
УДК 621.365.5:004.94

А.Д. Подольцев, И.Н. Кучерявая, доктора техн. наук
Институт электродинамики НАН Украины
(Украина, 03680, Киев, пр. Победы, 56,
тел. (044) 3662568, e-mail: podol@ied.org.ua)

Мультифизическое моделирование процессов индукционного нагрева и плавления проводящих заготовок с концентратором магнитного потока

Проведено компьютерное моделирование связанных электромагнитного, теплового и гидродинамического процессов в установке индукционного нагрева и плавления металлов с концентратором магнитного потока с учетом неравномерности распределения плотности тока в массивных витках индуктора и в концентраторе в широком диапазоне изменения частоты (1—150 кГц). Показано, что для получения высокого КПД при нагревании металлов с высокой электропроводностью частота тока в индукторе должна быть не менее 20—25 кГц.

Проведено комп'ютерне моделювання зв'язаних електромагнітного, теплового та гідродинамічного процесів в установці індукційного нагріву і плавлення металів з концентратором магнітного потоку з урахуванням нерівномірності розподілення густини струму в масивних витках індуктора та в концентраторі в широкому діапазоні зміння частоти (1—150 кГц). Показано, що для досягнення високого ККД при нагріванні металів з високою електропровідністю частота струму в індукторі повинна бути не менше 20—25 кГц.

К л ю ч е в ы е с л о в а: мультифизическое моделирование, высокочастотный индукционный нагрев, концентратор магнитного потока, гидродинамические процессы.

Индукционный нагрев широко применяется в различных технологических процессах, в том числе в металлообработке, термообработке проводящих сред [1, 2]. Преимуществом индукционного нагрева является возможность достижения высокой температуры в нагреваемом материале, вплоть до температуры плавления, а также равномерное распределение температуры в объеме материала при использовании самой доступной формы энергии — электрической.

Основы численного расчета электромагнитных и тепловых процессов при индукционном нагреве изложены в работах [2, 3], а результаты исследований процессов индукционного нагрева при высокой частоте — в работах [4, 5]. Подходы к моделированию движения расплавленного материала под воздействием электромагнитной силы описаны в [6]. В указанных работах использованы приближенные модели для индуктора при

© А.Д. Подольцев, И.Н. Кучерявая, 2015

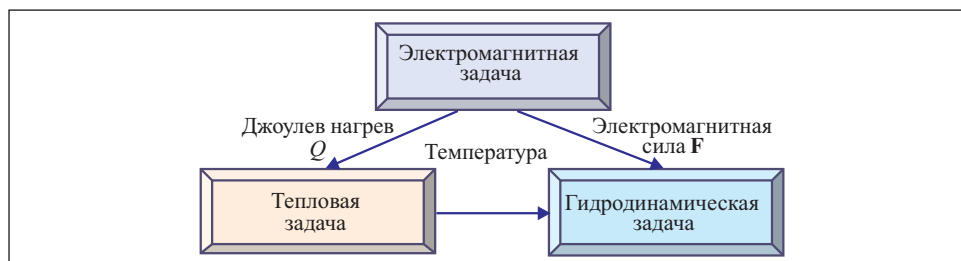


Рис. 1. Схема связи задач индукционного нагрева и передачи данных между ними

условии, что плотность тока распределена равномерно по сечению его витков или равномерно по глубине скин-слоя в массивных витках. При этом значения КПД для учета потерь электроэнергии в индукторе и в нагреваемой заготовке рассчитаны приближенно.

При нагреве и плавлении малых объемов благородных металлов (менее 1 см^3) целесообразно использовать концентратор магнитного потока [3, 7], помещенный внутрь многovitкового индуктора. Такой концентратор представляет собой один виток из высокопроводящего материала (медь, бронза), в котором выполняется осевой разрез так, что токи на его внешней и внутренней поверхностях имеют противоположное направление, а полный ток в осевом сечении равен нулю. Такой концентратор позволяет сконцентрировать магнитный поток, создаваемый индуктором, в малом объеме заготовки, повышая тем самым интенсивность ее нагрева. Вместе с тем, в концентраторе возникают дополнительные потери электроэнергии.

Постановка задачи и математическое описание физических процессов. Представляет интерес разработка математической модели и вычислительных средств для численного расчета и анализа основных физических процессов при высокочастотном индукционном нагреве и плавлении проводящих заготовок, находящихся в керамическом тигле, с детальным учетом распределения плотности тока в массивных витках индуктора и при наличии концентратора магнитного потока. Будем исследовать особенности проявления скин-эффекта и эффекта близости в массивных витках индуктора и в объеме концентратора в широком диапазоне изменения частоты протекающего в них тока ($1\text{—}150 \text{ кГц}$) и влияния этих эффектов на величину КПД установки.

На рис. 1 представлена схема слабосвязанных между собой электромагнитных, тепловых и, при достижении плавления заготовки, гидродинамических процессов в активной зоне индукционной установки. Исследуем основные физические процессы, протекающие в зоне нагрева индукционной установки, предназначенной для плавки малых объемов благородных металлов (рис. 2, а, см. вклейку).

Установка в общем случае содержит высокочастотный полупроводниковый источник питания мощностью 1—10 кВт и частотой 20—150 кГц, водоохлаждаемый индуктор, состоящий из шести витков, выполненных из медной трубки, концентратор магнитного потока и керамический тигель с нагреваемой заготовкой, помещенной внутрь индуктора. Следует заметить, что использование концентратора потока вызывает дополнительные потери энергии, которые должны быть учтены [7]. Конструкции индуктора, концентратора и тигля близки к осесимметричным, что позволяет рассматривать модель системы индукционного нагрева как двумерную и использовать цилиндрическую систему координат $r\theta z$ (рис. 2, б).

Представим математические модели основных физических процессов, протекающих при нагреве и плавлении заготовок в описанной установке.

Электромагнитная задача. Предполагаем, что в каждом витке индуктора протекает известной величины гармонический ток \dot{I} , создаваемый внешним источником питания. Электромагнитные процессы в индукционной системе описываются следующей системой дифференциальных уравнений относительно комплексного векторного магнитного потенциала, имеющего единственную составляющую $\dot{A}_\varphi : \dot{\mathbf{A}} = (0, \dot{A}_\varphi, 0)$.

В области заготовки

$$j\omega\sigma\dot{\mathbf{A}} + \nabla \times (\mu_0^{-1} \nabla \times \dot{\mathbf{A}}) = 0; \quad (1)$$

в области i -го витка индуктора

$$j\omega\sigma\dot{\mathbf{A}} + \nabla \times (\mu_0^{-1} \nabla \times \dot{\mathbf{A}}) = \sigma\dot{U}_i / (2\pi r),$$

$$\dot{I} + \int_{S_i} j\omega\sigma \dot{A}_\varphi dS_i$$

$$\dot{U}_i = \frac{S_i}{\sigma \int_{S_i} 1/(2\pi r) dS_i}, \quad (2)$$

$$\dot{I} = \int_{S_i} \dot{J}_\varphi dS, \quad \dot{J}_\varphi = -j\omega\sigma \dot{A}_\varphi + \sigma\dot{U}_i / (2\pi r), \quad i=1, \dots, 6;$$

в области концентратора магнитного потока

$$j\omega\sigma\dot{\mathbf{A}} + \nabla \times (\mu_0^{-1} \nabla \times \dot{\mathbf{A}}) = \sigma\dot{U}_k / (2\pi r),$$

$$\int_{S_k} j\omega\sigma \dot{A}_\varphi dS_k$$

$$\dot{U}_k = \frac{S_k}{\sigma \int_{S_k} 1/(2\pi r) dS_k}, \quad \dot{I} = \int_{S_i} \dot{J}_\varphi dS = 0, \quad (3)$$

$$\dot{J}_\varphi = -j\omega\sigma \dot{A}_\varphi + \sigma\dot{U}_k / (2\pi r);$$

в керамическом тигле и окружающем воздухе

$$\nabla \times (\mu_0^{-1} \nabla \times \dot{\mathbf{A}}) = 0. \quad (4)$$

Здесь σ — электропроводность материала (зависимость электропроводности от температуры в расчетах не учитывалась); ω — угловая частота; j — мнимая единица; μ_0 и ε_0 — соответственно магнитная и диэлектрическая проницаемости вакуума, $\mu_0 = 1,256 \cdot 10^{-6}$, $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м; \dot{I} — электрический ток, протекающий в витках индуктора (заданная величина); \dot{J}_φ — плотность тока в индукторе; r — радиальная координата; S_i и S_k — поперечное сечение i -го витка индуктора и концентратора; \dot{U}_i и \dot{U}_k — первоначально неизвестные электрическое напряжение, приложенное к i -му витку индуктора, и напряжение на концентраторе.

Комплексная величина полного напряжения, приложенного к индуктору, определяется как алгебраическая сумма напряжений на всех его шести витках $\dot{U}_n = \sum_{i=1}^6 \dot{U}_i$. Величина этого напряжения учитывается при

разработке источника питания и расчете активной и реактивной мощностей, потребляемых системой индуктор — концентратор — заготовка. Зависящее от частоты эквивалентное комплексное сопротивление такой системы определяется так: $\dot{Z} = \dot{U}_n / \dot{I}$. Граничными условиями задачи (1)–(4) приняты условия симметрии на оси Oz (см. рис. 2, б) и магнитной изоляции на внешних границах расчетной области $\dot{A}_\varphi = 0$.

Тепловая задача. Витки индуктора и концентратор охлаждаются с помощью проточной воды. Это позволяет предположить, что температура в их объеме не зависит от мощности выделяемых джоулевых потерь и равна 70°C .

Математическая модель нестационарного теплового процесса индукционного нагрева заготовки включает дифференциальное уравнение

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \lambda \nabla T = \begin{cases} Q & \text{в области заготовки,} \\ 0 & \text{в остальных областях.} \end{cases} \quad (5)$$

Здесь $\rho = \rho(T)$, $C_p = C_p(T)$, $\lambda = \lambda(T)$ — плотность, удельная теплоемкость, теплопроводность материала соответствующей среды, зависящие от температуры T ; Q — удельная мощность источника тепла, обеспечивающая индукционный нагрев заготовки наведенными токами,

$$Q = \frac{j j^*}{\sigma} = \omega^2 \sigma (\dot{A}_\varphi \dot{A}_\varphi^*), \quad (6)$$

где $J = -j\omega\sigma A_\varphi$ — действующее значение плотности наведенного тока в объеме заготовки; \dot{A}_φ^* — комплексно-сопряженное значение магнитного потенциала. Передачей тепла в результате конвекции и излучения пре-

небрегаем, учитывая относительно малый вклад этих механизмов по сравнению с передачей тепла в результате теплопроводности.

Для тепловой задачи принимаем граничное условие Неймана $\partial T / \partial r = 0$ на оси симметрии (на границе Oz). В области водоохлаждаемых индуктора и концентратора полагаем $T = 70$ °С. На внешних границах расчетной области (см. рис. 2, б) задаем условие теплообмена с окружающей средой вида $-\lambda \partial T / \partial \mathbf{n} = k(T - T_0)$, где k — коэффициент теплоотдачи; T_0 — температура окружающей среды; \mathbf{n} — вектор внешней нормали к границе.

Следует заметить, что электромагнитная и тепловая задачи связаны посредством джоулева тепла, определяемого по формуле (6).

Гидродинамическая задача. Исследуем режим нагрева заготовки до температуры плавления и перехода материала в расплавленное состояние. Для реализации технологии получения различных сплавов посредством введения добавок в расплав исходного материала представляет практический интерес изучение эффективности перемешивания расплавленного металла под воздействием электромагнитных сил. Рассмотрим гидродинамическую задачу в объеме заготовки при условии нагрева материала выше температуры плавления. При расчете гидродинамических процессов полагаем, что расплав является вязкой несжимаемой жидкостью, а его течение — ламинарное.

Процессы движения расплавленного металла в керамическом тигле описываются уравнениями сохранения количества движения (уравнением Навье—Стокса),

$$\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nabla \cdot [-p\mathbf{I} + \eta(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \cdot \mathbf{v})^T) - (2\eta/3)(\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{I}] + \mathbf{F}, \quad (7)$$

и сохранения массы или уравнением неразрывности:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (8)$$

Здесь неизвестными величинами являются \mathbf{v} — вектор скорости металла и p — давление; η — динамическая вязкость; ρ — плотность расплавленного материала; \mathbf{I} — единичный тензор; $\mathbf{F} = (F_r, F_z)$ — объемная плотность электромагнитной силы (силы Лоренца) в расплавленном материале, средняя за время $T = 2\pi / \omega$, компоненты которой имеют вид $F_r = 0,5 \operatorname{Re}(J_\varphi \dot{B}_z^*)$, $F_z = -0,5 \operatorname{Re}(J_\varphi \dot{B}_r^*)$, где \dot{B}_r, \dot{B}_z — составляющие магнитной индукции; Re — действительная часть комплексной величины; * — комплексно-сопряженная величина. В качестве граничных условий на оси $r = 0$ задано условие осевой симметрии, а на границах тигля — условие твердых стенок.

Электромагнитная задача (1)—(4) и гидродинамическая задача связаны величиной электромагнитной силы \mathbf{F} в уравнении (7).

Результаты компьютерных расчетов. Связанные задачи расчета электромагнитного поля (1)—(4), температурного поля (5), (6) и поля те-

чения расплавленного материала (7), (8) с учетом приведенных граничных условий и начальных условий вида $\dot{A}_\varphi|_{t=0}=0$, $T|_{t=0}=T_0$, $\mathbf{v}|_{t=0}=0$, $p|_{t=0}=0$ решались методом конечных элементов в вычислительной среде программы Comsol Multiphysics [8]. Согласно классификации мультифизических задач, принятой в работах [9, 10], связь между поставленными задачами слабая, и задачи решаются одна за другой в такой последовательности: электромагнитная, тепловая, гидродинамическая.

Результаты численного моделирования физических процессов приведены на рис. 3, 4, 6, 8 (см. вклейку) и рис. 5.

Для расчетов приняты следующие исходные данные.

Тигель:

материал	Керамика
высота, мм	20
ширина, мм	
по дну	15
по верху	17,5
толщина стенки, мм	2,5
высота наполнения, мм	16

Индуктор — водоохлаждаемая трубка:

материал	Медь
число витков	6
внутренний диаметр, мм	3,6
расстояние между витками, мм	5
ток в витках, А	200
частота тока, кГц	1—150

Концентратор магнитного потока:

материал	Медь
площадь поперечного сечения, м ²	0,006297
потери мощности, Вт (рис. 5, а)	21—404

Заготовка:

материал	Золото
электропроводность, см/м	$42 \cdot 10^6$
плотность, кг/м ³	19320
теплоемкость, Дж/(кг · К)	132
теплопроводность, Вт/(м · К)	320
температура плавления, °С	1064,2
эффективная вязкость расплава, Па · с	0,095

Тепловая задача:

температура окружающей среды, °С	20
коэффициент теплоотдачи, Вт/(м ² · К)	2

Расчеты электромагнитного поля. Распределения в расчетной области магнитного потенциала $|\dot{A}_\varphi|$, магнитной индукции $|\mathbf{B}|$ и вектора \mathbf{B} при частоте тока в индукторе $f = 100$ кГц показаны на рис. 3 (см. вклейку), из ко-

того видно, что магнитное поле концентрируется в области между внешней поверхностью заготовки и внутренней поверхностью концентратора.

Распределение плотности тока по сечению витков индуктора, концентратора и заготовки зависит от частоты тока в индукторе. Это видно из рис. 4 (см. вклейку), где показаны распределения $|\mathbf{J}|$ при различной частоте тока в индукторе. При низкой частоте (1—5 кГц) распределение плотности тока по сечению каждого витка индуктора приблизительно равномерное. С возрастанием частоты плотность тока концентрируется на внутренних поверхностях витков.

На рис. 5 приведены зависимости от частоты тока f в индукторе энергетических характеристик процесса передачи электрической энергии в заготовку: мощности, выделяемой в заготовке P_3 , в индукторе P_i и в концентраторе P_k (см. рис. 5, а); электрического КПД индукционного нагрева $\eta = P_3 / (P_i + P_3 + P_k)$ (см. рис. 5, б); времени $t_{пл}$, необходимого для нагрева заготовки до температуры плавления $T_{пл}$ при выбранной частоте, и электрической энергии $W = (P_3 + P_i + P_k)t_{T=T_{пл}}$, необходимой для нагрева заготовки до температуры $T_{пл}$ (см. рис. 5, в). Заметим, что при частоте ниже 90 кГц температура $T_{пл}$ в материале заготовки при индукционном нагреве не достигается.

На основании полученных результатов можно сделать следующие выводы.

Для концентратора характерны относительно большие потери мощности, которые превышают суммарную мощность, выделяемую в индукторе и заготовке (см. рис. 5, а).

Электропроводность материалов индуктора и заготовки приблизительно одинакова, поэтому с увеличением частоты потери в них возрастают в равной степени (см. рис. 5, а). В связи с этим величина КПД при частоте выше 20 кГц не существенно зависит от частоты f (см. рис. 5, б).

Существует пороговая частота, ниже которой эффективность энергопреобразования оказывается невысокой (см. рис. 5, б). При относительно низкой частоте (менее 20 кГц) КПД снижается, так как сопротивление индуктора в этом диапазоне несущественно зависит от частоты (плотность тока распределена практически равномерно по толщине медной трубки), а сопротивление заготовки снижается с уменьшением частоты вследствие увеличения толщины скин-слоя в заготовке.

С возрастанием частоты увеличивается потребляемая индуктором и концентратором мощность, а время, за которое заготовка расплавляется, уменьшается (см. рис. 5, в). При частоте ниже 90 кГц вследствие малой потребляемой мощности в заготовке температура $T_{пл}$ не достигается и в системе устанавливается баланс мощности при меньшей температуре (когда электрическая мощность, передаваемая в заготовку, вся рассеивается в виде тепла в окружающей среде, индукторе и концентраторе).

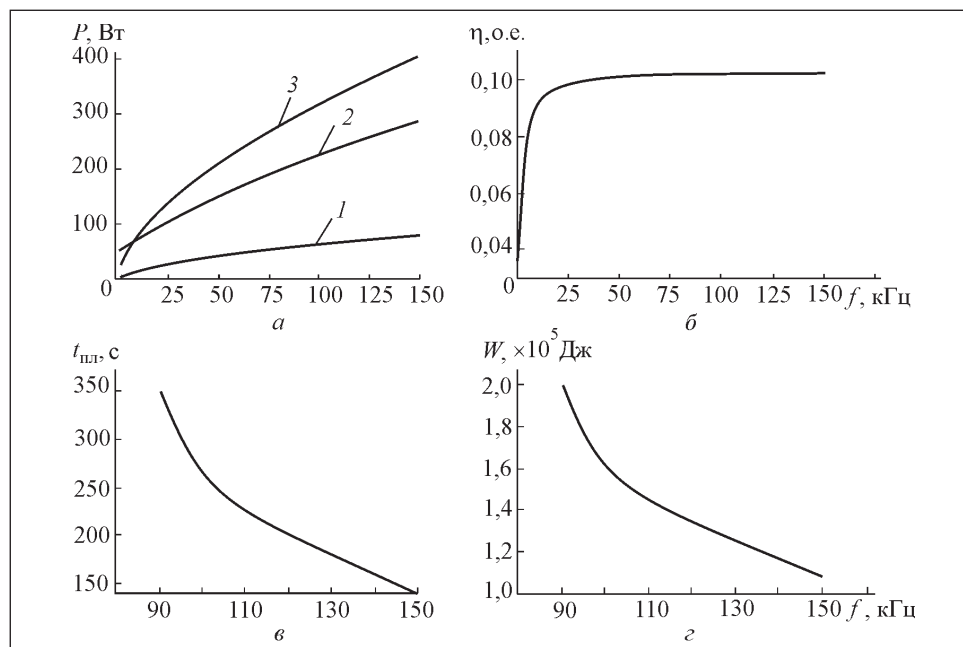


Рис. 5. Графики изменения параметров в зависимости от частоты тока в индукторе f : а — мощность, выделяемая в заготовке (1), индукторе (2) и концентраторе (3); б — КПД индукционного нагрева η ; в — время нагрева до температуры $T_{пл} = 1064$ °С; з — энергия W , необходимая для нагрева до $T_{пл}$

С увеличением частоты снижается потребление электрической энергии, расходуемой системой на плавление заготовки данного объема (см. рис. 5, з). Это объясняется тем, что при быстром нагреве меньшее количество тепловой энергии передается в окружающую среду, преимущественно в объем концентратора, где она расходуется на нагрев охлаждающей воды. Следовательно, для экономии электроэнергии можно рекомендовать режим плавки при частоте больше 90 кГц и максимально возможном токе в индукторе, определяемом источником питания и объемом охлаждаемой воды, протекающей по виткам индуктора в единицу времени.

Тепловые расчеты. Распределение температурного поля в цвете и в виде контурных линий при достижении $T_{пл} = 1064$ °С и частоте тока в индукторе $f = 100$ кГц показано на рис. 6, а и б (см. вклейку). На рис. 6, в, приведен график изменения во времени температуры заготовки. Видно, что в этом режиме плавление материала начинается через 250 с от начала процесса нагрева. Весь объем материала заготовки нагревается практически равномерно вследствие высокой теплопроводности материала. Расчетные данные свидетельствуют о том, что наибольший поток тепла от

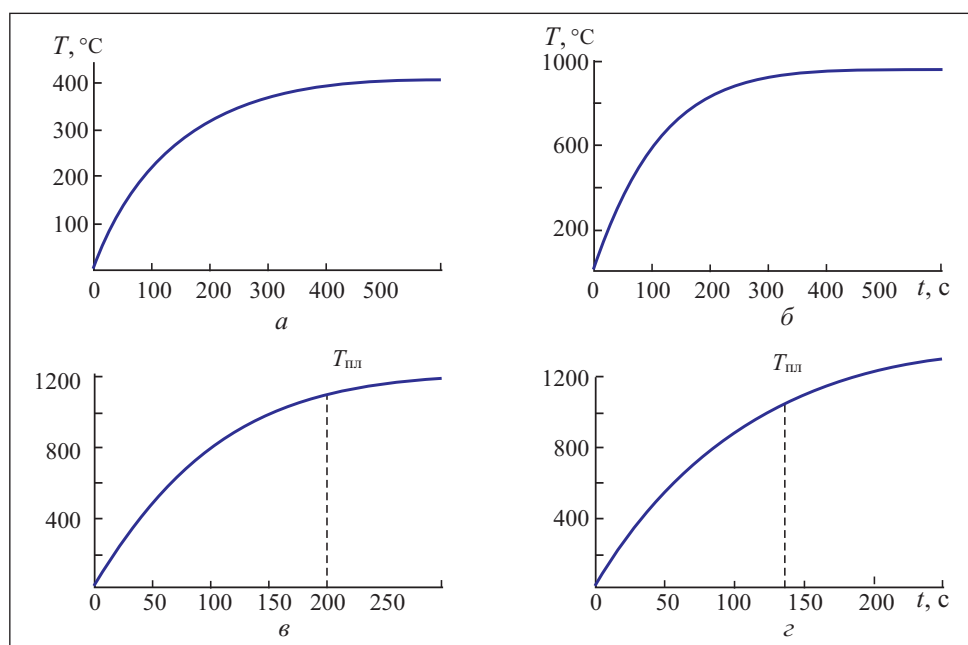


Рис. 7. Графики изменения температуры во времени в центре заготовки при различной частоте тока в индукторе: *a* — $f = 10$ кГц; *б* — $f = 70$ кГц; *в* — $f = 120$ кГц; *г* — $f = 150$ кГц

заготовки проходит по стенкам тигля в сторону концентратора, в котором тепловая энергия уносится с потоком охлаждающей воды.

На рис. 7 приведены зависимости от времени температуры нагрева в центре заготовки при различной частоте тока в индукторе. Как видно, с увеличением частоты тока вследствие увеличения потребляемой мощности уменьшается время, необходимое для нагрева заготовки до температуры плавления. При низкой частоте (менее 90 кГц) температура плавления материала заготовки не достигается.

Гидродинамические расчеты. На рис. 8 (см. вклейку) показано распределение электромагнитной силы \mathbf{F} в сечении заготовки и концентратора при $f = 100$ кГц (см. рис. 8, *a*). Поле скорости движения расплава, обусловленное действием этой силы, показано в виде стрелок и линий потока на рис. 8, *б* и *в*. Под действием электромагнитных сил в расплавленном металле возникает вихревое движение, обеспечивающее интенсивное перемешивание расплава. Наличие максимальных значений силы в угловых зонах заготовки (вверху и внизу на рис. 8, *a*) приводит к образованию сложных вихревых структур в этих зонах, максимальная скорость которых достигает 0,156 м/с в верхней угловой зоне стенки тигля, где действует наибольшая по величине электромагнитная сила.

Выводы

В результате компьютерных расчетов установлено, что в случае плавки металла с высокой электропроводностью существует пороговое значение частоты (20—25 кГц), ниже которого величина электрического КПД существенно уменьшается. Для снижения затрат электроэнергии на плавку одной порции металла необходимо реализовывать форсированный режим нагрева с максимально большой электрической мощностью, передаваемой в индуктор, и выбирать частоту выше порогового значения. Для исследуемого случая при заданном токе в индукторе нагрев до температуры плавления происходит при частоте тока не менее 90 кГц.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бабат Г.И.* Индукционный нагрев металлов и его промышленное применение. — М. — Л. : Энергия, 1965. — 552 с.
2. *Rudnev V., Loveless D., Cook R., Black M.* Handbook of induction heating. — Marcel Dekker, Inc., 2003. — 800 p.
3. *Слухоцкий А.Е., Рыскин С.Е.* Индукторы для индукционного нагрева. — Л. : Энергия, 1974. — 264 с.
4. *Васецкий Ю.М., Мазуренко И.Л.* Параметры электромагнитных и тепловых процессов для приближенных математических моделей высокочастотного индукционного нагрева электропроводных лент // Техн. электродинамика. — 2010. — № 5. — С. 10—17.
5. *Шидловский А.К., Щерба А.А., Подольцев А.Д. и др.* Индукционный нагрев сегментированной токопроводящей жилы силового кабеля на этапе его изготовления // Техн. электродинамика. — 2009. — № 1. — С. 53—60.
6. *Подольцев А.Д., Кучерявая И.Н.* Элементы теории и численного расчета электромагнитных процессов в проводящих средах. — Киев: Ин-т электродинамики НАН Украины, 1999. — 363 с.
7. *Кнопфель Г.* Сверхсильные импульсные магнитные поля. — М. : Мир, 1972. — 392 с.
8. *COMSOL multiphysics modeling and simulation software.* — Available at: <http://www.comsol.com/> (accessed 29 April 2015).
9. *Hameyer K., Driesen J., De Gerssem H., Belmans R.* The classification of coupled field problems // IEEE Trans. on Magnetics. — 1999. — Vol. 35, No. 3. — P. 1618—1621.
10. *Kumbhar G.B., Kulkarni S.V., Escarela-Perez R., Campero-Littlewood E.* Applications of coupled field formulations to electrical machinery // The Internat. Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering (COMPEL). — 2007. — Vol. 26, Is. 2. — P. 489—523.

A.D. Podoltsev, I.N. Kucheryavaya

MULTIPHYSICS MODELING OF THE INDUCTION HEATING AND MELTING OF CONDUCTIVE WORKPIECES WITH MAGNETIC FLUX CONCENTRATOR

The computer modeling of coupled electromagnetic, thermal and hydrodynamic processes at the induction heating and melting of metals with the use of magnetic flux concentrator is carried out. The non-uniform current density distributions in solid windings of the inductor and the concen-

trator are taken into account within the wide frequency range (1—150 kHz). It is shown that the current frequency of inductor should not be less than 20—25 kHz in order to provide high efficiency for heating of metals with high conductivity.

Key words: multiphysics modeling, high-frequency induction heating, magnetic flux concentrator, hydrodynamic processes.

REFERENCES

1. Babat, G.I. (1965), *Induktsionnyi nagrev metallov i ikh promyshlennoe primeneniye* [Induction heating of metals and their industrial application], Energiya, Moscow, Russia.
2. Rudnev, V., Loveless, D., Cook, R. and Black, M. (2003), *Handbook of induction heating*, Marcel Dekker, Inc.
3. Slukhotsky, A.E. and Ryskin, S.E. (1974), *Inductory dlya induktsionnogo nagreva* [Inductors for induction heating], Energiya, Leningrad, Russia.
4. Vasetsky, Yu.M. and Mazurenko, I.L. (2010), “Parameters of electromagnetic and thermal processes for approximate mathematical models of high-frequency induction heating of electroconductive bands”, *Tekhnichna elektrodynamika*, no. 5, pp. 10-17.
5. Shidlovsky, A.K., Shcherba, A.A., Podoltsev, A.D., Kucheryavaya, I.N. and Zolotarev, V.M. (2009), “Induction heating of segmental wire conductor (Milliken type conductor) of power cable at manufacturing stage”, *Tekhnichna elektrodynamika*, no. 1, pp. 53-60.
6. Podoltsev, A.D. and Kucheryavaya, I.N. (1999), *Elementy teorii i chislennogo rascheta elektromagnitnykh protsessov v provodyashchikh sredakh* [The elements of theory and numerical simulation of electromagnetic processes in conducting media], Institut Elektrodinamiki, Natsionalnoi Akademii Nauk Ukrainy, Kyiv, Ukraine.
7. Knopfel, H. (1972), *Sverkhsilnye impulsnye magnitnye polya* [Pulsed high magnetic fields], Mir, Moscow, Russia.
8. COMSOL multiphysics modeling and simulation software, available at: <http://www.comsol.com> (accessed April 29, 2015).
9. Hameyer, K., Driesen, J., De Gerssem, H. and Belmans, R. (1999), “The classification of coupled field problems”, *IEEE Trans. on Magnetics*, Vol. 35, no. 3, pp. 1618-1621.
10. Kumbhar, G.B., Kulkarni, S.V., Escarela-Perez, R. and Campero-Littlewood, E. (2007), “Applications of coupled field formulations to electrical machinery”, *The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering (COMPEL)*, Vol. 26, no. 2, pp. 489-523.

Поступила 05.05.15

ПОДОЛЬЦЕВ Александр Дмитриевич, д-р техн. наук, главный науч. сотр. Ин-та электродинамики НАН Украины. Область научных исследований — физические процессы в электротехнических устройствах и композиционных материалах с применением мультифизического и многомасштабного моделирования.

КУЧЕРЯВАЯ Ирина Николаевна, д-р техн. наук, ведущий науч. сотр. Ин-та электродинамики НАН Украины. Область научных исследований — компьютерное моделирование электромагнитных, тепловых и гидродинамических процессов в электротехнических устройствах и электротехнологических системах.

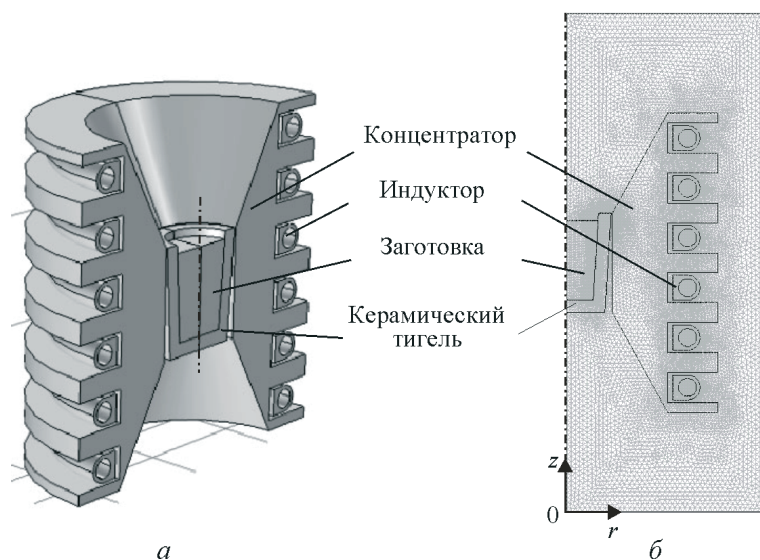


Рис. 2. Конструкция установки для индукционной плавки малого объема металла с использованием концентратора магнитного потока (а) и расчетная область с конечно-элементной сеткой (б)

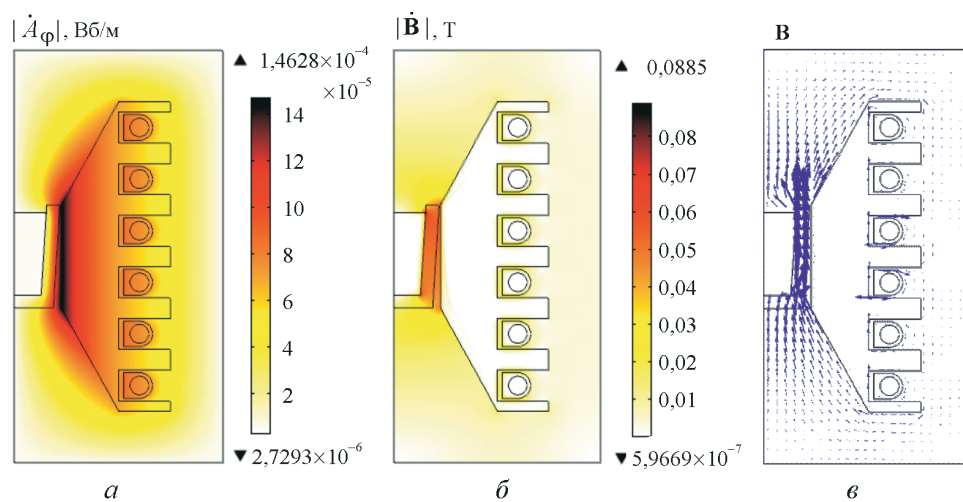


Рис. 3. Распределение в цвете при частоте тока в индукторе $f = 100$ кГц: а — магнитного потенциала $|A_\phi|$; б — магнитной индукции $|B|$; в — вектора B (в виде стрелок)

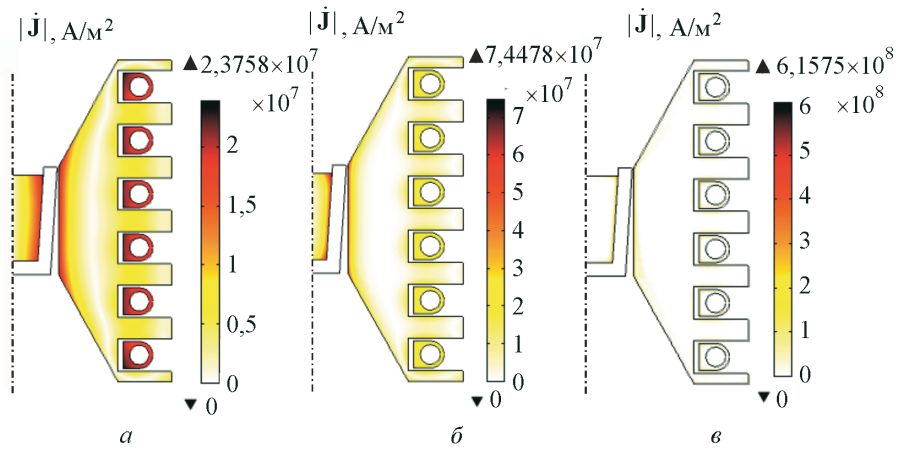


Рис. 4. Распределение в расчетной области плотности тока $|\mathbf{J}|$ при различной частоте тока в индукторе: а — $f = 1$ кГц; б — $f = 5$ кГц; в — $f = 100$ кГц

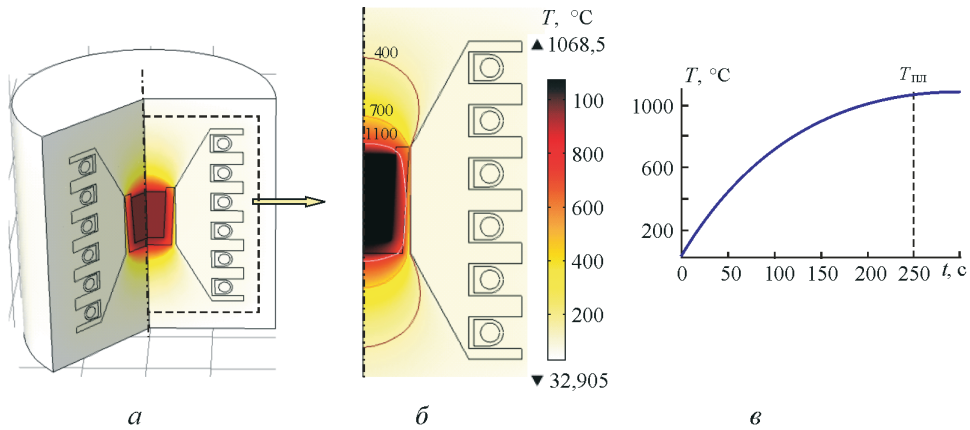


Рис. 6. Распределение температурного поля в цвете и в виде контурных линий (а, б) при $T_{пл} = 1064^\circ\text{C}$ и частоте тока в индукторе $f = 100$ кГц; кривая изменения во времени температуры в центре заготовки (в)

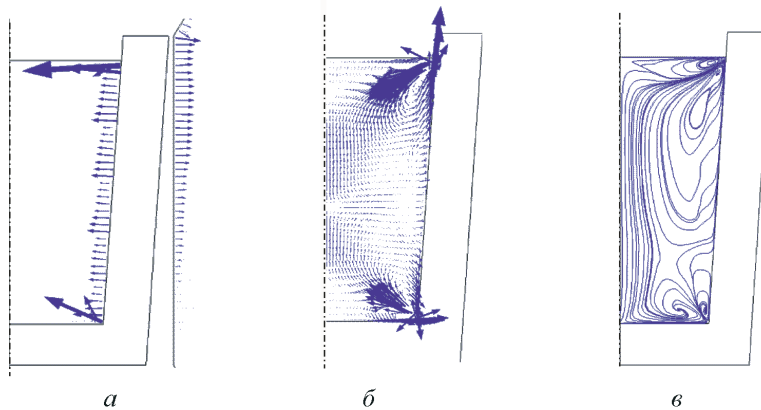


Рис. 8. Распределение в расчетной области электромагнитной силы \mathbf{F} ($F_{\max} = 1,86 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^3$) (а), поля скорости движения расплава ($v_{\max} = 0,156 \text{ м/с}$) в виде стрелок (б) и линий потока (в) при частоте тока в индукторе $f = 100$ кГц