УДК 532.546: 519.63

Х.М. Гамзаев, д-р техн. наук
Азербайджанская государственная нефтяная академия
(Азербайджан, AZ 1010, Баку, пр-т Азадлыг, 20,
тел. (994 55) 6826701, e-mail: xan.h@rambler.ru)

Численное решение задачи ненасыщенной фильтрации с подвижной границей

Рассмотрен процесс фильтрации жидкости с частичным насыщением пор, описываемый нелинейным параболическим уравнением в области с подвижной границей. Поставлена обратная задача по определению скорости фильтрационного потока во входном сечении пористой среды по заданному закону движения подвижной границы. С применением методов выпрямления фронтов и разностной аппроксимации поставленная задача сводится к решению системы разностных уравнений. Предложен вычислительный алгоритм для решения полученной системы.

Розглянуто процес фільтрації рідини з частковим насиченням пор, описуваний нелінійним параболічним рівнянням в області з рухливою межею. Поставлено обернену задачу визначення швидкості фільтраційного потоку у вхідному перерізі пористого середовища по заданому закону руху рухливої межі. При застосуванні методів спрямлення фронтів та різницевої апроксимації поставлену задачу зведено до розв'язку системи різницевих рівнянь. Запропоновано обчислювальний алгоритм розв'язування отриманої системи.

Ключевые слова: ненасыщенная фильтрация, краевая задача с подвижной границей, обратная задача, метод выпрямления фронтов, разностной метод.

Известно, что в грунтах зоны аэрации, залегающих между поверхностью земли и грунтовым потоком, поры в значительной степени могут быть заполнены атмосферными газами или водяным паром. Поэтому в отличие от глубоких пластов, фильтрация жидкостей в грунтах зоны аэрации может происходить с частичным насыщением пор грунтов.

Многочисленные эксперименты свидетельствуют о том, что при фильтрации жидкостей в пористой среде с частичным насыщением главными действующими силами являются силы капиллярного давления и гравитации [1—3]. Поскольку капиллярное давление больше давления в газовой фазе, можно пренебречь давлением газовой фазы и не учитывать ее движение. Обычно при моделировании фильтрации жидкостей в пористой среде с частичным насыщением исходными являются:

закон фильтрации (закон Дарси), связывающий скорость потока с градиентом действующих сил —

$$u=-\frac{k}{\gamma}\frac{\partial p_k}{\partial x},\ \ v=-\frac{k}{\gamma}\frac{\partial p_k}{\partial y},\ \ \omega=-\frac{k}{\gamma}\left(\frac{\partial p_k}{\partial z}-\gamma\right), \qquad (1)$$

закон сохранения массы —

$$\frac{\partial w\rho}{\partial t}+\frac{\partial u\rho}{\partial x}+\frac{\partial v\rho}{\partial y}+\frac{\partial \omega\rho}{\partial z}=0, \qquad (2)$$

капиллярное соотношение —

$$p_k=p_k(w). \qquad (3)$$

Здесь z — вертикальная ось, направленная вниз; x, y — горизонтальные оси; t — время; u, v, ω — компоненты скорости фильтрации; w — объемная влажность грунта (отношение объема жидкости к объему всего грунта, включая его скелет, жидкость и газ); p_k — капиллярное давление; ρ — плотность жидкости; k — коэффициент фильтрации, зависящий от влажности грунта w; γ — удельный вес жидкости.

Подставив в (2) значения u, v, ω из (1), а затем p_k из (3) и считая ρ постоянной, получим так называемое уравнение ненасыщенной фильтрации:

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(D(w)\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(D(w)\frac{\partial w}{\partial z}\right)-\frac{\partial k(w)}{\partial z}, \qquad (4)$$

где D — коэффициент диффузии,

$$D(w)=\frac{k(w)}{\gamma}\frac{\partial p_k(w)}{\partial w}.$$

Аналогичное уравнение впервые получено Л.А. Ричардсом [4]. Оно описывает процесс фильтрации жидкостей с частичным насыщением пористой среды, в том числе процесс проникновения в почву слоя жидкостей, разлитых по поверхности земли, и атмосферных осадков. Следует заметить, что функции $D(w)$ и $k(w)$ определяются экспериментально [5].

Для моделирования процессов фильтрации с частичным насыщением на основе уравнения ненасыщенной фильтрации (4) необходимо иметь информацию о начальном состоянии пористой среды и условиях на границе области фильтрации. Однако во многих процессах фильтрации с частичным насыщением процесс происходит в области с подвижной границей, закон перемещения которой заранее неизвестен. Поэтому исследование таких процессов на основе модели (4) сводится к решению краевой задачи с неизвестной подвижной границей. В связи с этим возникает необходимость в разработке методов численного моделирования процессов фильтрации с частичным насыщением в области с неизвестной подвижной границей.

Постановка задачи. Пусть в сечении пористой среды $z=0$ подается поток жидкости со скоростью $q(t)$. Под действием сил гравитации и капиллярного давления в пористой среде образуется одномерный фильтрационный поток с частичным насыщением, двигающийся с конечной скоростью в направлении гравитации. В пористой среде образуется область фильтрации с подвижной границей $s(t)$. При этом $s'(t)>0,\ t>0$, т.е. область фильтрации монотонно расширяется. Тогда уравнение (4) для данного фильтрационного процесса принимает вид

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(D(w)\frac{\partial w}{\partial z}\right)-k'(w)\frac{\partial w}{\partial z},\ (z,t)\in\Omega_s=\{0<z<s(t),\ 0<t\le T\}. \quad (5)$$

Пусть в начальный момент времени $t=0$ влажность пористой среды и положение подвижной границы известны, т.е. для уравнения (5) запишем следующие начальные условия:

$$w|_{t=0}=w_s,\ 0\le z\le s(0), \quad (6)$$

$$s(0)=s_*,\ s_*\ge 0. \quad (7)$$

В сечении $z=0$ для уравнения (5) примем следующее граничное условие:

$$-D(w)\frac{\partial w}{\partial z}+k(w)=q(t),\ \ z=0,\ \ 0<t\le T. \quad (8)$$

Предполагая, что влажность на подвижной границе равна начальной влажности в пористой среде w_s, условие на подвижной границе представим в виде

$$w(z,t)=w_s,\ \ z=s(t),\ \ 0<t\le T. \quad (9)$$

Заметим, что уравнение (5) выполняется в области с подвижной границей, а закон перемещения подвижной границы неизвестен. Следовательно, для корректной постановки задачи необходимо задать дополнительное условие. Учитывая физическое свойство ненасыщенного фильтрационного потока в пористой среде, в качестве дополнительного условия примем следующее:

$$\frac{\partial w}{\partial z}=0,\ \ z=s(t),\ \ 0<t\le T. \quad (10)$$

Прямая задача фильтрации с частичным насыщением состоит в нахождении функций $w(z,t)$, $s(t)$, удовлетворяющих уравнению (5) с заданными функциями $D(w)$, $k(w)$ и дополнительными условиями (6)—(10). Ее существенной особенностью является наличие подвижной границы, закон перемещения которой определяется в ходе решения задачи. Прямая задача (5)—(10) относится к классу краевых задач со свободной границей [6—9]. Однако для процессов фильтрации с частичным насыщением важное практическое значение имеют задачи, в которых по заранее заданному закону движения подвижной границы определяются те режимы во входном сечении пористой среды, при которых такие движения возможны.

В связи с этим поставим следующую обратную задачу: определить такой режим во входном сечении пористой среды, который обеспечивал бы перемещения подвижной границы по заданному закону. Таким образом, закон перемещения подвижной границы $s(t)$ считается известным и требуется определить функции $q(t)$, $w(z,t)$ с помощью уравнений (5) и дополнительных условий (6)—(10).

Метод решения. Используя метод выпрямления фронтов, преобразуем задачу (5)—(10). Заменой переменных $y = z / s(t)$, $t = t$, $w(z,t) = w(y,t)$ область задания уравнения (5) Ω_s отобразим на область $\Omega = \{0 < y < 1, 0 < t \le T\}$. Тогда уравнение (5) и условия (6)—(10) принимают вид

$$s^2(t)\frac{\partial w}{\partial t} = u(y,t)\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left(D(w)\frac{\partial w}{\partial y}\right) - s(t)\,k'(w)\frac{\partial w}{\partial y},$$

$$(y,t) \in \Omega = \{0 < y < 1, 0 < t \le T\}, \tag{11}$$

$$w|_{t=0} = w_s,\ \ 0 \le y \le 1, \tag{12}$$

$$s(0) = s_*,\ \ s_* \ge 0, \tag{13}$$

$$-D(w)\frac{\partial w}{\partial y} + s(t)\,k(w) = q(t)\,s(t), \quad y = 0,\ \ 0 < t \le T, \tag{14}$$

$$w(y,t) = w_s,\ \ y = 1,\ \ 0 < t \le T, \tag{15}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0,\ \ z = 1,\ \ 0 < t \le T, \tag{16}$$

где $u(y,t) = ys(t)(ds)/dt$. Преимущество такого преобразования заключается в том, что полученная задача (11)—(16) рассматривается в прямоугольной области Ω с фиксированными границами. Поскольку неизвестными являются функции $w(y,t)$ и $q(t)$, задача (11)—(16) относится к классу граничных обратных задач [10, 11].

Поставим в соответствие дифференциальной задаче (11)—(16) разностную задачу, проведя дискретизацию по пространству и времени. Для этого введем равномерную разностную сетку $\varpi_{h\tau} = \{(y_i, t_j) : y_i = ih,\ t_j = j\tau,$

$i=0,1,2,...,n,\ j=0,1,2,...,m\}$ с шагами $h=1/n$ по переменной y и $\tau=T/m$ по переменной t. Разностный аналог уравнения (11) на сетке $\varpi_{h\tau}$ запишем в виде

$$(s^j)^2\frac{w_i^j-w_i^{j-1}}{\tau}=u_i^j\,\frac{w_{i+1}^j-w_i^j}{h}+\frac{1}{h}\left[D_{i+1/2}^{j-1}\frac{w_{i+1}^j-w_i^j}{h}-D_{i-1/2}^{j-1}\frac{w_i^j-w_{i-1}^j}{h}\right]-$$

$$-s^j k'(w_i^{j-1})\frac{w_i^j-w_{i-1}^j}{h},\ i=1,2,...,n-1,\ j=1,2,...,m.$$

Разностные аналоги начальных и граничных условий (12)—(16) запишем в виде

$$w_i^0=w_s,\ 0\le i\le n,\ s^0=s_*,$$

$$-D(w_0^{j-1})\frac{w_1^j-w_0^j}{h}+s^j k(w_0^{j-1})=q^j s^j,$$

$$w_n^j=w_s,\ \frac{w_n^j-w_{n-1}^j}{h}=0,$$

где

$$w_i^j\approx w(y_i,t_j);\ D_{i\pm1/2}^{j-1}=(D(w_{i\pm1}^{j-1})+D(w_i^{j-1}))/2;$$

$$q^j=q(t_j);\ s^j\approx s(t_j);\ u_i^j=u(y_i,t_j).$$

Преобразуем полученную систему линейных алгебраических уравнений к виду

$$a_i w_{i-1}^j-c_i w_i^j+b_i w_{i+1}^j=-f_i^{\,j-1},\ i=\overline{1,n-1}, \tag{17}$$

$$w_i^0=w_s,\ 0\le i\le n, \tag{18}$$

$$s^0=s_*, \tag{19}$$

$$w_1^j=w_0^j+r-\lambda q^j, \tag{20}$$

$$w_n^j=w_s, \tag{21}$$

$$w_n^j=w_{n-1}^j, \tag{22}$$

где

$$a_i=\frac{D_{i-1/2}^{j-1}}{h^2}+\frac{s^j k'(w_i^{j-1})}{h};\quad b_i=\frac{D_{i+1/2}^{j-1}}{h^2}+\frac{u_i^j}{h};\quad c_i=a_i+b_i+\frac{(s^j)^2}{\tau};$$

$$f_i^{\,j-1}=\frac{(s^j)^2}{\tau}w_i^{j-1};\quad r=\frac{k(w_0^{j-1})hs^j}{D(w_0^{j-1})};\quad \lambda=\frac{hs^j}{D(w_0^{j-1})}.$$

Заметим, что система линейных алгебраических уравнений (17) имеет трехдиагональную матрицу. Следовательно, после определения q^j решение данной системы можно найти устойчивым методом прогонки. Для преобразования данной системы используем подход, предложенный в [12]. Решение системы (17)—(22) при каждом фиксированном значении j представим в виде

$$w_{i+1}^j = \alpha_{i+1} w_i^j + \beta_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, ..., n-1, \tag{23}$$

где α_{i+1}, β_{i+1} — неизвестные пока коэффициенты. Аналогично запишем $w_i^j = \alpha_i w_{i-1}^j + \beta_i$. Подставляя выражения w_i^j, w_{i-1}^j в уравнение (17), получаем следующие формулы для определения коэффициентов α_i и β_i :

$$\alpha_i = \frac{a_i}{c_i - \alpha_{i+1} b_i}, \quad \beta_i = \frac{b_i \beta_{i+1} + f_i^{j-1}}{c_i - \alpha_{i+1} b_i}, \quad i = n-1, n-2, ..., 1.$$

Начальные значения этих коэффициентов находим, выполняя требования эквивалентности условия (22) уравнению (23) при $i = n$: $\alpha_n = 1$, $\beta_n = 0$. Найдя коэффициенты α_i, β_i для всех $i = \overline{1, n}$, определим зависимость между w_n^j и q^j в явном виде. Для этого уравнение (23) запишем при $i = n-1$: $w_n^j = \alpha_n w_{n-1}^j + \beta_n$. Подставив сюда выражение $w_{n-1}^j = \alpha_{n-1} w_{n-2}^j + \beta_{n-1}$, получим

$$w_n^j = \alpha_n \alpha_{n-1} w_{n-2}^j + \alpha_n \beta_{n-1} + \beta_n. \tag{24}$$

Далее, подставляя в уравнение (24) выражения для w_{n-2}^j, w_{n-3}^j, ..., w_1^j, получаем формулу, в которой w_n^j выражено через w_0^j :

$$w_n^j = w_0^j \prod_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \prod_{l=i+1}^{n} \alpha_l + \beta_n. \tag{25}$$

Теперь, исключив w_1^j из системы уравнений

$$w_1^j = \alpha_1 w_0^j + \beta_1,$$

$$w_1^j = w_0^j + r - \lambda q^j,$$

получим соотношение, связывающее w_0^j и q^j:

$$w_0^j = \frac{\beta_1 - r}{1 - \alpha_1} + \frac{\lambda}{1 - \alpha_1} q^j. \tag{26}$$

Подставляя соотношение (26) в уравнение (25), получаем искомую зависимость между w_n^j и q^j:

$$w_n^j = \frac{\beta_1 - r}{1-\alpha_1}\prod_{i=1}^{n}\alpha_i + q^j \frac{\lambda}{1-\alpha_1}\prod_{i=1}^{n}\alpha_i + \sum_{i=1}^{n-1}\beta_i \prod_{l=i+1}^{n}\alpha_l + \beta_n .$$

Отсюда находим

$$q^j = \frac{r-\beta_1}{\lambda} + \frac{\left(w_n^j - \sum_{i=1}^{n-1}\beta_i \prod_{l=i+1}^{n}\alpha_l - \beta_n\right)(1-\alpha_1)}{\lambda \prod_{i=1}^{n}\alpha_i}.$$

t	Значение $q(t)$		
	Точное	Рассчитанное для входных данных	
		точных при $\tau = 0{,}01$	с погрешностью $\delta = 0{,}01$ при $\tau = 0{,}1$
0,1	0,494	0,494	0,488
0,2	0,488	0,488	0,499
0,3	0,482	0,482	0,495
0,4	0,476	0,476	0,450
0,5	0,470	0,470	0,466
0,6	0,464	0,464	0,490
0,7	0,458	0,458	0,441
0,8	0,452	0,452	0,448
0,9	0,446	0,446	0,470
1,0	0,440	0,440	0,447
1,1	0,434	0,434	0,410
1,2	0,428	0,428	0,478
1,3	0,422	0,422	0,377
1,4	0,417	0,417	0,407
1,5	0,411	0,411	0,376
1,6	0,405	0,405	0,430
1,7	0,400	0,400	0,489
1,8	0,394	0,394	0,342
1,9	0,388	0,388	0,399
2,0	0,383	0,383	0,334

Определив q^j, по формуле (26) можно найти w_0^j и затем по рекуррентной формуле (23) определить w_1^j, w_2^j, ..., w_{n-1}^j. При переходе на следующий временной слой описанная процедура вычислений повторяется.

Таким образом, предложенный численный метод позволяет в каждом временном слое определить скорость фильтрационного потока во входном сечении пористой среды, который обеспечивает движение подвижной границы по заданному закону и распределение влажности в пористой среде.

Результаты численных расчетов. Для выяснения эффективности предложенного вычислительного алгоритма были проведены численные эксперименты для модельных задач. Схема численного эксперимента следующая. Для заданных функций $q(t)$, $s(t)$ решается прямая задача (11)—(14), (16). Найденная зависимость $w(1,t)$ принимается в качестве точных данных для численного решения обратной задачи по восстановлению функции $q(t)$.

Первая серия расчетов выполнялась с использованием точных данных, вторая серия проводилась при наложении на $w(1,t)$ некоторой функции, моделирующей погрешность входных данных: $\tilde{w}(1,t) = w(1,t) + \delta\sigma(t)$, где $\sigma(t)$ — случайный процесс, моделируемый с помощью датчика случайных чисел; δ — уровень погрешности. Расчеты выполнены на пространственно-временной разностной сетке с шагами $h = 0{,}04$; $\tau = 0{,}01$, $\tau = 0{,}1$. Результаты численного эксперимента при $D(w) = w^2$, $k(w) = w$, $s(t) = 0{,}5\sqrt{t}$, $q(t) = 0{,}5 - 0{,}3\sin(t/3)$ представлены в таблице.

Как видно из результатов численного эксперимента, при использовании невозмущенных входных данных искомая функция $q(t)$ восстанавливается точно при всех расчетных сетках по времени. При использовании возмущенных входных данных, в которых погрешность имеет флуктуационный характер, искомая функция $q(t)$ восстанавливается с погрешностью. Погрешности во входных данных проявляются более существенно при уменьшении шага по времени. Однако увеличение шага по времени $(\tau = 0{,}1)$ обеспечивает устойчивость алгоритма к погрешностям входных данных. Анализ результатов численного эксперимента свидетельствует о том, что в предложенном вычислительном алгоритме эффект регуляризации обеспечивается выбором разностной сетки по времени.

Выводы

Предложенный вычислительный алгоритм, основанный на использовании методов выпрямления фронтов и разностной аппроксимации, позволяет решить граничную обратную задачу определения режима во входном сечении пористой среды, обеспечивающего перемещения подвижной границы по заданному закону.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. — М. : Наука, 1977.
2. *Веригин Н.Н. и др.* Гидродинамические и физико-химические свойства горных пород. — М. : Недра, 1977.
3. *Бондаренко Н.Ф.* Физика движения подземных вод.— М.: Недра, 1973.
4. *Richards L.A.* Capilary conduction of liquids through porous mediums//App. Physics.— 1931. — Vol. 1, No 5. — P. 318—322.
5. *Bear J.* Hydraulics of Groundwater.— N Y : McGraw-Hill Ins., 1979.
6. *Вентцель Т.Д.* Об одной задаче со свободной границей для уравнения теплопроводности // ДАН СССР. — 1960. — **131**, № 5. — С.1000—1003.
7. *Вабищевич П.Н.* Численные методы решения задач со свободной границей.— М. : Изд-во Московского ун-та, 1987.
8. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Вычислительная теплопередача. — М. : Едиториал УРСС, 2003.
9. *Костерина Е.А., Лапин А.В.* Решение задачи о насыщенно-ненасыщенной фильтрации жидкости в грунте с отслеживанием фронта насыщенности// Изв. ВУЗ. Математика. — 1995, № 6. — С. 42—50.
10. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Численные методы решения обратных задач математической физики. — М. : Изд-во ЛКИ, 2009.
11. *Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В.* Экстремальные методы решения некорректных задач. — М .: Наука, 1988.
12. *Гамзаев Х.М.* Численный метод решения обратной задачи поршневого вытеснения нефти из пласта водой// Инженерно-физический журнал. — 2012. — **85**, № 5. — С. 925—930.

Kh.M. Gamzaev

NUMERICAL SOLUTION OF PROBLEM
OF UNSATURATED FILTRATION WITH A MOVING BOUNDARY

The article describes the process of filtration of a fluid with partial saturation then described by a nonlinear parabolic equation in a region with moving boundary. The inverse problem is posed on determination of filtration flow speed in the inlet section of the porous medium under the given law of motion of a mobile boundary. Applying methods of rectification fronts and differential approximation, the problem is reduced to solving systems of difference equations. A numerical algorithm was proposed to solve the obtained system of difference equations.

K e y w o r d s: unsaturated filtering, boundary value problem with moving boundary, inverse problem, the method of straightening fronts, difference method.

REFERENCES

1. *Polubarinova-Kochina P.Y.* Theory of the movement of ground waters. — Moscow: Nauka, 1977 (in Russian).
2. *Verigin N.N., et al.* Hydrodynamic and physical and chemical properties of rocks. — Moscow: Nedra, 1977 (in Russian).
3. *Bondarenko N.F.* Physics of Motion of Underground Waters. — Moscow: Nedra, 1973. (in Russian).
4. *Richards L.A.* Capillary conduction of liquids through porous mediums // Appl. Physics. — 1931. — Vol. 1, No 5. — P. 318—322.
5. *Bear J.* Hydraulics of Groundwater. — NY : McGraw-Hill Inc., 1979.

6. *Venttsel T.D.* About one task with free border for the heat conduction equation // Papers Acad. Sc. of the USSR — 1960. — Vol. 131, No 5 — P. 1000—1003 (in Russian).
7. *Vabishchevich P.N*. Numerical Methods for Solution of Problems with Free Border. — Moscow: — Moscow University Press, 1987 (in Russian).
8. *Samarskiy A.A., Vabishchevich P.N.* Computing Heat Transfer. — Moscow: Editorial of URSS, 2003 (in Russian).
9. *Kosterina E.A., Lapin A.V.* Solution of a problem on saturated-unsaturated filtration of liquid in soil with tracking the front of a saturation // Proc. of Higher Educational Institutions, Mathematics. — 1995. — No 6. — P. 42—50 (in Russian).
10. *Samarskiy A.A., Vabishchevich P.N*. Numerical methods for solution of inverse problems of mathematical physics. — Moscow: LKI Publishing House, 2009 (in Russian).
11. *Alifanov O.M., Artyukhin E.A., Rumyantsev S.V.* Extreme Methods for Solution of Incorrect Problems. — Moscow: Nauka, 1988 (in Russian).
12. *Gamzaev Kh.M*. Numerical Method for Solving the Inverse Problem of Water-Oil Plug Displacement from the Oil Pool // Engineering Physics J. — 2012. — Vol. 85, No 5. — P. 1004—1010 (in Russian).

Поступила 30.07.14

ГАМЗАЕВ Ханлар Мехвали оглы, д-р. техн. наук, доцент кафедры прикладой математики Азербайджанской государственной нефтяной академии, которую окончил в 1976 г. Область научных исследований — математическое моделирование пластовых систем, численные методы.