УДК:004.492

Я.А. Калиновский, д-р техн. наук
Ин-т проблем регистрации информации НАН Украины
(Украина, 03113, Киев, ул. Н. Шпака, 2, e-mail: kalinovsky@i.ua),
Ю.Е. Бояринова, канд. техн. наук, **Я.В. Хицко**
Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический ин-т»
(Украина, 03056, Киев, пр-т Победы, 37,
e-mail: ub@ua.fm; yannuary@yandex.ua)

Оптимизация суммарной параметрической чувствительности реверсивных цифровых фильтров с коэффициентами в неканонических гиперкомплексных числовых системах

Предложен и реализован метод построения оптимального по параметрической чувствительности реверсивного фильтра на основе применения неканонических гиперкомплексных числовых систем. Показано, что использование неканонических гиперкомплексных числовых систем с большим числом ненулевых структурних констант позволяет значительно снизить чувствительность цифрового фильтра.

Запропоновано та реалізовано метод побудови оптимального за параметричною чутливістю реверсивного фільтра на основі застосування неканонічних гіперкомплексних числових систем. Показано, що використання неканонічних гіперкомплексних числових систем з більшою кількістю ненульових структурних констант дозволяє значно зменшити чутливість цифрового фільтра.

К л ю ч е в ы е с л о в а: неканоническая гиперкомплексная числовая система, цифровой фильтр, гиперкомплексные числа, амплитудно-частотная характеристика, параметрическая чувствительность фильтра.

В работах [1—12] описан общий подход к использованию гиперкомплексных числовых систем (ГЧС) при построении структур цифровых программно реализуемых фильтров и расчете их параметрической чувствительности. В этих работах использованы в основном канонические ГЧС. Попытаемся построить цифровой фильтр в таких ГЧС, которые содержат большее число ненулевых структурных констант в таблицах умножения, что позволит синтезировать реверсивные цифровые фильтры с пониженной параметрической чувствительностью.

Эквивалентирование цифрового фильтра с гиперкомплексными коэффициентами и фильтра с вещественными коэффициентами. Будем использовать методику синтеза структуры фильтра посредством эквивалентного преобразования цифрового реверсивного фильтра n-го порядка с гиперкомплексными коэффициентами, описанную в [4]. Рассмотрим цифровой фильтр третьего порядка с вещественными коэффициентами, передаточная функция которого имеет вид

$$H_R = \frac{\varphi_3 z^{-3} + \varphi_2 z^{-2} + \varphi_1 z^{-1} + \varphi_0}{\varphi_3 z^{-3} + \varphi_2 z^{-2} + \varphi_1 z^{-1} + 1}.$$

Согласно методике, описанной в [4], его можно эквивалентировать цифровым фильтром первого порядка с передаточной функцией

$$H_\Gamma = \frac{A + Bz^{-1}}{1 + Cz^{-1}} = \frac{(A + Bz^{-1})\,(\overline{1 + Cz^{-1}})}{N(1 + Cz^{-1})}, \tag{1}$$

но с гиперкомплексными коэффициентами A, B, C, которые принадлежат некоторой ГЧС размерности три. При этом сопряжения и норма N соответствуют применяемой ГЧС [4].

В работе [13] рассмотрен эквивалентный фильтр первого порядка с гиперкомплексными коэффициентами в неканонической ГЧС размерности три, содержащей только две неканонические структурные константы. Рассмотрим неканоническую ГЧС размерности три — $\Gamma(e,3)$, имеющую более сложную структуру с таблицей умножения:

$\Gamma(e,3)$	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	e_2	e_3
e_2	e_2	$-2e_1 - 3e_2$	$-e_3$
e_3	e_3	$-e_3$	$-8e_1 - 4e_2$

. (2)

В данной ГЧС имеются четыре ненулевые структурные константы. Эта ГЧС изоморфна системе $R \oplus C$ с таблицей умножения

$R \oplus C$	E_1	E_2	E_3
E_1	E_1	0	0
E_2	0	E_2	E_3
E_3	0	E_3	$-E_2$

, (3)

что можно легко проверить с помощью оператора изоморфизма:

$$e_1 = E_1 + E_2,\; e_2 = 2E_1 - E_2,\; e_3 = 2E_3.$$

Сравнивая системы (2) и (3), видим, что вычисления в (3) значительно проще. Этот факт можно использовать для повышения производительности работы фильтра.

Коэффициенты передаточной функции H_{Γ}, как числа ГЧС (2), имеют вид

$$A = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3,\; B = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3,$$
$$C = c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3,\quad A, B, C \in \Gamma(e,3).$$

Подставляя эти коэффициенты в (1), в соответствии с методом эквивалентирования [4] получаем передаточную функцию цифрового фильтра

$$H = \frac{a_1 + Kz^{-1} + Mz^{-2} + Lz^{-3}}{1 + Tz^{-1} + Pz^{-2} + Qz^{-3}},$$

где

$$K = 2a_2c_2 + 8a_3c_3 - 4a_1c_2 + 2a_1c_1 + b_1;$$
$$M = 8a_2c_3^2 + 2a_2c_1c_2 + 8b_3c_3 - 4a_1c_3^2 - 4b_1c_2 + 2b_1c_1 + 2b_2c_2 + 3a_1c_2^2 +$$
$$+ a_1c_1^2 - 4a_1c_1c_2 - 16a_3c_2c_3 + 8a_3c_1c_3;$$
$$L = b_1c_1^2 - 16b_3c_2c_3 + 2b_2c_1c_2 - 2b_2c_2^2 - 4b_1c_1c_2 + 8b_3c_1c_3 + 3b_1c_2^2 + 8b_2c_3^2 - 4b_1c_3^2;$$
$$T = 3c_1 - 4c_2; \tag{4}$$
$$P = 5c_2^2 + 4c_3^2 - 8c_1c_3 + 3c_1^2;$$
$$Q = 5c_1c_2^2 - 4c_1^2c_2 + c_1^3 + 4c_1c_3^2 - 8c_2c_3^2 - 2c_2^3.$$

Параметрическая чувствительность цифрового фильтра — это чувствительность модуля передаточной функции цифрового фильтра к вариации коэффициентов передаточной функции фильтра в системе $\Gamma(e,3)$. Рассмотрим конкретный пример фильтра третьего порядка с вещественными коэффициентами и передаточной функцией [1]:

$$H = \frac{0{,}287589 + 0{,}6888683\,z^{-1} + 0{,}6888683\,z^{-2} + 0{,}287589\,z^{-3}}{1 + 0{,}418204\,z^{-1} + 0{,}473048\,z^{-2} + 0{,}061292\,z^{-3}}. \tag{5}$$

Сравнивая системы (4) и (5), можно определить коэффициент a_1. Подставляя в левые части уравнений системы (4) соответствующие коэффициенты передаточной функции (5) и решая полученную систему, получаем

$$c_1 = 0{,}1357057599,$$
$$c_2 = -0{,}02771680107,$$
$$c_3 = -0{,}0322006353,$$
$$a_1 = 0{,}287589,$$
$$a_2 = 0{,}8617832604 - 0{,}1670945344\, b_1 + 3{,}108405333\, b_3,$$
$$a_3 = -0{,}2377384865 + 0{,}3885506667\, b_1 - 0{,}006688924881\, b_3,$$
$$b_2 = 0{,}3270207858 - 0{,}4763980440\, b_1 + 0{,}4390595182\, b_3.$$

Система (4) состоит из шести уравнений, но содержит восемь переменных, поэтому две переменные — свободные. В качестве свободных переменных можно выбрать любые, в данном случае — это переменные b_1, b_3. Таким образом, параметры фильтра представляют собой функции от величин b_1, b_3.

Суммарная параметрическая чувствительность фильтра первого порядка с гиперкомплексными коэффициентами в ГЧС размерности три имеет вид [1, 4]

$$RCS = \left| \sum_{i=1}^{9} \frac{\alpha_i}{|H|} \frac{\partial |H|}{\alpha_i} \right|, \tag{6}$$

где $\alpha_1 = a_1$, $\alpha_2 = a_2$, $\alpha_3 = a_3$, $\alpha_4 = b_1$, $\alpha_5 = b_2$, $\alpha_6 = b_3$, $\alpha_7 = c_1$, $\alpha_8 = c_2$, $\alpha_9 = c_3$. Как указано выше, параметры b_1, b_3 могут принимать любые значения. Допустим, что $b_1 = b_3 = 0$. График отношения суммарной параметрической чувствительности построенного фильтра с гиперкомплексными коэффициентами к суммарной параметрической чувствительности фильтра с вещественными коэффициентами представлен на рис. 1, из которого видно, что в целом параметрическая чувствительность гиперкомплексного фильтра ниже, чем чувствительность вещественного фильтра.

Оптимизация параметрической чувствительности. Тем фактом, что параметры фильтра b_1, b_3 могут принимать различные значения без изменения передаточной функции, можно воспользоваться для оптимизации параметрической чувствительности фильтра. Для этого необходимо найти такие значения b_1, b_3, которые удовлетворяли бы условиям (5), и при этом оптимизировать некоторый критерий. Для его построения выведем функцию параметрической чувствительности, выражая все ее компоненты через коэффициенты b_1, b_3:

$RCS = 2{,}87589 \cdot 10^5 |(z\,(z^2 + 0{,}2824982402z - 0{,}3948087339)) \,/\, (6{,}888683 \cdot 10^5 z +$
$+ 6{,}888683 \cdot 10^5 z^2 + 287589 \cdot 10^5 z^3 + 0{,}000065\, z b_3 + 287589 \cdot 10^5 + 0{,}000194\, z^2 b_1 -$

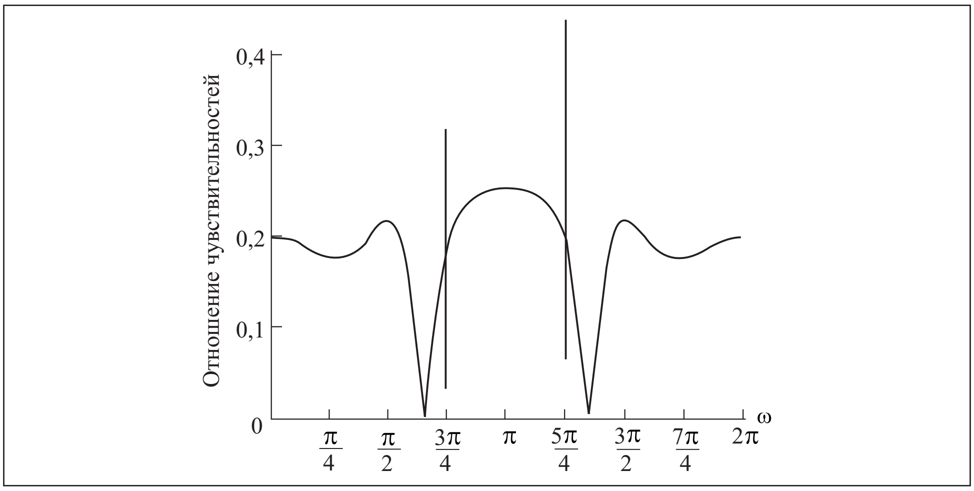


Рис. 1. Отношение суммарной параметрической чувствительности фильтра с гиперкомплексными коэффициентами к суммарной параметрической чувствительности фильтра с вещественными коэффициентами

$$
\begin{aligned}
&-0{,}0001b_1)|+179{,}2(0{,}8661732604+3{,}108405330b_3-0{,}1670945344b_1)|(-30{,}93392977z+\\
&+4624{,}649)\,z\,/(6{,}888683\cdot 10^5 z+6{,}888683\cdot 10^5 z^2+2{,}87589\cdot 10^5 z^3+0{,}000065\,zb_3+\\
&+2{,}87589\cdot 10^5+0{,}000194z^2b_1-0{,}0001\,b_1)|+2{,}576050824\cdot 10^6\,(-0{,}2377384865-\\
&-0{,}006688924881b_3+0{,}3885506667\,b_1)\,|\,((z^3+0{,}4182040001\,z^2+0{,}473048\,z+\\
&+0{,}061292)\,z)/((z^2+0{,}27695488\,z+0{,}4339283668)\,(6{,}888683\cdot 10^5 z+6{,}888683\cdot 10^5 z^2+\\
&+2{,}87589\cdot 10^5 z^3+0{,}000065\,zb_3+2{,}87589\cdot 10^5+0{,}00194\,z^2b_1-0{,}0001\,b_1))|+\\
&+10^6 b_1|(z^2+0{,}2824982402\,z-0{,}3948087339)/(6{,}888683\cdot 10^5 z+6{,}888683\cdot 10^5 z^2+\\
&+2{,}87589\cdot 10^5 z^3+0{,}000065\,zb_3+2{,}87589\cdot 10^5+0{,}00194\,z^2b_1-0{,}0001\,b_1)\,|+\\
&+179{,}2\,(0{,}3470207858+0{,}476398044\,b_1+0{,}4390595182\,b_3)|(-30{,}93392977\,z+\\
&+4624{,}649)/(6{,}888683\cdot 10^5 z+6{,}888683\cdot 10^5 z^2+2{,}87589\cdot 10^5 z^3+0.000065\,zb_3+\\
&+2{,}87589\cdot 10^5+0{,}00194z^2b_1-0{,}0001b_1)|+2{,}576050824\cdot 10^6 b_3|(z^3+0{,}418204001z^2+\\
&+0{,}473048001z+0{,}06129200005)/((z^2+0{,}27695488\,z+0{,}4339283668)\times\\
&\times(6{,}888683\cdot 10^5 z+6{,}888683\cdot 10^5 z^2+2{,}87589\cdot 10^5 z^3+0{,}000065zb_3+2{,}87589\cdot 10^5+\\
&+0{,}00194\,z^2b_1-0{,}0001\,b_1))|+1{,}357057599\cdot 10^5|(-0{,}5250973802\,z-1{,}40449263\,z^2-\\
&-2{,}220572639z^3-1{,}078332612z^2b_3-0{,}1361613063\cdot 10^{-11}z^4b_3-2{,}578484692\,b_3z^3-\\
&-0{,}6980613945\,z^3b_1-0{,}287589\,z^5-1{,}3777366\,z^4+z^4b_1-1{,}219747025\,zb_3+\\
&+0{,}5900854807\,z^2b_1+0{,}1936779808\,zb_1+0{,}0171530194\,3b_1-0{,}1580404834\,b_3)\,/\\
&/((6{,}888683\cdot 10^5 z+6{,}888683\cdot 10^5 z^2+2{,}87589\cdot 10^5 z^3+0{,}000065zb_3+2{,}87589\cdot 10^5+\\
&+0{,}00194z^2b_1-0{,}0001b_1)(z^3+0{,}418204z^2+0{,}473048z+0{,}061292))|-5543{,}360214|\\
&|(0{,}4819770815z+1{,}203657431z^2+1{,}984835137z^3+1{,}70101216z^2b_3+0{,}1334225252-\\
&-0{,}1670945344z^5b_1+3{,}108405333z^5b_3+2{,}160835571z^4b_3+4{,}46851934z^3b_3-
\end{aligned}
$$

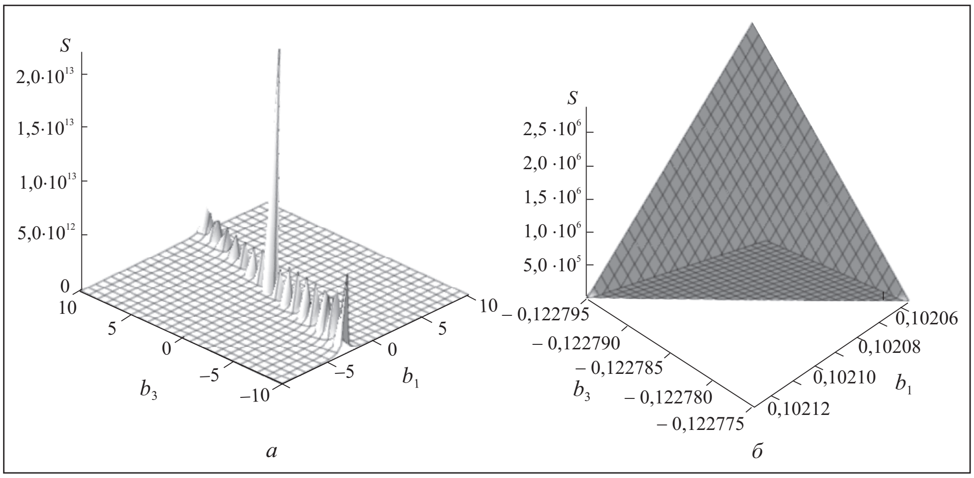


Рис. 2. График $S_{RCS}(\omega, b_1, b_3)$ для широкой (*а*) и суженной (*б*) областей поиска: *а* — $b_1 \in \{-10...10\}$, $b_3 \in \{-10...10\}$; *б* — $b_1 \in \{0{,}102056...0{,}102128\}$, $b_3 \in \{-0{,}122795... -0{,}1222775\}$

$$
\begin{aligned}
&-0{,}519934988\, z^3 b_1 + 0{,}8661732604\, z^5 + 1{,}436021731\, z^4 - 0{,}6161572493\, z^4 b_1 + \\
&+1{,}300698148\, z b_3 - 0{,}3574985891 z^2 b_1 - 1{,}339747589\, z b_1 - 0{,}0130206123\ 3 b_1 + \\
&+0{,}1616924388\ b_3)\ /\ ((6{,}888683 \cdot 10^5 z + 6{,}888683 \cdot 10^5 z^2 + 2{,}87589 \cdot 10^5 z^3 + \\
&+0{,}000065\, z b_3 + 2{,}87589 \cdot 10^5 + 0{,}00194\, z^2 b_1 - 0{,}0001 b_1)\ (z^3 + 0{,}418204\, z^2 + \\
&+0{,}473048 z + 0{,}061292))| - 2{,}576050824 \cdot 10^6\, |((z^3 + 0{,}418204\, z^2 + 0{,}473048 z + \\
&+0{,}061292)(-0{,}1810409257 - 0{,}4384584492 z^2 - 0{,}2377384865 z^3 - 1{,}00370506\, z^2 b_3 - \\
&-0{,}0309477408\ 1 - 0{,}006688924881 b_3 z^3 + 0{,}3885506661 z^3 b_1 - 0{,}2803704614 z b_3 + \\
&+0{,}2152220066 z^2 b_1 + 0{,}1984065488 z b_1 + 0{,}0466954669\ 3 b_1 - 0{,}4347322325 b_3))/ \\
&/((z^2 + 0{,}27695488\ z + 0{,}433928367)^2\ (6{,}888683 \cdot 10^5 z + 6{,}888683 \cdot 10^5 z^2 + \\
&+2{,}87589 \cdot 10^5 z^3 + 0{,}000065\, z b_3 + 2{,}87589 \cdot 10^5 + 0{,}00194\, z^2 b_1 - 0{,}0001\, b_1))|.
\end{aligned}
$$

Поскольку функция чувствительности, как норма комплексного числа, положительная на всем отрезке $\omega = 0 ... 2\pi$, в качестве критерия оптимальности можно взять сумму значений функции параметрической чувствительности от параметров b_1, b_3 для некоторой совокупности значений ω. В данном случае дискретность разбиения интервала значений $\omega = 0 ... 2\pi$ равна $\pi/16$. Вычислим значения функции в каждой точке с учетом того, что оператор сдвига $z = \sin(\omega) + i\cos(\omega)$, и построим критерий оптимальности $S_{RCS}(\omega, b_1, b_3)$, который необходимо минимизировать. Функция $S_{RCS}(\omega, b_1, b_3)$ не приведена, так как она очень громоздкая, вследствие чего градиентный метод оптимизации оказался неэффективным.

Для доказательства работоспособности излагаемого метода достаточно найти приближенный оптимум, что можно выполнить построением

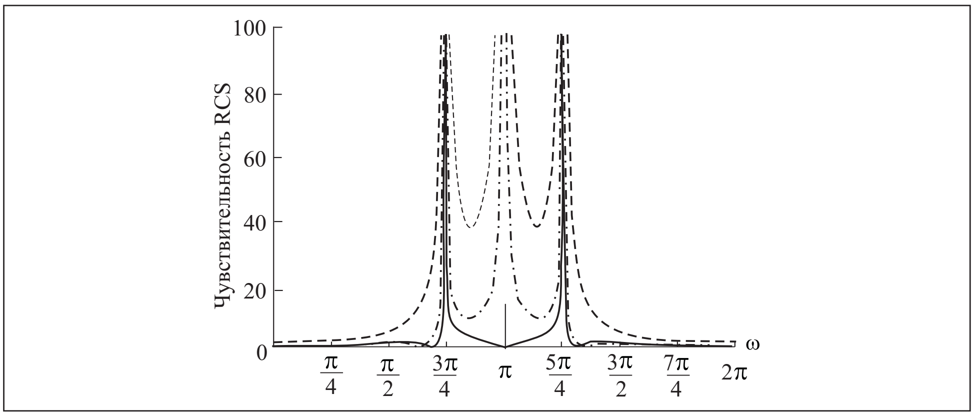
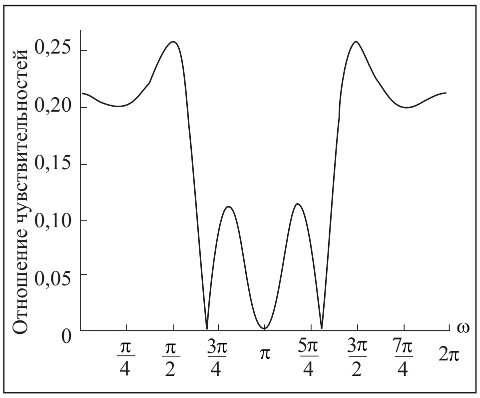


Рис. 3. Графики суммарной параметрической чувствительности цифрового фильтра при $b_1 = 0{,}102056$, $b_3 = -0{,}122795$: – – – – с вещественными коэффициентами; -·-·-·-· с гиперкомплексными коэффициентами до оптимизации; ——— с гиперкомплексными коэффициентами после оптимизации



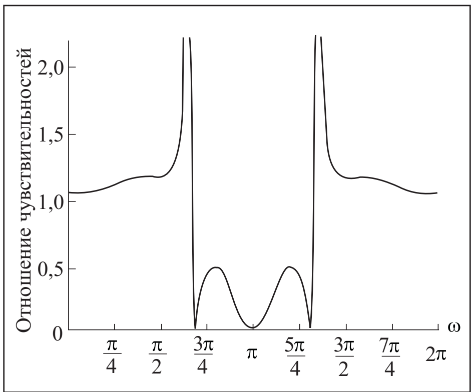


Рис. 4. Отношение параметрической чувствительности фильтра с гиперкомплексными коэффициентами после оптимизации к параметрической чувствительности с вещественными коэффициентами

Рис. 5. Отношение параметрических чувствительностей фильтров с гиперкомплексными коэффициентами до и после оптимизации

трехмерного графика функции $S_{RCS}(\omega, b_1, b_3)$ с помощью системы аналитических вычислений MAPLE. При этом возможна многоступенчатая процедура: сначала выбирается широкая область поиска, а затем она сужается (рис. 2).

На рис. 3 представлен график параметрической чувствительности вблизи одного из полученных локальных минимумов критерия оптимальности при различных значениях свободных переменных.

Отношение чувствительности фильтра с гиперкомплексными коэффициентами в системе $\Gamma(e,3)$ после оптимизации к чувствительности фильтра с вещественными коэффициентами, рассчитанной по формуле (6), но применительно к передаточной функции вида (4), показано на рис. 4, из которого видно, что в целом чувствительность полученного фильтра с гиперкомплексными коэффициентами значительно ниже, чем чувствительность вещественного фильтра.

Рассматривая графики отношений параметрических чувствительностей фильтра с гиперкомплексными коэффициентами до и после оптимизации (рис. 5), можно увидеть, что суммарная параметрическая чувствительность ниже для отдельных диапазонов частот.

Выводы

Таким образом, применение неканонических ГЧС позволяет снизить суммарную параметрическую чувствительность цифрового фильтра. Применив метод оптимизации параметрической чувствительности для некоторых значений частот ω, можно получить еще более низкие значения такой чувствительности. В то же время, точная оптимизация целевой функции $S_{RCS}(\omega, b_1, b_3)$ требует дополнительных исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Toyoshima H., Higuchi S.* Design of Hypercomplex All-Pass Filters to Realize Complex Transfer Functions // Proc. Second Int. Conf. Information, Communications and Signal Processing. — Dec. 1999. — #2B3.4. — P. 1—5.
2. *Toyoshima H.* Computationally Efficient Implementation of Hypercomplex Digital Filters // IEICE Trans. Fundamentals. — Aug. 2002. — E85-A, 8. — P. 1870—1876.
3. *Toyoshima H.* Computationally Efficient Implementation of Hypercomplex Digital Filters // Proc. Int. Conf. Acoustics, Speech, and Signal processing. — 1998. — Vol. 3. — P. 1761—1764. (May 5, 1998.)
4. *Калиновский Я.А., Бояринова Ю.Е.* Высокоразмерные изоморфные гиперкомплексные числовые системы и их использование для повышения эффективности вычислений. — Киев : Инфодрук, 2012. — 183 с.
5. *Синьков М.В., Калиновский Я.А., Бояринова Ю.Е. и др.* Разработка структур эффективных цифровых фильтров с помощью гиперкомплексного представления информации // Управління розвитком. — 2006. — № 6. — С. 83—84.
6. *Каліновський Я.О., Федоренко О.В.* Основи побудови цифрових фільтрів із гіперкомплексними коефіцієнтами // Реєстрація, зберігання і обробка даних. — 2009. — **11**, № 1. — С. 52—59.
7. *Kalinovsky J., Sinkov M., Boyarinova Y. et al.* Development of theoretical bases and toolkit for information processing in hypercomplex numerical systems // Pomiary. Automatyka. Komputery w gospodarce i ochronie srodowiska. — 2009. — № 1. — P. 18—21.
8. *Калиновский Я.А., Синьков М.В., Бояринова Ю.Е и др.* Фундаментальные основы эффективного представления информации и обработки данных на основе гиперкомплексных числовых систем // Реєстрація, зберігання і обробка даних. — 2010. — **12**, № 2. — С. 62—68.

9. *Федоренко О.В.* Модель цифрового фільтра з гіперкомплексними коефіцієнтами // Системний аналіз та інформаційні технології: матеріали X Міжн. наук.-техн. конф. — Київ: НТУУ «КПІ», 2008. — С. 413.
10. *Федоренко О.В.* Цифрові фільтри з низькою параметричною чутливістю // Реєстрація, зберігання і обробка даних. — 2008. — **10**, № 2. — С. 87—94.
11. *Синьков М.В., Калиновский Я.А., Бояринова Ю.Е.* Конечномерные гиперкомплексные числовые системы. Основы теории. Применения. — Киев: Инфодрук, 2010. — 388 с.
12. *Калиновский Я.А.* Исследование свойств изоморфизма квадриплексных и бикокомплексных числовых систем // Реєстрація, зберігання і обробка даних. — 2003. — **5**, № 1. — С. 69—73.
13. *Калиновский Я.А., Бояринова Ю.Е., Хицко Я.В.* Применение неканонических гиперкомплексных числових систем для оптимизации суммарной параметрической чувствительности реверсивных цифровых фильтров // Реєстрація, зберігання і обробка даних. — 2014. — **16**, № 4. — С. 3—11.

Y. Kalinovsky, J. Boyarinova, I. Khitsko

OPTIMIZATION OF SUMMARY PARAMETRIC SENSITIVITY
OF REVERSIBLE DIGITAL FILTERS WITH COEFFICIENTS
IN NON-CANONICAL HYPERCOMPLEX DIGITAL SYSTEMS

The method of constructing a reversible filter optimal as to parametric sensitivity based on using non-canonical hypercomplex digital systems is proposed and investigated. It is shown that the use of non-canonical HDS with a greater number of non-zero structure constants in multiplication table can significantly improve the sensitivity of the digital filter.

K e y w o r d s: non-canonical hypercomplex digital system, digital filter, hypercomplex numbers, frequency response, parametric filter sensitivity.

REFERENCES

1. Toyoshima, H. and Higuchi, S. (1999), “Design of hypercomplex all-pass filters to realize complex transfer functions”, *Proc. Second Int. Conf. Information, Communications and Signal Processing*, December, 1999, no. 2B3.4, pp.1-5.
2. Toyoshima, H. (2002), “Computationally efficient implementation of hypercomplex digital filters ”, *IEICE Trans. Fundamentals*, August, 2002, E85-A, 8, pp. 1870-1876.
3. Toyoshima, H. (1998), *“*Computationally efficient implementation of hypercomplex digital filters”, *Proc. Int. Conf. Acoustics, Speech, and Signal Processing,* Vol. 3, May 5, 1998, pp. 1761-1764. (m5May 1998.)
4. Kalinovsky, Ya.A. and Boyarinova, J.E. (2012), *Vysokorazmernye izomorfnye giperkompleksnye chislovye sistemy i ikh ispolzovanie dlya povysheniya effektivnosti vychisleniy* [High-dimensional isomorphic hypercomplex number systems and their use for calculation efficiency increase], Infodruk, Kyiv, Ukraine.
5. Sinkov, M.V., Kalinovsky, Ya.A., Boyarinova J.E. and et al. (2006), “Development of digital filters structures using hypercomplex data representation”, *Upravlinnya rozvytkom*, no. 6, pp. 83-84.
6. Kalinovsky, Ya.O. and Fedorenko, O.V. (2009), *“*Digital filters with hypercomplex coefficients development basics”, *Reyestratsiya, zberihannya i obrobka dannykh,* Vol. 11, no. 1, pp. 52-59.
7. Kalinovsky, J.O., Sinkov, M.V., Boyarinova, J.E., Fedorenko, O.V. and Sinkova, T.V. (2009), “Development of theoretical bases and toolkit for information processing in hypercomplex numerical systems”, *Pomiary. Automatyka. Komputery w gospodarce i ochronie srodowiska*, no. 1, pp. 18-21.

8. Kalinovsky, Ya.O., Sinkov, M.V., Boyarinova, J.E., Fedorenko, O.V., Sinkova, T.V. and Gorodko, N.A. (2010), "Fundamentals of effective communication of information and data on the basis of hypercomplex number systems", *Reyestratsiya, zberihannya i obrobka dannykh*, Vol. 12, no. 2, pp. 62-68.
9. Fedorenko, O.V. (2008), "Model of digital filter with hypercomplex coefficients", *Systemnyi analiz ta informatsiyni tekhnologii: materially X Mizhn. Nauk.-tekhn.konf.* [*System analysis and informational technologies: materials of X Internatinal scientific and technical conference*], Kiev, NTUU "KPI", Ukraine, p. 413.
10. Fedorenko, O.V. (2008), "Digital filters with low parametric sensitivity", *Reyestratsiya, zberihannya i obrobka dannykh*, Vol. 10, no. 2, pp. 87-94.
11. Sinkov, M.V., Kalinovsky, Ya.A. and Boyarinova, J.E. (2010), *Konechnomernye giperkompleksnye chislovye sistemy. Osnovy teorii. Primeneniya* [Finite-dimensional hypercomplex number systems. Fundamentals of the theory. Applications], Infodruk, Kyiv, Ukraine.
12. Kalinovsky, Ya.A. (2003), "Research of properties of isomorphism of quadriplex and bicomplex number systems", *Reyestratsiya, zberihannya i obrobka dannykh,* Vol. 5, no. 1, pp. 69-73.
13. Kalinovsky Ya.A., Boyarinova J.E., Khitsko I.V. (2014), "Application of noncanonical hypercomplex number systems for summary parametric sensitivity optimization of digital reversible filters", *Reyestratsiya, zberihannya i obrobka dannykh*, Vol. 16, no. 4, pp. 3-11.

Поступила 21.05.15;
после доработки 05.08.15

КАЛИНОВСКИЙ Яков Александрович, д-р техн. наук, ст. науч. сотр. Ин-та проблем регистрации информации НАН Украины. В 1965 г. окончил Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований — теория гиперкомплексных числовых систем и их применение в математическом моделировании.

БОЯРИНОВА Юлия Евгеньевна, канд. техн. наук, доцент Национального технического университета Украины «Киевский политехнический ин-т», который окончила в 1997 г. Область научных исследований — теория гиперкомплексных числовых систем и их применение в математическом моделировании.

ХИЦКО Яна Владимировна, мл. науч. сотр. Национального технического университета Украины «Киевский политехнический ин-т», который окончила в 2005 г. Область научных исследований — теория гиперкомплексных числовых систем и их применение в математическом моделировании.