,}0074$, $\mu_{5,0} = 0{,}0039$. Подставляя полученные значения моментов $\mu_{s,0}$ и $\mu_{s,1}$ в формулу (16), находим значение момента $\mu_5 = 0{,}00386$. Отсюда следует, что распределение (14) в данном случае является несимметричным.

Искомое распределение является абсолютно непрерывным. Его плотность вероятностей на основании (8) и (14) определяется выражением

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_0(x-y)\, p_1(y)\, dy. \tag{22}$$

Подставляя в (22) плотности вероятностей (17) при $\beta = 6{,}466$ и (20) при $c = 2$, получаем окончательное выражение для искомой плотности вероятностей (рис. 1):

$$p(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 0, \\ 2x - 0{,}31(1 - e^{-6,47x}), \quad x \in (0,1], \\ 0{,}31\, e^{-6,47x} + 1{,}69\, e^{-6,47(x-1)}, \ x > 1. \end{cases}$$

Модели, полученные в результате рандомизации параметра масштаба. Предположим, что базовая случайная величина ξ_0 с функцией распределения $F_0(x)$ подвергается функциональному преобразованию $z = bx$, где b — некоторое действительное число, являющееся параметром масштаба. В результате такого преобразования получается случайная величина $\xi = b\,\xi_0$, у которой функция распределения имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} F_0\left(\dfrac{x}{b}\right), \ b > 0, \\ 1 - F_0\left(\dfrac{x}{b} + 0\right), \ b < 0. \end{cases} \tag{23}$$

Рандомизируем параметр масштаба, считая его случайной величиной ξ_1, которая независима от случайной величины ξ_0 и имеет функцию распределения $F_1(y)$. В результате получаем случайную величину

$$\xi = \xi_0 \xi_1, \tag{24}$$

функция распределения которой с учетом (6) и (23) имеет вид

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} \left[1 - F_0\left(\frac{x}{y} + 0\right)\right] dF_1(y) + \int_{0+}^{\infty} F_0\left(\frac{x}{y}\right) dF_1(y). \tag{25}$$

Заметим, что (25) является общей формулой для нахождения функции распределения произведения независимых случайных величин ξ_0 и ξ_1.

Таким образом, в результате рандомизации параметра масштаба получено семейство моделей распределений (25), из которых, выбрав базовую и смешивающую функции распределения, можно получить искомые несимметричные распределения, удовлетворяющие условиям (4) и (5). Непосредственной проверкой несложно убедиться в том, что необходимым требованием для решения поставленной задачи является использование только несимметричных базовых и смешивающих функций распределения.

Конкретизируем рассматриваемую задачу. Пусть базовая случайная величина ξ_0 имеет плотность вероятностей $p_0(x)$. Тогда у случайной

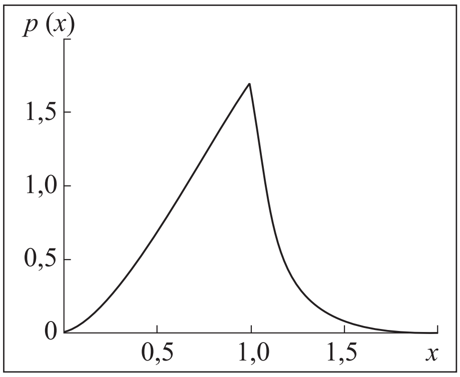

Рис. 1

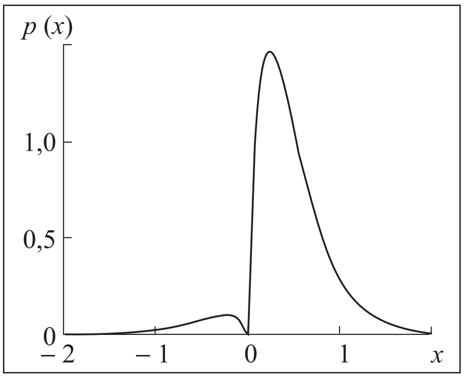

Рис. 2

величины (24) существует плотность вероятностей, для нахождения которой получаем выражение непосредственно из формулы (25):

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|y|} p_0\left(\frac{x}{y}\right) dF_1(y) . \tag{26}$$

Выберем смешивающее распределение в качестве дискретного и определим его функцию распределения в виде

$$F_1(y) = qE(y+b) + pE(y-b), \tag{27}$$

где $b>0$; $p, q>0$, $p+q=1$. Тогда на основании (26) и (27) запишем

$$p(x) = b^{-1}\left[qp_0\left(-\frac{x}{b}\right) + pp_0\left(\frac{x}{b}\right)\right]. \tag{28}$$

Заметим, что при $p=q=0{,}5$ распределение (28) является симметричным, поскольку удовлетворяет условию (3).

Конкретизируем формулы (10) и (11) для рассматриваемого случая. Поскольку случайные величины ξ_0 и ξ_1 независимы, начальные моменты α_s случайной величины (24) вычисляем по формуле

$$\alpha_s = \alpha_{s,0}\alpha_{s,1}, \tag{29}$$

где $\alpha_{s,0}$ и $\alpha_{s,1}$ — начальные моменты случайных величин ξ_0 и ξ_1. Моменты $\alpha_{s,1}$ получаем с использованием (27):

$$\alpha_{s,1} = \begin{cases} b^s(p-q), \ s=2k-1, \\ b^s, s=2k, \ k=1,2, \ldots \end{cases} \tag{30}$$

Подставляя (29) и (30) в выражение (10) и выполняя необходимые преобразования, получаем уравнение, соответствующее в данном случае условию (4):

$$\mu_3 = b^3(p-q)(\mu_{3,0} - 8pq\,\alpha_{1,0}^3) = 0\,. \tag{31}$$

Используя выражение (31), определяем условия для моментов $\alpha_{1,0}$ и $\mu_{3,0}$ базового распределения, при выполнении которых распределение (28) удовлетворяет условию (4). Из выражения $\mu_{3,0} - 8pq\,\alpha_{1,0}^3 = 0$ получаем уравнение

$$p^2 - p + \frac{\mu_{3,0}}{8\alpha_{1,0}^2} = 0, \tag{32}$$

корни которого равны:

$$p_{1,2} = 0{,}5\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{\mu_{3,0}}{2\alpha_{1,0}^3}}\right). \tag{33}$$

Из (33) следует, что корни уравнения (32) являются действительными и находятся в интервале (0, 1), если моменты $\alpha_{1,0}$ и $\mu_{3,0}$ удовлетворяют условию

$$0 < \frac{\mu_{3,0}}{2\alpha_{1,0}^3} < 1\,. \tag{34}$$

Из неравенства (34) следует, что моменты $\alpha_{1,0}$ и $\mu_{3,0}$ базового распределения должны иметь одинаковые знаки. В этом случае левая часть неравенства (34) выполняется всегда, а правая часть справедлива при выполнении условий

$$\begin{gathered} \mu_{3,0} < 2\alpha_{1,0}^3,\ \alpha_{1,0} > 0,\ \mu_{3,0} > 0\,; \\ \mu_{3,0} > 2\alpha_{1,0}^3,\ \alpha_{1,0} < 0,\ \mu_{3,0} < 0\,. \end{gathered} \tag{35}$$

Таким образом, при выполнении условий (35) по формуле (33) получаем две пары корней уравнения (32), (p_1, q_1) и (p_2, q_2), связанные соотношением $p_1 = q_2, q_1 = p_2$. При подстановке этих пар в выражение (28) получаем два сопряженных несимметричных распределения. При этом корни (p_1, q_1) и (p_2, q_2) не зависят от значения параметра *b*.

Подставляя (29) и (30) в выражение (11) и выполняя необходимые преобразования, получаем момент μ_5 распределения (28) при выполнении условия (31):

$$\mu_5 = b^5(p-q)[\mu_{5,0} - 16pq\,\alpha_{1,0}^2(2\alpha_{3,0} - \alpha_{1,0}\mu_{2,0})]\,. \tag{36}$$

Пример 2. Зададим базовое гамма-распределение с плотностью вероятностей [25]

$$p_0(x) = \frac{1}{\Gamma(c)} x^{c-1} e^{-x} E(x), \tag{37}$$

где $c > 0$ — параметр формы; $\Gamma(x)$ — гамма-функция. Моменты распределения (37) следующие:

$$\begin{gathered} \alpha_{1,0} = c,\ \alpha_{3,0} = c(c+1)(c+2); \\ \mu_{2,0} = c,\ \mu_{3,0} = 2c,\ \mu_{5,0} = 24c + 20c^2. \end{gathered} \tag{38}$$

Подставляя моменты $\alpha_{1,0}$ и $\mu_{3,0}$ в (35), находим, что корни (p_1, q_1) существуют при $c > 1$. Задав значение $c = 2$, по формулам (38) найдем моменты базового распределения: $\alpha_{1,0} = 2, \alpha_{3,0} = 24, \mu_{2,0} = 2, \mu_{3,0} = 4, \mu_{5,0} = 128$, а по формуле (33) — корни $p_1 = 0{,}933$ и $q_1 = 0{,}067$. Подставляя в (36) полученные числовые значения моментов, находим значение $\mu_5 = -41{,}59 b^5$, откуда следует, что искомое распределение является несимметричным.

Подставляя в выражение (28) значения $p_1 = 0{,}933$, $q_1 = 0{,}067$ и плотность вероятностей (37), в которой $c = 2$ и $\Gamma(2) = 1$, получаем плотность вероятностей искомого распределения:

$$p(x) = \begin{cases} -0{,}067\, b^{-2} x\, e^{x/b}, & x \le 0, \\ 0{,}933\, b^{-2} x\, e^{-x/b}, & x > 0. \end{cases} \tag{39}$$

На рис. 2 представлен график плотности вероятностей (39) при $b = 0{,}25$.

Выводы

1. Определены два класса несимметричных случайных величин с нулевым коэффициентом асимметрии, у которых функции распределения представляют собой смеси распределений с рандомизированными параметрами сдвига (14) или масштаба (25) базовой функции распределения.

2. Смеси распределений будут несимметричными с нулевым коэффициентом асимметрии, если базовые и смешивающие функции распределения несимметричны. У смеси с параметром сдвига (14) центральные моменты $\mu_{3,0}$ и $\mu_{3,1}$ должны иметь разные знаки и удовлетворять условию (15), а у смеси с параметром масштаба (28) моменты $\alpha_{1,0}$ и $\mu_{3,0}$ базового распределения должны иметь одинаковые знаки и удовлетворять условию (35).

3. Компьютерное моделирование несимметричных случайных величин с нулевыми коэффициентами асимметрии на основе предложенных моделей сводится к моделированию известными методами суммы (13)

либо произведения (24) независимых случайных величин, моменты которых удовлетворяют соответствующим условиям.

4. Учет полученных результатов в технических приложениях позволит избежать ошибочных решений при выборе аппроксимирующих распределений негауссовских случайных величин, а также повысить достоверность результатов решения задач измерений, обнаружения и классификации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Новицкий П.В., Зограф И.А.* Оценка погрешностей результатов измерений. — Л. : Энергоатомиздат, 1991. — 304 с.
2. *Alexandrou D., De Moustier C., Haralabus G.* Evaluation and verification of bottom acoustic reverberation statistics predicted by the point scattering model // J. Acoust. Soc. Am. — 1992. — Vol. 91, No. 3. — P. 1403—1413.
3. *Шелухин О.И.* Негауссовские процессы в радиотехнике. — М.: Радио и связь, 1999. — 287 с.
4. *Марченко Б.Г., Мацюк О.В., Фриз М.Є.* Математичні моделі й обробка сигналів в офтальмології. — Тернопіль: Тернопільський державний техн. ун-т, 2005. — 184 с.
5. *Потапов А.А., Гильмутдинов А.Х., Ушаков П.А.* Системные принципы и элементная база фрактальной радиоэлектроники. Ч. 2. Методы синтеза, модели и перспективы применения // Радиотехника и электроника. — 2008. — **53**, № 11. — С. 1347—1394.
6. *Палагин В.В.* Адаптация моментного критерия качества для многоальтернативной задачи проверки гипотез при использовании полиномиальных решающих правил // Электрон. моделирование. — 2010. — **32**, № 4. — С. 17—33.
7. *Красильников А.И.* Модели шумовых сигналов в системах диагностики теплоэнергетического оборудования. — Киев: Ин-т техн. теплофизики НАН Украины, 2014. — 112 с.
8. *Бабак С.В., Мыслович М.В., Сысак Р.М.* Статистическая диагностика электротехнического оборудования. — Киев: Ин-т электродинамики НАН Украины, 2015. — 456 с.
9. *Бостанджиян В.А.* Распределение Пирсона, Джонсона, Вейбулла и обратное нормальное. Оценивание их параметров. — Черноголовка: Ин-т проблем химической физики РАН, 2009. — 240 с.
10. *Сенатов В.В.* Центральная предельная теорема: точность аппроксимации и асимптотические разложения. — М.: Книжный дом «Либроком», 2009. — 352 с.
11. *Королев В.Ю.* Смешанные гауссовские вероятностные модели реальных процессов. — М. : Макс Пресс, 2004. — 124 с.
12. *Малахов А.Н.* Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. — М. : Сов. радио, 1978. — 376 с.
13. *Кунченко Ю.П.* Полиномиальные оценки параметров близких к гауссовским случайных величин. Ч. 1. Стохастические полиномы, их свойства и применения для нахождения оценок параметров. — Черкассы: ЧИТИ, 2001. — 133 с.
14. *De Carlo L.T.* On the meaning and use of kurtosis // Psychological Methods. — 1997. — Vol. 2, No. 3. — P. 292—307.
15. *Кузнецов Б.Ф., Бородкин Д.К., Лебедева Л.В.* Кумулянтные модели дополнительных погрешностей // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. — 2013. — № 1 (37). — С. 134—138.
16. *Красильников А.И.* Пуассоновские моменты безгранично делимых распределений // Электроника и связь. — 2002. — № 15. — С. 84—88.

17. *Марченко Б.Г., Щербак Л.Н.* Проблема моментов и кумулянтный анализ // Отбор и обработка информации. — 1993. — Вып. 9 (85). — С. 12—20.
18. *Красильников А.И.* Класс негауссовских распределений с нулевыми коэффициентами асимметрии и эксцесса // Изв. вузов. Радиоэлектроника. — 2013. — **56**, № 6. — С. 56—63.
19. *Jondeau E., Rockinger M*. Gram-Charlier densities // Journal of Economic Dynamics & Control. — 2001. — Vol. 25. — P. 1457—1483.
20. *Jondeau E., Rockinger M.* Conditional volatility, skewness, and kurtosis: existence, persistence, and comovements // Ibid. — 2003. — Vol. 27. — P. 1699—1737.
21. *Красильников А.И., Пилипенко К.П.* Одновершинная двухкомпонентная гауссовская смесь. Коэффициент эксцесса // Электроника и связь. — 2007. — № 2 (37). — С. 32—38.
22. *Чепинога А.В.* Області реалізації бігаусових моделей асиметрично-ексцесних випадкових величин з перфорованим моментно-кумулянтним описом // Вісник ЧДТУ. — 2010. — № 2. — С. 91—95.
23. *Шметтерер Л*. Введение в математическую статистику / Пер. с нем. под ред. Ю.В. Линника. — М.: Наука, 1976. — 520 с.
24. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х томах. Т. 2. / Пер. с англ. Ю.В.Прохорова. — М. : Мир, 1984. — 738 с.
25. *Вадзинский Р.Н.* Справочник по вероятностным распределениям. — СПб. : Наука, 2001. — 295 с.

A.I. Krasilnikov

MODELS OF ASYMMETRICAL DISTRIBUTIONS
OF RANDOM VARIABLES WITH ZERO ASYMMETRY COEFFICIENT

The use of mixtures of distributions for finding possible asymmetrical distributions with zero asymmetry coefficients has been substantiated as based on the method of randomization. Mathematical models of asymmetric distributions with zero asymmetry coefficients have been analyzed; the models were obtained by the randomization of the shift and scale parameters of the basic distribution function. The examples of finding such distributions are given. The obtained results allow realizing the mathematical and computer modeling of asymmetric distributions with zero asymmetry coefficients.

K e y w o r d s: asymmetric distributions, cumulant coefficients, coefficient of skewness, mixtures of distributions, conjugate distributions.

REFERENCES

1. Novitskii, P.V. and Zograf, I.A. (1991), *Otsenka pogreshnostei rezultatov izmerenii* [Error estimation in measurement results], Energoatomizdat, St. Petersburg, Russia.
2. Alexandrou, D., De Moustier, C. and Haralabus, G. (1992), “Evaluation and verification of bottom acoustic reverberation statistics predicted by the point scattering model”, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 91, no. 3, pp. 1403-1413.
3. Shelukhin, O.I. (1998), *Negaussovskie protsessy v radiotekhnike* [Non-Gaussian processes in radio engineering], Radio i svyaz, Moscow, Russia.
4. Marchenko, B.G., Matsiuk, O.V. and Fryz, M.Ye. (2005), *Matematychni modeli y obrobka sygnaliv v oftalmolohii* [Mathematical models and processing of signals in ophthalmology], Ternopil Ivan Pul’uj National Technical University, Ternopil, Ukraine.

5. Potapov, A.A., Gilmutdinov, A.Kh. and Ushakov, P.A. (2008), “System principles and element base of fractal radioelectronics. Part 2. Methods of synthesis, models and application prospect”, *Radiotekhnika i elektronika*, Vol. 53, no. 11, pp. 1347-1394.
6. Palagin, V.V. (2010), “Adaptation of moment quality criterion for the multiple-choice task of verification of hypotheses when using the polynomial decision rules”, *Elektronnoe modelirovanie,* Vol. 32, no. 4, pp. 17-33.
7. Krasilnikov, A.I. (2014), *Modeli shumovykh signalov v sistemakh diagnostiki teploenergeticheskogo oborudovaniya* [Models of noise signals in the systems of diagnostics of heat-and-power producing equipment], Institute of Engineering Thermophysics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine.
8. Babak, S.V., Myslovich, M.V. and Sysak, R.M. (2015), *Statisticheskaya diagnostika elektrotekhnicheskogo oborudovaniya* [Statistical diagnostics of the electrotechnical equipment], Institute of Electrodynamics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine.
9. Bostandzhiyan, V.A. (2009), *Raspredelenie Pirsona, Dzhonsona, Veibulla i obratnoe normalnoe. Otsenivanie ikh parametrov* [Pearson, Johnson, Weibull distribution and the reverse normal. Estimation of their parameters], Institute for Problems of Chemical Physics of RAS, Chernogolovka, Russia.
10. Senatov, V.V. (2009), *Tsentralnaya predelnaya teorema: Tochnost approksimatsii i asimptoticheskie razlozheniya* [Central limit theorem: Approximation accuracy and asymptotic decompositions], Knizhnyi dom «Librokom», Moscow, Russia.
11. Korolev, V.Yu. (2004), *Smeshannye gaussovskie veroyatnostnye modeli realnykh protsessov* [The mixed Gaussian probabilistic models of real processes], Maks Press, Moscow, Russia.
12. Malakhov, A.N. (1978), *Kumulyantnyi analiz sluchainykh negaussovykh protsessov i ikh preobrazovanii* [Cumulant analysis of random non-Gaussian processes and their transformations], Sovetskoe radio, Moscow, Russia.
13. Kunchenko, Yu.P. (2001), *Polinomialnye otsenki parametrov blizkikh k gaussovskim sluchainyh velichin. Ch. I. Stokhasticheskie polinomy, ikh svoistva i primenenie dlya nakhozhdeniya otsenok parametrov* [Parameter polynomial estimations of random variables close to Gaussian. Part I. Stochastic polynomials, their properties and application for finding the parameter estimations], ChITI, Cherkassy, Ukraine.
14. De Carlo, L.T. (1997), “On the meaning and use of kurtosis”, *Psychological Methods*, Vol. 2, no. 3, pp. 292-307.
15. Kuznetsov, B.F., Borodkin, D.K. and Lebedeva, L.V. (2013), “Cumulant models of additional errors”, *Sovremennye tekhnologii. Sistemnyi analiz. Modelirovanie*, no. 1 (37), pp. 134-138.
16. Krasilnikov, A.I., (2002), “Poisson moments of infinitely divisible distributions”, *Elektronika i svyaz*, no. 15, pp. 84-88.
17. Marchenko, B.G. and Shcherbak, L.N. (1993), “Moment problem and cumulant analysis”, *Otbor i obrabotka informatsii*, Vol. 9 (85), pp. 12-20.
18. Krasilnikov, A.I. (2013), “Class of non-Gaussian distributions with zero skewness and kurtosis”, *Izvestiia vysshikh uchebnykh zavedenii. Radioelektronika*, Vol. 56, no. 6, pp. 56-63.
19. Jondeau, E. and Rockinger, M. (2001), “Gram-Charlier densities”, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 25, pp. 1457-1483.
20. Jondeau, E. and Rockinger, M. (2003), “Conditional volatility, skewness, and kurtosis: existence, persistence, and comovements”, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 27, pp. 1699-1737.
21. Krasilnikov, A.I. and Pilipenko, K.P (2007), “Unimodal two-component Gaussian mixture. Excess kurtosis”, *Elektronika i svyaz*, no. 2 (37), pp. 32-38.
22. Chepynoha, A.V. (2010), “Areas of realization of bi-Gaussian models of skewness-excess random variables with the punched moment-cumulant description”, *Visnyk ChDTU*, no. 2, pp. 91-95.

23. Shmetterer, L. (1976), *Vvedenie v matematicheskuyu statistiku* [Einführung in die mathematishe Statistik], Translated by Linnik, Yu.V., Nauka, Moscow, Russia.
24. Feller, V. (1984), *Vvedenie v teoriyu veroyatnostei i yeyo prilozheniya* [Introduction to Probability Theory and Its Applications], Vol. 2. Translated by Prokhorov, Yu.V., Mir, Moscow, Russia.
25. Vadzinskii, R.N. (2001), *Spravochnik po veroyatnostnym raspredeleniyam* [Reference Book on Probabilistic Distributions], Nauka, St. Petersburg, Russia.

Поступила 01.12.15;
после доработки 30.12.15

КРАСИЛЬНИКОВ Александр Иванович, канд. физ.-мат. наук, доцент, ст. науч. сотр. Ин-та технической теплофизики НАН Украины. В 1973 г. окончил Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований — математические модели, вероятностные характеристики и методы статистической обработки флуктуационных сигналов в системах шумовой диагностики.