УДК 536.24

В.И. Гаврыш, д-р техн. наук
Национальный университет “Львовская политехника”,
(Украина, 79013, Львов, ул. С. Бандеры, 12,
тел. (032) 2582578, e-mail: ikni.pz@gmail.com)

Моделирование температурных режимов в неоднородных элементах электронных устройств со сквозными инородными включениями

Рассмотрена стационарная задача теплопроводности для изотропной бесконечной пластины с теплоизолированными лицевыми поверхностями, содержащей инородное включение и нагреваемой локально сосредоточенным на граничной поверхности тепловым потоком. После кусочно-линейной аппроксимации температуры на граничных поверхностях включения с использованием интегрального преобразования Фурье получено численно-аналитическое решение краевой задачи. Выполнены числовые расчеты температурного поля для заданных геометрических и теплофизических параметров.

Розглянуто стаціонарну задачу теплопровідності для ізотропної безмежної пластини з теплоізольованими лицевими поверхнями, яка містить чужерідне включення та нагрівається локально зосередженим на межовій поверхні тепловим потоком. Після кусково-лінійної апроксимації температури на краях включення із використанням інтегрального перетворення Фур’є отримано аналітично-числовий розв’язок крайової задачі. Виконано числові розрахунки температурного поля для заданих геометричних і теплофізичних параметрів.

Ключевые слова: температура, теплопроводность, стационарная задача, изотропная пластина, инородное сквозное включение, идеальный тепловой контакт, тепловой поток.

От эффективности процессов тепло- и массообмена зависит температурный режим окружающей среды и жилых помещений, а также рабочие процессы в различных технологических установках. Поэтому в последние десятилетия теория теплообмена интенсивно развивалась в связи с потребностями теплоэнергетики, атомной энергетики, космонавтики и др.

В настоящее время разрабатываются способы тепловой защиты высокоскоростных летательных установок, в том числе космических многоразового действия, в активных зонах реакторов, в магнитогидродинамических генераторах (установках для прямого преобразования теплоты в электрическую энергию), в газотурбинных установках. Исследуются процессы теплообмена при низких температурах, в частности в установках с использованием эффекта сверхпроводимости, например в магнитах, создающих значительные поля. Продолжаются работы по созданию криохирургических инструментов для операций с быстрым замораживанием отдельных участков ткани. Прогресс в этой области в значительной степени связан с правильной организацией процессов теплообмена как в самом инструменте, так и в ткани. Проводятся работы по созданию установок для сублимационной сушки продуктов питания, успешная разработка которых зависит от правильной организации процессов сублимации и десублимации. Совершенствуются методы исследования процессов теплообмена на Земле и в ее атмосфере, в частности прогнозирования погоды.

Запросы различных отраслей промышленности стимулируют устойчивое и быстрое развитие исследований в области теплообмена. Наименее исследованы до настоящего времени математические модели теплообмена в сложных электронных системах с учетом кусочно-однородной структуры конструкционных элементов и их термочувствительности в определенных интервалах температур, что влияет на точность расчета температурных полей и эффективность методов проектирования электронных устройств.

Определение теплового состояния как однородных так и неоднородных конструкций привлекает внимание многих исследователей [1—6]. В [7] разработана математическая модель квазистационарного температурного поля сплошного цилиндра вращения из композитного материала с нелинейными краевыми условиями, в которых учтена зависимость теплофизических характеристик материалов от температуры. Полученные аналитические выражения для определения температурных полей позволяют подобрать состав композитных материалов для деталей цилиндрического типа с целью увеличения срока их эксплуатации. Рассмотрены одномерные (плоская, цилиндрически-симметричная и сферически-симметричная) нелинейные задачи теплопроводности для заданного потока тепла в начале координат в виде степенной функции в зависимости от времени.

Получены приближенные решения рассматриваемых задач и проанализирована их сходимость [8]. Построено аналитическое решение нелинейной задачи теплопроводности на основе интегрального метода теплового баланса [9]. Для повышения точности решения температурная функция аппроксимируется полиномами высоких степеней. Для определения коэффициентов полиномов введены дополнительные краевые условия. Показано, что введение дополнительных краевых условий уже во втором приближении приводит к значительному повышению точности решения задачи.

В работе [10] построено численно-аналитическое решение нестационарной задачи теплопроводности для полого шара, теплофизические ха-

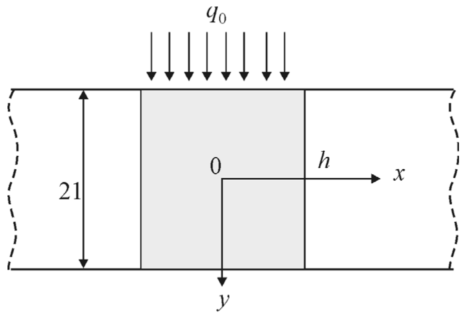

Рис. 1. Сечение изотропной бесконечной пластины с инородным сквозным включением плоскостью $z = 0$

рактеристики материала которого меняются с изменением температуры. В частном случае получено решение для сплошного шара. На основе вариационного подхода построена математическая модель нестационарной нелинейной задачи теплопроводности для двумерной среды с тонким включением, позволяющая учесть малую толщину тонкого включения. Для линеаризации сформулированной задачи применен метод Ньютона—Рафсона. Дискретизация по временной переменной выполнена согласно схеме промежуточной точки. Вариационная формулировка задачи приведена в форме минимизации функционала [11]. Работы [12—14] посвящены развитию методов решения стационарных нелинейных задач теплопроводности для конструкций двумерной кусочно-однородной структуры.

Постановка задачи и математическая модель. Рассмотрим изотропную относительно теплофизических параметров бесконечную пластину ширины $2l$ с теплоизолированными лицевыми поверхностями $|z| = \delta$, в которой содержится инородное сквозное включение объема $8hl\delta$, отнесенную к декартовой прямоугольной системе координат ($Oxyz$) с началом в центре включения. На граничных поверхностях включения $L_{\pm h} = \{(\pm h, y, z) : |y| \le l, |z| \le \delta\}$ выполняются условия идеального теплового контакта, граничная поверхность $K_+ = \{(x, z) : |x| < \infty, |z| \le \delta\}$ пластины теплоизолирована, а на другой ее граничной поверхности в прямоугольнике $\{(x, z) : |x| \le h, |z| \le \delta\}$ сосредоточен тепловой поток с поверхностной плотностью $q_0 = \text{const}$ (рис. 1).

Распределение температуры $t(x, y)$ в приведенной системе получим, решив уравнение теплопроводности [15, 16]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda(x)\frac{\partial t}{\partial x}\right] + \lambda(x)\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

с граничными условиями

$$t\big|_{|x|\to\infty}=t_c,\quad \left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_{|x|\to\infty}=0,\quad \left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_{y=l}=0,\quad \left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_{y=-l}=-q_0 S_-(h-|x|)\,, \tag{2}$$

где $\lambda(x)$ — коэффициент теплопроводности неоднородной пластины,

$$\lambda(x)=\lambda_1+(\lambda_0-\lambda_1)\,S_-(h-|x|)\,; \tag{3}$$

λ_1 и λ_0 — коэффициенты теплопроводности материалов пластины и включения; t_c — температура окружающей среды; $S_\pm(\zeta)$ — асимметричные единичные функции [17],

$$S_\pm(\zeta)=\begin{cases}1, & \zeta>0,\\ 0{,}5\mp 0{,}5, & \zeta=0,\\ 0, & \zeta<0.\end{cases}$$

Введем функцию

$$T=\lambda(x)\,\theta \tag{4}$$

и продифференцируем ее по переменной x с учетом коэффициента теплопроводности $\lambda(x)$ (3). В результате получим

$$\lambda(x)\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{\partial T}{\partial x}-(\lambda_0-\lambda_1)[\theta|_{x=-h}\,\delta_-(x+h)-\theta|_{x=h}\,\delta_+(x-h)]\,. \tag{5}$$

Здесь $\theta=t-t_c$ — избыточная температура; $\delta_\pm(\zeta)=\dfrac{dS_\pm(\zeta)}{d\zeta}$ — асимметричные дельта-функции Дирака [17]. Подставляя выражение (5) в соотношение (1), приходим к дифференциальному уравнению в частных производных с сингулярными коэффициентами

$$\Delta T-(\lambda_0-\lambda_1)[\theta|_{x=-h}\,\delta_-(x+h)-\theta|_{x=h}\,\delta_+(x-h)]=0, \tag{6}$$

где Δ — оператор Лапласа в декартовой прямоугольной системе координат, $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Итак, искомое температурное поле в рассмотренной системе полностью определяется из (6) при граничных условиях (2).

Решение краевой задачи. Аппроксимируем функцию $\theta(\pm h,y)$ (рис. 2) выражением

$$\theta(\pm h,y)=\theta_1^\pm+\sum_{j=1}^{n-1}(\theta_{j+1}^\pm-\theta_j^\pm)\,S_-(y-y_j)\,, \tag{7}$$

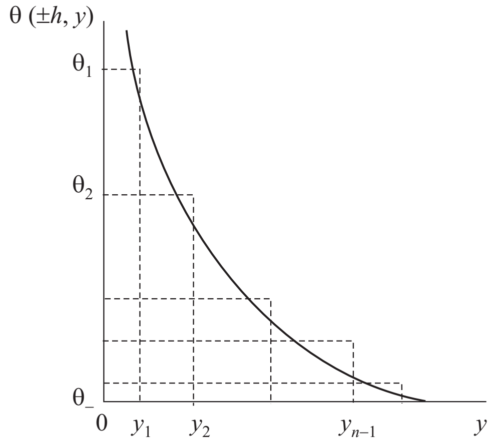

Рис. 2. Аппроксимация функции $\theta(\pm h, y)$

где $y_j \in \,]-l;\ l[$; $y_1 \le y_2 \le \ldots \le y_{n-1}$; $\theta_j^{\pm}$ $(j = \overline{1,n})$ — неизвестные аппроксимирующие значения избыточной температуры. Подставив (7) в уравнение (6), получим

$$\Delta T = (\lambda_0 - \lambda_1)\left\{\left[\theta_1^- + \sum_{j=1}^{n-1}(\theta_{j+1}^- - \theta_j^-)\,S_-(y - y_j)\right]\delta'_+(x+h) - \right.$$

$$\left. - \left[\theta_1^+ + \sum_{j=1}^{n-1}(\theta_{j+1}^+ - \theta_j^+)\,S_-(y - y_j)\right]\delta'_+(x-h)\right\}. \qquad (8)$$

Применив интегральное преобразование Фурье по координате x к уравнению (8) и граничным условиям (2) с учетом соотношения (4), приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2\overline{T}}{dy^2} - \xi^2\overline{T} = \frac{i\xi}{\sqrt{2\pi}}(\lambda_0 - \lambda_1)\left\{e^{i\xi h}\left[\theta_1^+ + \sum_{j=1}^{n-1}(\theta_{j+1}^+ - \theta_j^+)\,S_-(y - y_j)\right] - \right.$$

$$\left. - e^{-i\xi h}\left[\theta_1^- + \sum_{j=1}^{n-1}(\theta_{j+1}^- - \theta_j^-)\,S_-(y - y_j)\right]\right\}. \qquad (9)$$

и граничным условиям

$$\left.\frac{d\overline{T}}{dy}\right|_{y=l} = 0, \quad \left.\frac{d\overline{T}}{dy}\right|_{y=-l} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{q_0}{\xi}\sin\xi h, \qquad (10)$$

где $\overline{T}$ — трансформанта функции, $\overline{T}=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\xi x}Td\xi$; ξ — параметр интегрального преобразования Фурье; $i=\sqrt{-1}$ — мнимая единица.

Общее решение уравнения (9) найдем с помощью метода вариации постоянных в виде

$$\overline{T}=C_1e^{\xi y}+C_2e^{-\xi y}+$$
$$+\frac{i}{\xi\sqrt{2\pi}}(\lambda_0-\lambda_1)\left\{e^{-i\xi h}\left[\theta_1^-+\sum_{j=1}^{n-1}(\theta_{j+1}^--\theta_j^-)(1-ch\xi(y-y_j))S_-(y-y_j)\right]-\right.$$
$$\left.-e^{i\xi h}\left[\theta_1^++\sum_{j=1}^{n-1}(\theta_{j+1}^+-\theta_j^+)(1-ch\xi(y-y_j))S_-(y-y_j)\right]\right\},$$

где C_1, C_2 — постоянные интегрирования. Использовав граничные условия (10), получим частичное решение задачи (9), (10):

$$\overline{T}=\frac{i}{\xi\sqrt{2\pi}}(\lambda_0-\lambda_1)\left\{e^{-i\xi h}\left[\theta_1^-+\sum_{j=1}^{n-1}(\theta_{j+1}^--\theta_j^-)\left(\frac{ch\xi(y+l)}{sh2\xi l}sh\xi(l-y_j)+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.+(1-ch\xi(y-y_j))S_-(y-y_j)\right)\right]-$$
$$-e^{i\xi h}\left[\theta_1^++\sum_{j=1}^{n-1}(\theta_{j+1}^+-\theta_j^+)\left(\frac{ch\xi(y+l)}{sh2\xi l}sh\xi(l-y_j)+\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+(1-ch\xi(y-y_j))S_-(y-y_j)\right)\right]\right\}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{q_0}{\xi^2}\frac{ch\xi(y-l)}{sh2\xi l}\sin\xi h. \qquad (11)$$

Применив обратное интегральное преобразование Фурье к соотношению (11), получим

$$T(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{\xi}\{(\lambda_0-\lambda_1)\left[\sin\xi(x+h)\times\right.$$
$$\times\left(\theta_1^-+\sum_{j=1}^{n-1}(\theta_{j+1}^--\theta_j^-)\left(\frac{ch\xi(l+y)}{sh2\xi l}sh\xi(l-y_j)+(1-ch\xi(y-y_j)\right)S_-(y-y_j))\right)-$$
$$-\sin\xi(x-h)\left(\theta_1^++\sum_{j=1}^{n-1}(\theta_{j+1}^+-\theta_j^+)\left(\frac{ch\xi(l+y)}{sh2\xi l}sh\xi(l-y_j)+\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+(1-ch\xi(y-y_j))S_-(y-y_j))\right)\right]+\frac{2q_0}{\xi}\cos\xi x\sin\xi h\frac{ch\xi(y-l)}{sh2\xi l}\right\}d\xi. \qquad (12)$$

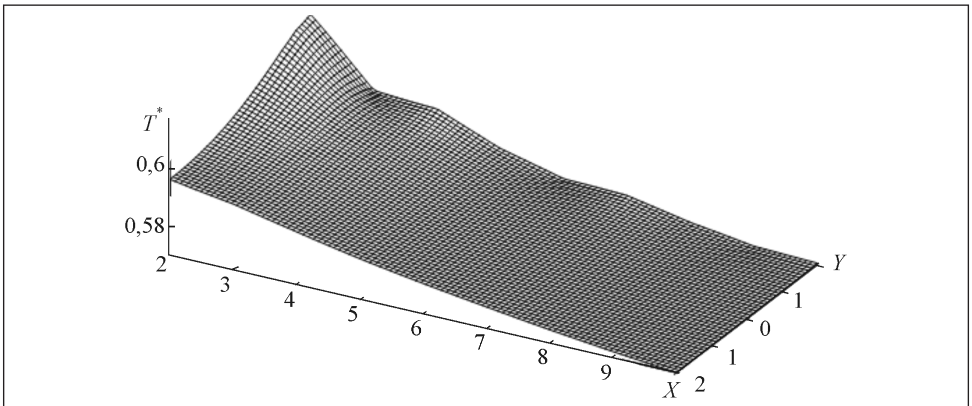

Рис. 3. Зависимость безразмерной температуры T^* от безразмерных координат X и Y

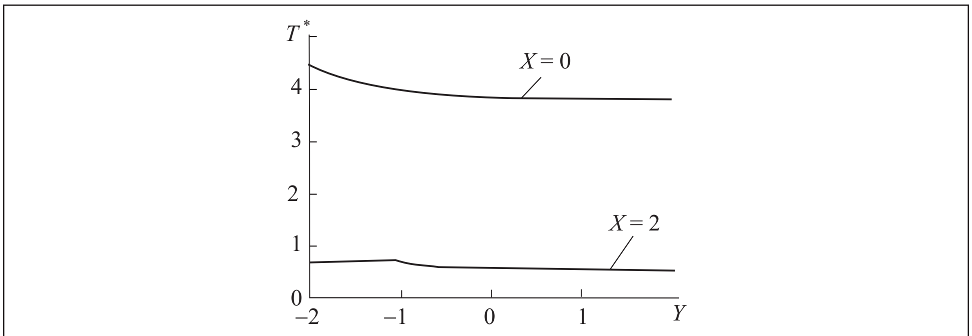

Рис. 4. Графики зависимости безразмерной температуры T^* от безразмерной координаты Y

Неизвестные аппроксимирующие значения $\theta_j^{\pm}$ $(j=\overline{1,n})$ избыточной температуры находим, решив систему $2n$ линейных алгебраических уравнений, полученную из (12).

Итак, искомое температурное поле в бесконечной пластине с теплоизолированными лицевыми поверхностями со сквозным включением, нагреваемой локально сосредоточенным на граничной поверхности тепловым потоком, описывает формула (12), из которой получаем значение температуры в произвольной точке пластины.

Анализ численных результатов выполнен при безразмерной избыточной температуре $T^* = \lambda_0\theta/(q_0 h)$ для следующих исходных данных: материал слоя — кремний ($\lambda_1 = 67W/(m\times K)$), материал включения — серебро ($\lambda_0 = 419W/(m\times K)$), $n=10$ — число разбиений интервала $]-l:l[$; $L=l/h=1$.

На рис. 3 представлена зависимость температуры T^* от безразмерных координат $X=x/h$ и $Y=y/h$. Как видим, температура достигает максимума в области действия локально сосредоточенного теплового потока, а на граничных поверхностях включения наблюдается выполнение условий идеального теплового контакта (отсутствует скачок температуры), что соответствует рассматриваемой математической модели.

На рис. 4 представлены кривые изменения температуры T^* в зависимости от координаты Y при различных значениях X. Как видно из рис. 4, температура изменяется линейно в пластине вне включения ($X = 2$) и практически является постоянной. В области включения ($X = 0$) она изменяется по кривой к его центру, а в дальнейшем — практически становится постоянной. Численные результаты соответствуют предложенной математической модели. Число разбиений $n = 10$ интервала $]-l; l[$ для указанных коэффициентов теплопроводности (материалов пластины и включения) и геометрических параметров (ширины пластины и длины включения) конструкции позволяет выполнить вычисления с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$.

Выводы

Полученное с помощью интегрального преобразования Фурье численно-аналитическое решение (12) граничной задачи теплопроводности (1), (2) позволяет в произвольной точке рассматриваемой структуры вычислять значения температуры на основе разработанного алгоритма и программных средств, прогнозировать режимы работы отдельных элементов электронных устройств и идентифицировать неизвестные параметры, что способствует повышению термопрочности и увеличивает срок их эксплуатации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Carpinteri A., Paggi M.* Thermoelastic mismatch in nonhomogeneous beams // J. Eng. Math. — 2008. — Vol. 61, No 2—4. — P. 371—384.
2. *Noda N.* Thermal stresses in materials with temperature-dependent properties // Appl. Mech. Rev. — 1991. — Vol. 44. — P. 383—397.
3. *Otao Y., Tanigawa O., Ishimaru O.* Optimization of material composition of functionality graded plate for thermal stress relaxation using a genetic algorithm // J. Therm. Stresses. — 2000. — Vol. 23. — P. 257—271.
4. *Tanigawa Y., Akai T., Kawamura R.* Transient heat conduction and thermal stress problems of a nonhomogeneous plate with temperature-dependent material properties // Ibid. — 1996. — Vol. 19, No 1. — P. 77—102.
5. *Tanigawa Y., Otao Y.* Transient thermoelastic analysis of functionally graded plate with temperature-dependent material properties taking into account the thermal radiation // Nihon Kikai Gakkai Nenji Taikai Koen Ronbunshu. — 2002. — Vol. 2. — P. 133—134.
6. *Yangian Xu, Daihui Tu.* Analysis of steady thermal stress in a ZrO2/FGM/Ti-6Al-4V composite ECBF plate with temperature-dependent material properties by NFEM //2009-WASE Int. Conf. on Informa. Eng. Vol. 2 —2. — P. 433—436.
7. *Голицына Е.В., Осипов Ю.Р.* Квазистационарная трехмерная задача теплопроводности во вращающемся сплошном цилиндре из композиционного материала с нелинейными граничными условиями// Конструкции из композиционных материалов. — 2007. — № 4. — С. 47—58.

8. *Кудряшов Н.А., Чмыхов М.А.* Приближенные решения первой и второй краевых задач нелинейной теплопроводности на полубесконечной прямой // Инженерная физика. — 2007. — № 3. — С. 12—15.
9. *Kudinov V.A., Averin B.V., Stefanyuk E.V., Nazarenko S.A.* Analysis of nonlinear heat conduction based on determining the front of temperature perturbation // High Temperature. — 2006. — Vol. 44, No 4. — P. 574—583.
10. *Попович В.С., Іванків К.С.* Нелінійна задача теплопровідності для кулі з теплообміном // Вісн. Львівського ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика. — 2002. — № 5. — С. 136—144.
11. *Савула Я.Г., Дяконюк Л.М.* Дослідження варіаційної задачі теплопровідності у багатошарових середовищах з тонкими включеннями // Вісн. ЛНУ ім. І. Франка, Сер. прикл. матем. та інформат. — 2000. — № 3. — С. 125—130.
12. *Havrysh V.I., Kosach A.I.* Boundary-value problem of heat conduction for a piecewise homogeneous with foreign inclusion // Materials Science. — 2012. — Vol. 47, No 6. — P. 773—782.
13. *Havrysh V.I., Fedasyuk D.V., Kosach A.I.* Boundary-value problem of heat conduction for a layer with foreign cylindrical inclusion // Material Science. — 2011. — Vol. 46, No 5. — P. 702—708.
14. *Гавриш В.І., Федасюк Д.В.* Моделювання температурних режимів у кусково-однорідних структурах. — Львів : В-во Нац. ун-ту «Львівська політехніка», 2012. — 176 с.
15. *Коляно Ю.М.* Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. — Киев: Наук. думка, 1992. — 280 с.
16. *Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М.* Термоупругость тел неоднородной структуры. — М. : Наука, 1984. — 368 с.
17. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М. : Наука, 1977. — 720 с.

V.I. Havrysh

MODELING OF TEMPERATURE CONDITIONS IN NON-HOMOGENEOUS ELEMENTS OF ELECTRONIC DEVICES WITH THROUGH FOREIGN INCLUSIONS

The paper considers a stationary heat conduction problem for isotropic infinite plate having heat-insulated faces, containing a foreign inclusion and being warmed by a heat flow locally concentrated on the boundary surface. After the piecewise-linear approximation of the temperature on the boundary surfaces of the inclusion and after the application of integral Fourier transform, an analytical-numerical solution of the input boundary-value problem is obtained. Numerical calculations of temperature field were conducted and analyzed for the preset geometrical and thermophysical parameters.

K e y w o r d s: temperature, thermal conductivity, steady-state problem, isotropic plate, through foreign inclusions, perfect thermal contact, heat flow.

REFERENCES

1. Carpinteri, A. and Paggi, M. (2008), “Thermoelastic mismatch in nonhomogeneous beams”, *J. Eng. Math*., Vol. 61, no. 2-4, pp. 371-384.
2. Noda, N. (1991), “Thermal stresses in materials with temperature-dependent properties”, *Appl. Mech. Rev*., Vol. 44, pp. 383-397.
3. Otao, Y., Tanigawa, O. and Ishimaru, O. (2000), “Optimization of material composition of functionality graded plate for thermal stress relaxation using a genetic algorithm”, *J. Therm. Stresses,* Vol. 23, pp. 257-271.

4. Tanigawa, Y., Akai, T. and Kawamura, R. (1996), "Transient heat conduction and thermal stress problems of a nonhomogeneous plate with temperature-dependent material properties", *J. Therm. Stresses,* Vol. 19, no. 1, pp. 77-102.
5. Tanigawa, Y. and Otao, Y. (2002), "Transient thermoelastic analysis of functionally graded plate with temperature-dependent material properties taking into account the thermal radiation", *Nihon Kikai Gakkai Nenji Taikai Koen Ronbunshu,* Vol. 2, pp. 133-134.
6. Yangian, Xu. and Daihui, Tu. (2009), "Analysis of steady thermal stress in a ZrO2/FGM/Ti-6Al-4V composite ECBF plate with temperature-dependent material properties by NFEM", *2009-WASE Int. Conf. on Inform. Eng.,* Vol. 2-2, pp. 433-436.
7. Golitsyna, E.V. and Osipov, Yu.P. (2007), "Quasi-stationary three-dimensional heat conduction problem in a rotatable continuous cylinder of composition material with nonlinear boundary conditions", *Konstruktsii iz kompozitsionnykh materialov* , no. 4, pp. 47-58.
8. Kudryashov, N.A. and Chmykhov, M.A. (2007), "Approximate solutions of the first and second boundary value problems of nonlineat heat conduction on semi-infinite line", *Inzhenernaya fizika*, no. 3, pp. 12-15.
9. Kudinov, V.A., Averin, B.V., Stefanyuk, E.V. and Nazarenko, S.A. (2006), "Analysis of nonlinear heat conduction based on determining the front of temperature perturbation", *High Temperature,* Vol. 44, no. 4, pp. 4-83.
10. Popovych, V.S. and Ivankiv, K.S. (2002), "Nonlinear heat conduction problem for a sphere with heat exchange", *Visnyk Lvivskoho un-tu, Ser. Prykladna matematyka ta informatyka*, no. 5, pp. 136-144.
11. Savula, Ya.G. and Dyakonyuk, L.M. (2000) "Study of variation heat conduction problem in multilayer media with fine inclusions", *Visnyk Lvivskoho un-tu, Ser. Prykladna matematyka ta informatyka*, no. 3, pp. 125-130.
12. Havrysh, V.I. and Kosach, A.I. (2012), "Boundary-value problem of heat conduction for a piecewise homogeneous with foreign inclusion", *Material Science*, Vol. 47, no 6, pp. 773- 782.
13. Havrysh, V.I., Fedasyuk, D.V. and Kosach, A.I. (2011) "Boundary-value problem of heat conduction for a layer with foreign cylindrical inclusion", *Material Science,* Vol. 46, no 5, pp. 702-708.
14. Havrysh, V.I. and Fedasyuk, D.V. (2012), *Modelyuvannya temperaturnykh rezhymiv u kuskovo-odnoridnykh strukturakh* [Modeling of temperature conditions in piecewise-homogeneous structures], Vydavnytstvo Nat. Un-tu "Lvivska politekhnika", Lviv, Ukraine.
15. Kolyano, Yu.M. (1992), *Metody teploprovodnosti I termouprugosti neodnorodnogo tela* [Methods of heat conduction and thermoelasticity of inhomogeneous body], Naukova dumka, Kiev, Ukraine.
16. Podstrigach, Ya.S., Lomakin, V.A. and Kolyano, Yu.M. (1984), *Termouprugost tel neodnorodnoi struktury* [Thermoelasticity of bodies with inhomogeneous structure], Nauka, Moscow, Russia.
17. Korn, G. and Korn, T. (1977), *Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov* [Reference book for scientific workers and engineers], Nauka, Moscow, Russia.

Поступила 26.12.14

ГАВРЫШ Василий Иванович, д-р техн. наук, доцент, доцент Национального университета «Львовская политехника». В 1982 г. окончил Львовский ордена Ленина государственный университет им. И. Франко. Область научных исследований — моделирование процессов теплопроводности в телах кусочно-однородной структуры и разработка методов решения линейных и нелинейных граничных задач теплопроводности.