УДК 004.942; 512.554; 621.311

С.И. Клипков, канд. техн. наук
Главный информационно-вычислительный центр НЭК «Укрэнерго»
(Украина, 01032, Киев, ул. С. Петлюры, 27,
тел. (044) 2491216, e-mail: klipkov.s@gmail.com)

Особенности гармонического анализа предельных режимов электрических систем

Рассмотрена возможность использования гармонического подхода к анализу предельных режимов электрических систем как наиболее адекватной математической модели исследуемого процесса. Проведен сопоставительный анализ полученных результатов с результатами исследования предельных режимов в рамках комплексных и гиперкомплексных систем уравнений установившихся режимов.

Розглянуто можливість використання гармонічного підходу до аналізу граничних режимів електричних систем як найбільш адекватної математичної моделі досліджуваного процесу. Проведено порівняльний аналіз одержаних результатів з результатами дослідження граничних режимів в рамках комплексних та гіперкомплексних систем рівнянь усталених режимів.

Ключевые слова: гармонический анализ, предельные режимы, комплексные числа, гиперкомплексные числа, матрица первого приближения.

Для расчетов электрических цепей переменного тока, как правило, используется символический (комплексный) метод, предложенный американским ученым Ч.П. Штейнмецем еще в конце XIX в. [1]. Это объясняется тем, что для не совпадающих по фазе синусоидальных токов и напряжений алгебраическое суммирование в соответствии с законами Кирхгофа является достаточно громоздкой и трудоемкой процедурой. Указанный метод основан на изображении гармонически изменяющихся во времени напряжений и токов комплексными числами и позволяет при описании цепей переменного тока использовать формальную аналогию с описанием цепей постоянного тока.

Следует заметить, что символический метод не может быть использован для нелинейной алгебраической операции умножения гармонических величин, так как произведению синусоидального напряжения на си-

© С.И. Клипков, 2015

нусоидальный ток нельзя поставить в соответствие произведение их комплексных изображений [2]. Попытка распространения символического метода на нелинейную операцию умножения синусоидальных напряжений на синусоидальные токи привела к появлению математического понятия комплексной мощности [3], определяемой как произведение комплексного напряжения на сопряженное значение комплексного тока [4]. При этом действительная и мнимая составляющие комплексной мощности получили название соответственно активной и реактивной мощности.

Постановка задачи. В [3] показано, что анализ предельных режимов электрических систем комплексным методом, основанным на использовании понятия псевдопроизводной для построения комплексной матрицы первого приближения, приводит к несколько иным результатам, чем анализ предельных режимов с применением общепринятой матрицы Якоби действительных уравнений установившегося режима. Несоответствие заключается в том, что дискриминантная поверхность, соответствующая равенству нулю определителя действительной матрицы Якоби и ограничивающая область существования режимов, является лишь подмножеством множества предельных режимов, соответствующих равенству нулю определителя указанной комплексной матрицы первого приближения. Здесь и далее под областью существования режимов подразумевается область существования решений нелинейных уравнений, описывающих установившийся режим. При этом определяемое таким образом множество предельных режимов связано с решениями параметрической системы гиперкомплексных уравнений [3], которые являются аналитическим продолжением нелинейных комплексных уравнений установившегося режима в гиперкомплексную область [5, 6]. Поэтому целесообразно выяснить, какое влияние на результат анализа предельности режимов электрических систем (ЭС) переменного тока оказывает переход от гармонических функций к их комплексным изображениям.

Гармонический подход к анализу предельных режимов. Если в произвольном узле f ЭС выражение для мгновенной электрической мощности рассматривать как произведение синусоидального напряжения в этом узле $u_f = U_{mf}\sin(\omega t + \phi_{uf})$ на синусоидальный ток этого узла $i_f = I_{mf}\sin(\omega t + \phi_{if})$, то получим следующее выражение [4]:

$$p_f = \frac{1}{2}U_{mf}I_{mf}\cos(\phi_{uf} - \phi_{if}) - \frac{1}{2}U_{mf}I_{mf}\cos(2\omega t\phi_{uf} + \phi_{if}). \qquad (1)$$

Из выражения (1) следует, что мгновенная мощность состоит из двух составляющих: постоянной и пульсирующей. Постоянная представляет

собой узловую активную мощность $P_f = U_f I_f \cos\varphi_f$, где U_f и I_f — действующие значения напряжения и тока, а $\varphi_f = \phi_{uf} - \phi_{if}$ — угол мощности. Пульсирующая мощность изменяется с двойной частотой по отношению к частоте напряжения и тока. С учетом приведенных соотношений запишем выражение для узловой мгновенной мощности:

$$p_f = P_f - S_f \cos(2\omega t + 2\phi_{uf} - \varphi_f), \tag{2}$$

где $S_f = U_f I_f$ — полная (кажущаяся) мощность в рассматриваемом узле. Раскладывая пульсирующую слагаемую на ортогональные гармонические составляющие, можно получить еще одно выражение для мгновенной мощности:

$$p_f = P_f + (P_f \sin 2\phi_{uf} - Q_f \cos 2\phi_{uf}) \sin 2\omega t - \\ - (P_f \cos 2\phi_{uf} + Q_f \sin 2\phi_{uf}) \cos 2\omega t, \tag{3}$$

где $Q_f = U_f I_f \sin\varphi_f$ — узловая реактивная мощность.

Для выяснения возможностей гармонического анализа предельных режимов рассмотрим простейший пример ЭС, расчетная схема которой состоит из двух узлов, и один из них — балансирующий. В этом случае установившийся режим описывается одним уравнением, определяющим равновесное состояние узла, в котором значения активной P и реактивной Q мощностей заданы, а характеристики U_m, ϕ_u мгновенного значения напряжения u не известны. Задаем также значение амплитуды мгновенного напряжения в балансирующем узле $U_{m\text{б.у}}$, фазу которого принимаем равной нулю. С учетом (2) указанное уравнение баланса мгновенных мощностей в анализируемом узле принимает вид

$$w = P - S\cos(2\omega t + 2\phi_u - \varphi) - ui = 0, \tag{4}$$

где $u = U_m \sin(\omega t + \phi_u)$ — мгновенное напряжение в узле; $i = I_m \sin(\omega t + \phi_i)$ — мгновенный ток по ветви, соединяющей анализируемый узел с балансирующим узлом. Таким образом, в уравнении (4) заданными величинами являются активная мощность P, а также однозначно определяемые с помощью P и Q полная мощность $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$ и угол мощности $\varphi = \mathrm{arctg}(Q/P)$.

Как известно [4], амплитуда и фаза мгновенного тока в данном случае вычисляются по формулам

$$I_m = \frac{\sqrt{(U_m \cos\phi_u - U_{m\text{б.у}})^2 + (U_m \sin\phi_u)^2}}{\sqrt{r^2 + (\omega L)^2}}, \tag{5}$$

$$\phi_i = \mathrm{arctg}\frac{U_m \sin\phi_u}{U_m \cos\phi_u - U_{m\text{б.у}}} - \mathrm{arctg}\frac{\omega L}{r}, \tag{6}$$

где r и L — активное сопротивление и индуктивность ветви. Дифференцируя (4) по единственной в данном случае переменной u и приравнивая полученный результат к нулю, получаем гармоническое условие предельности режима:

$$\frac{dw}{du} = 2S\sin(2\omega t + 2\phi_u - \varphi)\frac{d\phi_u}{du} - i - u\frac{di}{du} = 0, \tag{7}$$

где

$$\frac{di}{du} = \left(\frac{dI_m}{du}\sin(\omega t + \phi_i) + I_m\cos(\omega t + \phi_i)\frac{d\phi_i}{du}\right). \tag{8}$$

Как следует из выражений (5), (6) и (7), (8), в любом режиме рассматриваемой двухузловой схемы известны все величины, входящие в (7), (8), за исключением двух отношений дифференциалов: $d\phi_u / du$ и dU_m / du. Поэтому перед тем, как перейти к анализу предельности того или иного режима, определим, чему равны указанные отношения дифференциалов.

Если гармоническая функция $u = U_m\sin(\omega t + \phi_u)$ получила некоторое приращение в виде приращения амплитуды ΔU_m и приращения фазового угла $\Delta\phi_u$ (угловую скорость ω в данном случае принимаем постоянной), то приращение такой функции можно записать в виде

$$\Delta u = (U_m + \Delta U_m)\sin(\omega t + \phi_u + \Delta\phi_u) - U_m\sin(\omega t + \phi_u).$$

Таким образом, отношение приращения фазового угла к приращению гармонической функции имеет вид

$$\frac{\Delta\phi_u}{\Delta u} = \frac{\Delta\phi_u}{(U_m + \Delta U_m)\sin(\omega t + \phi_u + \Delta\phi_u) - U_m\sin(\omega t + \phi_u)}. \tag{9}$$

Разделив числитель и знаменатель выражения (9) на $\Delta\phi_u$, предварительно выполнив в знаменателе простые тригонометрические преобразования и перейдя от приращений к дифференциалам, получим следующее выражение для искомого отношения дифференциалов

$$\frac{d\phi_u}{du} = \frac{1}{K_u\sin(\omega t + \phi_u) + U_m\cos(\omega t + \phi_u)}, \tag{10}$$

где $K_u = dU_m / d\phi_u$. Аналогично можно получить выражение

$$\frac{dU_m}{du} = \frac{K_u}{K_u\sin(\omega t + \phi_u) + U_m\cos(\omega t + \phi_u)}. \tag{11}$$

Как следует из выражений (10), (11), отношения дифференциала фазового угла гармонической функции к дифференциалу самой гармонической

функции и дифференциала амплитуды гармонической функции к дифференциалу самой гармонической функции представляют собой в общем случае негармонические величины, зависящие от отношения дифференциала амплитуды к дифференциалу фазового угла. Поэтому выражения (10), (11) будем называть в дальнейшем псевдопроизводными. Заметим, что понятие псевдопроизводной для функций комплексного переменного рассматривалось в [3] и ранее. Из (10) можно также получить выражение для дифференциала гармонической функции $u = U_m \sin(\omega t + \phi_u)$:

$$du = dU_m \sin(\omega t + \phi_u) + d\phi_u U_m \cos(\omega t + \phi_u) = D_u \sin(\omega t + \delta_u),$$

где D_u и δ_u — модуль и угол дифференциала du,

$$D_u = dU_m \sqrt{\left(\cos\phi_u - \frac{U_m}{K_u}\sin\phi_u\right)^2 + \left(\sin\phi_u + \frac{U_m}{K_u}\cos\phi_u\right)^2},$$

$$\delta_u = \operatorname{arctg}\left(\frac{K_u \sin\phi_u + U_m \cos\phi_u}{K_u \cos\phi_u - U_m \sin\phi_u}\right). \qquad (12)$$

Таким образом, гармонический анализ предельности исследуемого режима заключается в том, чтобы для рассматриваемой совокупности режимных характеристик определить значение переменной K_u, при котором $dw/du = 0$. Существование хотя бы одного такого значения может свидетельствовать о предельности режима, так как в этой точке рассматриваемая производная может менять знак. И наоборот, если не существует ни одного значения переменной K_u, при котором выполняется условие (7), это означает, что анализируемый режим не является предельным. Для выполнения такого анализа преобразуем выражение (7) с учетом (5), (6), (8), (10) и (11) и разложим гармонические члены полинома на ортогональные гармонические составляющие. В результате получим следующее условие предельности:

$$\frac{dw}{du} = A_0 + A_{s2}\sin 2\omega t + A_{c2}\cos 2\omega t = 0, \qquad (13)$$

где A_0, A_{s2}, A_{c2} — коэффициенты,

$$A_0 = A_{01}K_u^0 + A_{00},\ A_{s2} = A_{s21}K_u^{s2} + A_{s20},\ A_{c2} = A_{c21}K_u^{c2} + A_{c20}. \qquad (14)$$

Выражения для определения A_{01}, A_{00}, A_{s21}, A_{s20}, A_{c21}, A_{c20} приведены в [7]. Их значения зависят только от характеристик конкретного режима.

Равенство нулю гармонического полинома (13) требует совместного выполнения трех условий: $A_0 = 0$, $A_{s2} = 0$ и $A_{c2} = 0$, каждое из которых позволяет определить значение переменной K_u. Поэтому условие предельности

режима соответствует такому сочетанию режимных характеристик, при котором полученные из трех линейных уравнений (14) значения K_u будут совпадать. Это, в свою очередь, означает, что существует такое отношение дифференциалов $K_u = dU_m / d\phi_u$, входящее в состав псевдопроизводных (10), (11), при котором становится равным нулю выражение (13).

Примеры и анализ численных результатов. В качестве простого примера рассмотрим режимные характеристики при двух значениях P и Q в двухузловой схеме с параметрами ветви $r = 5$ Ом, $\omega L = 10$ Ом и действующим значением напряжения в балансирующем узле $U_{б.у} = 500$ кВ.

1. $P = 24000$ МВт, $Q = 8000$ МВАр. Эта точка расположена в области существования установившихся режимов, поэтому в ней существуют два решения, удовлетворяющих (4):

1) $U_m^1 = 984{,}965$ кВ, $\phi_u^1 = 35{,}052\,°$;

2) $U_m^2 = 574{,}32$ кВ, $\phi_u^2 = 99{,}948\,°$.

Для первого решения значения коэффициентов в (14) следующие [7]: $A_{01} = -44{,}06565$, $A_{00} = 30806{,}24847$, $A_{s21} = -25{,}26359$, $A_{s20} = 27403{,}12424$, $A_{c21} = 59{,}68041$, $A_{c20} = -14806{,}24847$. Поэтому переменные псевдопроизводных, полученные с помощью приведенных уравнений, принимают значения: $K_u^0 = -699{,}099$, $K_u^{s2} = -1084{,}689$, $K_u^{c2} = -248{,}092$..

Значения анализируемых величин для второго решения следующие: $A_{01} = -53{,}27493$, $A_{00} = 5193{,}75153$, $A_{s21} = -16{,}56959$, $A_{s20} = 14596{,}87576$, $A_{c21} = -62{,}6534$, $A_{c20} = 10806{,}24847$, $K_u^0 = -97{,}49$, $K_u^{s2} = -880{,}944$, $K_u^{c2} = -172{,}477$.

Таким образом, ни в одном из решений анализируемые переменные псевдопроизводных не равны между собой. Поэтому анализируемая точка области существования режимов при сформулированном выше условии не является предельной.

2. $P = 40000$ МВт, $Q = 4000$ МВАр. Рассматриваемая точка расположена вне области существования режимов [7]. Для получения математического решения в этом случае может быть использовано гиперкомплексное уравнение, являющееся обобщением (аналитическим продолжением) комплексного уравнения, описывающего равновесное состояние анализируемого узла. Тогда гиперкомплексное уравнение запишем в виде [3]

$$\bar{I}\tilde{U} = \dot{Y}\bar{U}\tilde{U} - \dot{Y}U_{б.у}\tilde{U} = \hat{S}, \qquad (15)$$

где $\bar{I} = \dot{I}_д + \dot{I}_м i$ — гиперкомплексный узловой ток; $\bar{U} = \dot{U}_д + \dot{U}_м i$ — гиперкомплексное узловое напряжение; $\tilde{U} = \hat{U}_д + \hat{U}_м i$ — частично-сопряженное гиперкомплексное узловое напряжение; $\dot{Y}$ — комплексная проводимость ветви. Здесь, токи и напряжения представлены гиперкомплексными числами в виде действительных ($\dot{I}_д$, $\dot{U}_д$) и мнимых ($\dot{I}_м$, $\dot{U}_м$) комплексных

составляющих. Используемые гиперкомплексные числа являются элементами параметрической системы гиперкомплексных чисел с операцией умножения, зависящей от параметра гиперкомплексной системы k [5, 6].

Если $k=0$, то соответствующую гиперкомплексную систему составляют квадриплексные числа, если $k=1$ — кватернионы. При других значениях k продуцируемые гиперкомплексные системы являются сложными некоммутативными, неассоциативными алгебрами. Тем не менее, они позволяют получить гиперкомплексные решения в случаях, когда комплексных решений не существует.

Переход от рассматриваемой точки $P=40000$ МВт, $Q=4000$ МВАр к границе области существования для квадриплексных чисел и кватернионов показан в [7]. В данном случае комплексные составляющие квадриплексного напряжения следующие: $\dot{U}_{\text{д}}^{\text{кд}}=250+j760$, $\dot{U}_{\text{м}}^{\text{кд}}=524{,}5+j0$. Предельная точка существования решений соответствует $\dot{U}_{\text{д}}^{\text{кд}}$, так как для рассматриваемой простой схемы $U'=U_{\text{б.у}}/2$, что и является условием предельности.

Рассматриваемая предельная точка является точкой бифуркации двух комплексных решений [8], в которой они, перед тем как стать двумя гиперкомплексными решениями, сливаются. В этой точке узловые мощности принимают следующие значения: $P=51004$ МВт, $Q=26008$ МВАр. При этом $U_m^{\text{пр}}=1131{,}459$ кВ, $\phi_u^{\text{пр}}=71{,}792°$, $A_{01}=-67{,}70726$, $A_{00}=25200{,}0$, $A_{s21}=-95{,}11257$, $A_{s20}=35400{,}0$, $A_{c21}=-13{,}97134$, $A_{c20}=5200{,}0$.

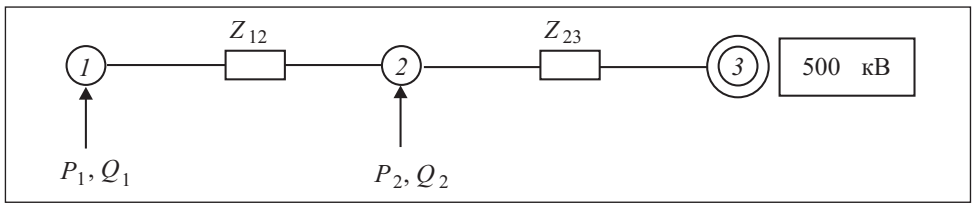
Как следует из (14), искомые переменные псевдопроизводных в данном случае равны между собой: $K_u^0=K_u^{s2}=K_u^{c2}=-372{,}191$. Следовательно, существует такое отношение дифференциалов, $K_u=dU_m/d\phi_u=$ $=-372{,}191$, при котором выполняются условия (7) и (13). Поэтому в рассматриваемой точке предельный относительно существования режим является предельным и относительно сформулированного выше гармонического подхода. Следует заметить, что угол α направления изменения режима при равенстве нулю рассматриваемой в [3] псевдопроизводной уравнения баланса комплексной мощности в анализируемом узле,

$$d\Delta\hat{S}/d\dot{U}=\dot{Y}\hat{U}+\dot{I}e^{-j2\alpha}, \tag{16}$$

определяется по формуле

$$\alpha=k\alpha_{\text{д}}+\alpha_{\text{м}}. \tag{17}$$

Поскольку в рассматриваемом случае $k=0$, $\alpha_{\text{д}}=\text{arctg}\dfrac{760}{250}=\phi_u^{\text{пр}}=71{,}792°$, $\alpha_{\text{м}}=\text{arctg}\dfrac{0}{524{,}5}=0$, то и $\alpha=0$. Используя выражение (12), вычислим угол



дифференциала мгновенного напряжения δ_u, соответствующий полученному значению K_u. В результате получим $\delta_u = 0$. Таким образом, углы α и δ_u, соответствующие предельному режиму, в данном случае совпадают.

Комплексные составляющие кватернионного решения в рассматриваемой точке имеют следующие значения: $\dot{U}_{\text{д}}^{\text{кв}} = 250 + j453{,}582$, $\dot{U}_{\text{м}}^{\text{кв}} = 205{,}480 - j372{,}808$ [7]. Точка, соответствующая комплексному напряжению $\dot{U}_{\text{д}}^{\text{кв}}$ ($U_m^{\text{пр}} = 732{,}443$ кВ, $\phi_u^{\text{пр}} = 61{,}138°$, $P = 23872{,}718$ МВт, $Q = 2387{,}272$ МВАр), также как и в случае квадриплексных чисел, является предельной по условиям существования установившегося режима. При этом $A_{01} = -47{,}24214$, $A_{00} = 19071{,}63291$, $A_{s21} = -57{,}32794$, $A_{s20} = 23143{,}26582$, $A_{c21} = 2{,}29965$, $A_{c20} = -928{,}36709$, $K_u^0 = K_u^{s2} = K_u^{c2} = -403{,}6996$. Следовательно, в данной предельной точке также существует отношение дифференциалов $K_u = dU_m / d\phi_u = -403{,}6996$, при котором выполняются условия (7) и (13). Поэтому полученная на основании кватернионного решения предельная по условиям существования установившегося режима точка является предельной и относительно гармонического похода. В этой предельной точке анализируемые углы имеют следующие значения: $\alpha_{\text{д}} = 61{,}138°$, $\alpha_{\text{м}} = -61{,}138°$, $\alpha = 0$, $\delta_u = 0$. Таким образом, в этом случае углы дифференциалов комплексного α и мгновенного δ_u напряжений также совпадают.

Рассмотрим более сложный случай — трехузловую разомкнутую ЭС с балансирующим узлом *3* в конце. Приведенная на рисунке расчетная схема ЭС имеет следующие параметры: $r_{12} = 10$ Ом, $\omega L_{12} = 25$ Ом, $r_{23} = 5$ Ом, $\omega L_{23} = 30$ Ом. При этом $z_{12} = \sqrt{r_{12}^2 + (\omega L_{12})^2}$ и $z_{23} = \sqrt{r_{23}^2 + (\omega L_{23})^2}$. Установившийся режим в этой схеме описывается двумя уравнениями, которые отражают баланс (равновесие) электрических мощностей в независимых узлах *1*, *2* в каждый момент времени:

$$w_1 = P_1 - S_1 \cos(2\omega t + 2\phi_{u1} - \varphi_1) - u_1 i_{12} = 0,$$
$$w_2 = P_2 - S_2 \cos(2\omega t + 2\phi_{u2} - \varphi_2) - u_2 i_{21} - u_2 i_{23} = 0. \qquad (18)$$

Частные производные, полученные с использованием псевдопроизводных (10), (11) и представляющие собой элементы гармонической мат-

рицы первого приближения, для системы уравнений (18) имеют вид

$$a_{11}=\frac{dw_1}{du_1}=2S_1\sin(2\omega t+2\phi_{u1}-\varphi_1)\frac{d\phi_{u1}}{du_1}-i_{12}-u_1\frac{di_{12}}{du_1},$$

$$a_{12}=\frac{dw_1}{du_2}=u_1\frac{di_{12}}{du_2},\ a_{21}=\frac{dw_2}{du_1}=u_2\frac{di_{21}}{du_1}, \tag{19}$$

$$a_{22}=\frac{dw_2}{du_2}=2S_2\sin(2\omega t+2\phi_{u2}-\varphi_2)\frac{d\phi_{u2}}{du_2}-i_{21}-u_2\frac{di_{21}}{du_2}-i_{23}-u_2\frac{di_{23}}{du_2},$$

а оценка предельности установившихся режимов рассматриваемой ЭС в данном случае сводится к исследованию условий, при которых определитель

$$j=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12} \tag{20}$$

становится равным нулю. Для этого необходимо преобразовать выражение (20) с учетом соотношений (5), (6), (8), (10), (11), (19) и разложить гармонические члены результирующего полинома на ортогональные гармонические составляющие. Тогда определитель (20) может быть представлен в виде

$$j=A_0+A_{s2}\sin 2\omega t+A_{c2}\cos 2\omega t+A_{s4}\sin 4\omega t+A_{c4}\cos 4\omega t,$$

откуда следует, что равенство нулю определителя гармонической матрицы первого приближения требует равенства нулю пяти коэффициентов, $A_0=A_{s2}=A_{c2}=A_{s4}=A_{c4}=0$, которые определяются по формулам [7]

$$A_0=A_{0_12}K_{u1}K_{u2}+A_{0_1}K_{u1}+A_{0_2}K_{u2}+A_{0_0}, \tag{21}$$

$$A_{s2}=A_{s2_12}K_{u1}K_{u2}+A_{s2_1}K_{u1}+A_{s2_2}K_{u2}+A_{s2_0}, \tag{22}$$

$$A_{c2}=A_{c2_12}K_{u1}K_{u2}+A_{c2_1}K_{u1}+A_{c2_2}K_{u2}+A_{c2_0}, \tag{23}$$

$$A_{s4}=A_{s4_12}K_{u1}K_{u2}+A_{s4_1}K_{u1}+A_{s4_2}K_{u2}+A_{s4_0}, \tag{24}$$

$$A_{c4}=A_{c4_12}K_{u1}K_{u2}+A_{c4_1}K_{u1}+A_{c4_2}K_{u2}+A_{c4_0}. \tag{25}$$

Выражения (21)—(25), в свою очередь, содержат коэффициенты A, зависящие от параметров электрической схемы и характеристик установившегося режима в исследуемой точке, а также переменные псевдопроизводных $K_{u1}=dU_{m1}/d\phi_{u1}$, $K_{u2}=dU_{m2}/d\phi_{u2}$, являющиеся отношениями дифференциалов амплитуд к дифференциалам фазовых углов гармонических напряжений.

Таким образом, оценка предельности режима в данном случае сводится к определению существования таких действительных значений K_{u1},

K_{u2}, при которых соотношения (21)—(25) принимали бы нулевые значения. В рассмотренном выше примере двухузловой схемы ЭС условием предельности существования режима является равенство нулю трех коэффициентов,

$$A_0 = A_{s2} = A_{c2} = 0, \tag{26}$$

которое связано с возможностью изменения знаков постоянной составляющей и гармонической составляющей удвоенной угловой частоты ω определителя гармонической матрицы первого приближения. В случае трехузловой ЭС добавляется условие $A_{s4} = A_{c4} = 0$, при котором возможно изменения знака гармонической составляющей учетверенной угловой частоты. Поэтому целесообразно исследовать рассматриваемые условия и в отдельности, и в совокупности.

Из соотношений (24), (25) вытекает, что значения K_{u1} и K_{u2}, соответствующие нулевым левым частям (26), могут быть определены в результате решения приведенного квадратного уравнения

$$K_{u1}^2 + B_1 K_{u1} + B_0 = 0 \tag{27}$$

с действительными коэффициентами B_1, B_0:

$$B_1 = \frac{A_{s4_0}A_{c4_12} + A_{s4_1}A_{c4_2} - A_{s4_12}A_{c4_0} - A_{s4_2}A_{c4_1}}{A_{s4_1}A_{c4_12} - A_{s4_12}A_{c4_1}},$$
$$B_0 = \frac{A_{s4_0}A_{c4_2} - A_{s4_2}A_{c4_0}}{A_{s4_1}A_{c4_12} - A_{s4_12}A_{c4_1}}. \tag{28}$$

При этом $K_{u2} = -\dfrac{A_{c4_1}K_{u1} + A_{c4_0}}{A_{c4_12}K_{u1} + A_{c4_2}}$. Аналогичные формулы могут быть использованы для определения значений K_{u1} и K_{u2}, соответствующих равенству нулю гармонической составляющей удвоенной частоты.

Рассмотрим точку $P_1 = 7000$ МВт, $Q_1 = 3000$ МВАр, $P_2 = 3000$ МВт, $Q_2 = 1000$ МВАр, расположенную вне области существования установившихся режимов анализируемой трехузловой ЭС. Как и выше, для гиперкомплексных решений в данной точке используем кватернионные и квадриплексные уравнения.

Кватернионы ($k = 1$):

$$\overline{U}_1 = 216{,}362 + j543{,}319 + (201{,}761 - j406{,}571)\, i;$$
$$\overline{U}_2 = 302{,}872 + j342{,}314 + (147{,}57 - j245{,}612)\, i;$$
$$\overline{U}_3 = 500 + j0 + (0 + j0)\, i.$$

Квадриплексные числа ($k = 0$):

$$\overline{U}_1 = 200{,}547 + j863{,}696 + (575{,}37 + j15{,}989)\, i;$$
$$\overline{U}_2 = 283{,}786 + j526{,}26 + (349{,}776 + j19{,}166)\, i;$$
$$\overline{U}_3 = 500 + j0 + (0 + j0)\, i.$$

Введение режима в область существования в данном случае соответствует переходу к действительным комплексным составляющим гиперкомплексных решений. В результате для кватернионов получаем следующие значения характеристик: $\dot{U}_1 = \dot{U}_{1д}^{кв} = 216{,}362 + j543{,}319$, $\dot{U}_2 = \dot{U}_{2д}^{кв} = 302{,}872 + j342{,}314$, что соответствует $U_{m1} = 827{,}052$ кВ, $\alpha_{д1} = \phi_{u1} = 68{,}286°$, $U_{m2} = 646{,}39$ кВ, $\alpha_{д2} = \phi_{u2} = 48{,}498°$. При этом $\alpha_{м1} = -63{,}607°$, $\alpha_{м2} = -59{,}002°$ и в соответствии с (17) $\alpha_1 = 4{,}679°$, $\alpha_2 = -10{,}503°$.

Используя числовые значения коэффициентов A_{s4} и A_{c4} (см. таблицу), на основании выражений (28) вычисляем действительные коэффициенты квадратного уравнения (27): $B_1 = 805{,}06$, $B_0 = 161968{,}122$. В результате решения квадратного уравнения (27) получаем две пары значений: $K_{u1}^1 = -394{,}636$, $K_{u2}^1 = -433{,}489$ и $K_{u1}^2 = -410{,}424$, $K_{u2}^2 = -398{,}367$. Заметим, что при полученных значениях ни один из коэффициентов A_0, A_{s2} и A_{c2}, определяемых из соотношений (21)—(23) с использованием числовых данных, приведенных в таблице, не становится равным нулю. Следовательно, в анализируемой точке области существования не может быть равенства нулю определителя гармонической матрицы первого приближения в целом. В данном случае можно рассматривать только вырожденную

Коэффициент	$A_{_12}$	$A_{_1}$	$A_{_2}$	$A_{_0}$
A_0	$\frac{63980958{,}405}{119078323{,}731}$	$\frac{164{,}088}{370{,}561}$	$\frac{187263{,}166}{417041{,}326}$	$\frac{51097{,}044}{87271{,}486}$
A_{s2}	$\frac{101521567{,}548}{221736424{,}972}$	$\frac{224{,}251}{524{,}066}$	$\frac{259777{,}337}{582660{,}389}$	$\frac{94952{,}894}{230985{,}033}$
A_{c2}	$\frac{3905018{,}4}{49538184{,}223}$	$-\frac{182{,}175}{195{,}318}$	$\frac{12627{,}315}{203727{,}61}$	$-\frac{69961{,}592}{97531{,}172}$
A_{s4}	$\frac{10622149{,}754}{75750566{,}073}$	$-\frac{138{,}496}{170{,}58}$	$\frac{4510{,}259}{137253{,}152}$	$\frac{-34257{,}798}{3369{,}707}$
A_{c4}	$-\frac{35752774{,}376}{60211587{,}018}$	$-\frac{71{,}926}{294{,}314}$	$-\frac{73199{,}466}{140594{,}07}$	$-\frac{44222{,}818}{123772{,}892}$

Примечание: над чертой указаны значения коэффициентов A для кватернионов, под чертой — для квадриплексных чисел.

гармоническую составляющую учетверенной угловой частоты, которая является лишь одной из составляющих указанного определителя.

Теперь, использовав (12), определим углы δ_u в узлах *1*, *2* (см. рисунок), соответствующие полученным значениям переменных K_u. В результате получим: $\delta_{u1}^1 = 3{,}795°, \delta_{u2}^1 = -7{,}655°$ и $\delta_{u1}^2 = 4{,}679°, \delta_{u2}^2 = -10{,}503°$. Сравнивая в анализируемой точке области существования режимов углы направления изменения режима (углы комплексных приращений напряжений), при которых определитель комплексной матрицы первого приближения становится равным нулю (17), и углы дифференциалов мгновенных напряжений, при которых A_{s4} и A_{c4} принимают нулевые значения, обнаруживаем следующее совпадение: $\alpha_1 = \delta_{u1}^2$ и $\alpha_2 = \delta_{u2}^2$.

Таким образом, возможному изменению знака определителя комплексной матрицы первого приближения в данном случае соответствует возможное изменение знака гармонической составляющей учетверенной частоты, которая является лишь одной из составляющих определителя гармонической матрицы первого приближения. Знак самого определителя в рассматриваемой точке измениться не может.

Элементы комплексной матрицы первого приближения с учетом псевдопроизводной (16) в общем случае определяются по формулам [3] $\dot{J}_{ff} = \dot{Y}_f \hat{U}_f + \dot{I}_f e^{-j2\alpha_f}$, $\dot{J}_{fl} = -\dot{Y}_{fl}\hat{U}_f$, где $\dot{U}_f$ и $\dot{U}_l$ — комплексные напряжения в рассматриваемом и смежных узлах; $\dot{I}_f$ — комплексный узловой ток в рассматриваемом узле. Поэтому при $\alpha_1 = \delta_{u1}^1, \alpha_2 = \delta_{u2}^1$, для которых величины A_{s4} и A_{c4} равны нулю, элементы комплексной матрицы первого приближения имеют значения $\dot{J}_{11} = -9{,}303 - j10{,}008$, $\dot{J}_{12} = 15{,}751 + j14{,}955$, $\dot{J}_{21} = 7{,}626 + j15{,}165$, $\dot{J}_{22} = -13{,}602 - j23{,}304$, а ее определитель становится равным нулю. Это объясняется тем, что в анализируемой трехузловой разомкнутой схеме может существовать два направления изменения режима, связанные с равенством нулю определителя комплексной матрицы первого приближения [3]. Следует заметить, что в точках области существования установившихся режимов, в которых не существует углов α, соответствующих определителю комплексной матрицы первого приближения, равному нулю, не существует действительных решений квадратного уравнения (27), определяющего значения переменных K_{u1}, K_{u2}.

Теперь рассмотрим особенности квадриплексного решения. В этом случае в уравнениях параметрической системы гиперкомплексных чисел $k = 0$. Как и ранее, в рассматриваемом случае введение режима в область существования соответствует переходу к действительным комплексным составляющим квадриплексных чисел: $\dot{U}_1 = \dot{U}_{1д}^{кд} = 200{,}547 + j863{,}696$, $\dot{U}_2 = \dot{U}_{2д}^{кд} = 283{,}786 + j526{,}26$ и $U_{m1} = 1253{,}946$ кВ, $\alpha_{д1} = \phi_{u1} = 76{,}928°$, $U_{m2} = 845{,}558$ кВ, $\alpha_{д2} = \phi_{u2} = 61{,}664°$. При этом $\alpha_{м1} = 1{,}592°, \alpha_{м2} = 3{,}136°$ и в соответствии с (17) $\alpha_1 = 1{,}592°, \alpha_2 = 3{,}136°$.

На основании численных значений A_{s4} и A_{c4} вычислим коэффициенты квадратного уравнения (27), $B_1 = 762,369$, $B_0 = 142486,083$, и соответствующие им две пары искомых переменных: $K_{u1}^1 = -328,124$, $K_{u2}^1 = -517,593$ и $K_{u1}^2 = -434,245$, $K_{u2}^2 = -208,529$.

В отличие от точки области существования, полученной с использованием кватернионного решения, первая пара решений, как и (24), (25), удовлетворяет также уравнениям (21)—(23). Таким образом, при переменных псевдопроизводных K_u, соответствующих первой паре, все составляющие определителя гармонической матрицы первого приближения принимают нулевое значение, т.е. $A_{s4} = A_{c4} = 0$, и $A_0 = A_{s2} = A_{c2} = 0$. Установившиеся режимы, соответствующие действительным комплексным составляющим квадриплексного решения ($k = 0$), принадлежат дискриминантной поверхности области существования, в точках которой условия существования нарушаются [3].

Определив на основании (12) углы дифференциалов мгновенных напряжений в узлах *1*, *2* (см. рисунок), соответствующие значениям переменных K_u, получим значения $\delta_{u1}^1 = 1,592°$, $\delta_{u2}^1 = 3,136°$ и $\delta_{u1}^2 = 6,029°$, $\delta_{u2}^2 = -14,482°$, которые совпадают со значениями углов при квадриплексном решении ($\alpha_1 = \delta_{u1}^1 = 1,592°$, $\alpha_2 = \delta_{u2}^1 = 3,136°$), а также углов, соответствующих вырождению комплексной матрицы первого приближения [3].

Выводы

Построение гармонической матрицы первого приближения для уравнений баланса мгновенных мощностей в узлах ЭС может быть осуществлено только на основе введения псевдопроизводных (10), (11), которые зависят от отношения дифференциала амплитуды гармонического напряжения к дифференциалу фазы. Точно так же построение комплексной матрицы первого приближения комплексных уравнений установившегося режима возможно только с использованием понятия псевдопроизводной неаналитической зависимости комплексной мощности от комплексного напряжения.

Изменение знака определителя комплексной матрицы первого приближения в точках дискриминантной поверхности области существования установившихся режимов ЭС соответствует изменению знака определителя гармонической матрицы первого приближения. При этом углы дифференциалов комплексного напряжения и фазы дифференциалов мгновенного напряжения, соответствующие равенству нулю комплексного и гармонического определителей, одинаковы.

Изменение знака определителя комплексной матрицы первого приближения внутри области существования установившихся режимов ЭС

соответствует изменению знака только одной из составляющих определителя гармонической матрицы первого приближения. При этом углы дифференциалов комплексного напряжения, соответствующие равенству нулю комплексного определителя, и фазы дифференциалов мгновенного напряжения, соответствующие равенству нулю этой гармонической составляющей, также совпадают.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белькинд Л.Д.* Чарльз Протеус Штейнмец. — М. : Наука, 1965. — 222 с.
2. *Анго А.* Математика для электро- и радиоинженеров. — М. : Наука, 1964. — 771 с.
3. *Клипков С.И.* Использование гиперкомплексных числовых систем для математического моделирования предельных режимов электрических систем // Реєстрація, зберігання і обробка даних. — 2012. —**14**, № 4. — С. 11—23.
4. *Поливанов К.М.* Теоретические основы электротехники. Т. 1. — М. : «Энергия», 1972. — 240 с.
5. *Клипков С.И.* О новом подходе к построению гиперкомплексных числовых систем ранга два над полем комплексных чисел // Укр. математичн. журнал. — 2011. — **63**, № 1. — С. 130—139.
6. *Клипков С.И.* Гиперкомплексные параметрические числовые системы в математическом моделировании // Реєстрація, зберігання і обробка даних. — 2013. — **15,** № 1. — С. 3—13.
7. *Клипков С.И.* Использование гармонического подхода к анализу предельных режимов электрических систем переменного тока // Электрические сети и системы. — 2010. — № 6. — С. 71—82.
8. *Арнольд В.И.* Теория катастроф. — М. : Знание, 1981. — 80 с.

S.I. Klipkov

FEATURES OF THE HARMONIC ANALYSIS
OF LIMIT MODES OF ELECTRICAL SYSTEMS

The paper deals with the problems of harmonic approach to the analysis of limit modes of electrical systems as the most adequate mathematical model of the process under investigation. A comparative analysis with the results of the research of limiting regimes in the framework of complex and hypercomplex systems of equations of the established regimes is presented.

K e y w o r d s: harmonic analysis, limiting regimes, complex numbers, hypercomplex numbers, matrix of the first approximation.

REFERENCES

1. *Belkind L.D.* Charles Proteus Steinmetz. — Moscow: Nauka, 1965. — 222 p. (in Russian).
2. *Ango A.* Mathematics for electro- and radio-engineers — Moscow: Nauka, 1964. — 771 p. (in Russian).
3. *Klipkov S.I.* The Use Hypercomplex Number Systems for Mathematical Modeling of Limit Modes of Electrical Systems // Data Rec. Storage & Processing. — 2012. — Vol. 14, No 4 . — P. 11—23 (in Russian).

4. *Polivanov K.M*. Theoretical Bases of Electrical Engineering. Vol. 1.— Moscow: «Energiya», 1972.— 240 p. (in Russian).
5. *Klipkov S.I.* On a New Approach to the Construction of Hypercomplex Number Systems of Rank Two over the Field of Complex Numbers // Ukrainian Mathematical Journal. — 2011. — Vol. 63, No 1. — P. 130—139 (in Russian).
6. *Klipkov S.I.* Hypercomplex Parametric Number Systems in the Mathematical Modeling // Data Rec. Storage & Processing. — 2013. — Vol. 15, No 1. — P. 3—13 (in Russian).
7. *Klipkov S.I* Using the harmonic approach to the analysis of limit modes of electrical AC systems // Electrical Networks & Systems. — 2010. — No 6. — P. 71—82 (in Russian).
8. *Arnold V.I.* Theory of Catastrophes. — Moscow: Znanie, 1981. — 80 p. (in Russian).

Поступила 15.05.14

КЛИПКОВ Сергей Иванович, канд. техн. наук, нач. отдела Главного информационно- вычислительного центра государственного предприятия Национальная энергетическая компания «Укрэнерго». В 1974 г. окончил Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований — электроэнергетика.