
УДК 519.63:532.546

Р.А. Мустафаев, канд. физ.-мат. наук
Ин-т кибернетики Национальной академии наук Азербайджана
(Азербайджан, Az 1141, Баку, ул. Б. Вагабзаде, 9,
тел. (+99412) 5392275, e-mail: aradmu@rambler.ru)

Математическое моделирование нестационарного процесса движения двух несмешивающихся жидкостей в пористой среде с учетом анизотропии проницаемости пласта

Математическое моделирование в рамках гидродинамической модели предельно-анизотропного пласта (случай $k_z = \infty$) проведено на основе численного исследования нестационарной задачи с подвижными границами. Рассмотрен процесс вытеснения нефти несмешивающейся с ней водой в горизонтальном пласте конечного радиуса при различных вязкостях и плотностях в случае плоско-радиального течения. Составлена итерационно-разностная схема с использованием метода выпрямления фронтов. Приведены результаты численного эксперимента.

Математичне моделювання в рамках гідродинамічної моделі гранично-анізотропного пласта (випадок $k_z = \infty$) проведено на основі чисельного дослідження нестационарної задачі з рухливими границями. Розглянуто процес витіснення нафти не змішуваною з нею водою в горизонтальному пласті кінцевого радіуса при різних в'язкостях та густоті у випадку плоско-радіальної течії. Складено ітераційно-різницева схема з використанням метода спрямлення фронтів. Наведено результати чисельного експерименту.

К л ю ч е в ы е с л о в а: нестационарная задача с подвижными границами, модель предельно-анизотропного пласта, метод выпрямления фронтов, итерационно-разностная схема.

Задача о вытеснении пластовой жидкости или газа нагнетаемой в скважину жидкостью с другими физическими свойствами имеет большое практическое и теоретическое значение. При закачке в скважину, расположенную в продуктивном пласте, жидкости с физическими свойствами, отличными от пластовой в случае пренебрежения силой тяжести и учете лишь силы давления и сопротивления движению граница раздела между жидкостями имеет цилиндрическую форму. Однако вследствие влияния силы тяжести и различия физических свойств граница раздела жидкостей представляет собой некоторую криволинейную поверхность, отличную от

© Р.А. Мустафаев, 2014

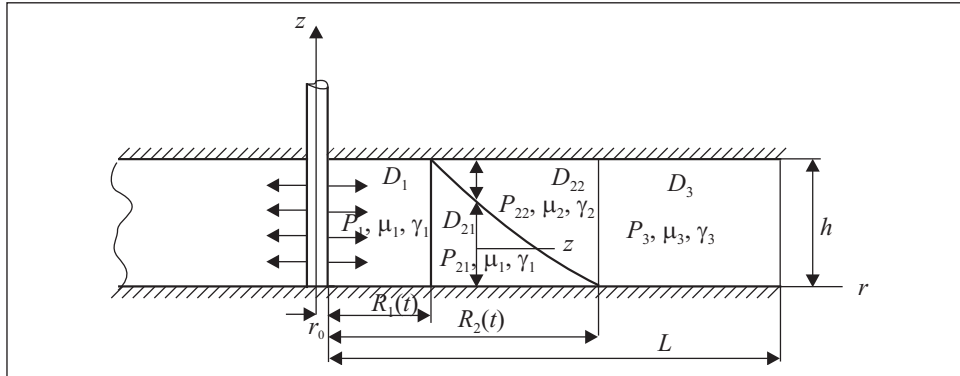


Рис. 1. Области, возникающие в процессе фильтрации жидкостей

цилиндрической. При этом, если нагнетаемая жидкость тяжелее пластовой, то она погружается в нижнюю часть пласта и по его подошве продвигается быстрее, чем по кровле. Если нагнетаемая жидкость легче пластовой, то она продвигается по кровле быстрее, чем по подошве пласта.

В результате в процессе фильтрации жидкостей с различными физическими свойствами, плотностями и вязкостями возникают три области. Первая область D_1 занята одной нагнетаемой жидкостью, вторая — нагнетаемой D_{21} и вытесняемой D_{22} , а третья D_3 заполнена только вытесняемой жидкостью (рис. 1).

Для исследования процессов вытеснения в подземной гидродинамике применяют различные гидродинамические модели. Одной из них является модель предельно-анизотропных пластов [1—3]. При этом в случае, когда коэффициент проницаемости в направлении, перпендикулярном напластованию, $k_z = \infty$, получаемые результаты близки к экспериментальным данным [4].

На основе модели предельно-анизотропных пластов автомодельное решение задачи перемещения водо-нефтяного контакта в случае жесткого режима фильтрации для прямолинейного и радиального движений рассмотрено в работах [2, 3], а численное решение полученных нелинейных параболических уравнений приведено в работах [3, 5]. Аналогичная задача возникает в связи с проблемой охраны окружающей среды, когда для уменьшения сбросов промышленных отходов в реки и водоемы осуществляют их нагнетание в скважины, вскрывающие глубокозалегающие достаточно проницаемые водо- или газосодержащие пласты [6—8].

В [2, 3, 5] движение жидкостей рассматривается только в области границы раздела без учета движения закачиваемой жидкости перед границей раздела и вытесняемой жидкости за границей раздела. В [6, 7] рас-

смотрено автомодельное решение задачи с учетом трех указанных областей для случая закачки жидкости в галерею, а в [8] решается осесимметричная задача при упругом режиме фильтрации. Полученные в [6—8] автомодельные решения достаточно сложны для практического применения. Поэтому целесообразно применение численных методов для решения указанного класса задач.

Применение модели предельно-анизотропных пластов позволяет на порядок понизить размерность исследуемых задач и вместо двумерной постановки исследовать процесс в одномерной постановке.

Постановка задачи. Рассмотрим осесимметричную задачу вытеснения нефти несмешивающейся с ней водой при нагнетании воды через гидродинамически совершенную скважину, расположенную в центре конечного горизонтального пласта радиуса L постоянной мощности h при различных вязкостях μ_i и плотностях ρ_i жидкостей ($i = 1, 2$), где индекс 1 — вода, а индекс 2 — вытесняемая нефть. Пласт считается предельно-анизотропным ($k_z = \infty$), жидкости — упругими, а движение — происходящим в упругой пористой среде [3]. Предполагается, что объемный вес γ_1 закачиваемой жидкости больше, чем пластовой γ_2 : $\gamma_1 - \gamma_2 > 0$ (см. рис. 1).

Сформулируем задачу: определить давление $p_1(r, t)$, $p_{21}(r, t)$, $p_{22}(r, t)$, $p_3(r, t)$, в каждой области, положение подвижных границ $R_1(t)$ и $R_2(t)$ и границы водо-нефтяного контакта (ВНК) $z(r, t)$, используя следующие уравнения

$$\chi_1 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p_1}{\partial r} \right) = \frac{\partial p_1}{\partial t} \quad (1)$$

в области $D_1: \{r_0 < r < R_1(t), 0 < t < T\}$;

$$\chi_{21} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[rz \frac{\partial p_{21}}{\partial r} \right] = z \frac{\partial p_{21}}{\partial t} + \alpha_1(p_{21}) \frac{\partial z}{\partial t} \quad (2)$$

в области $D_{21}: \{R_1(t) < r < R_2(t), 0 < t < T, h > z(r, t) > 0\}$;

$$\chi_{22} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r(h-z) \frac{\partial p_{22}}{\partial r} \right] = (h-z) \frac{\partial p_{22}}{\partial t} + \alpha_2(p_{22}) \frac{\partial z}{\partial t} \quad (3)$$

в области $D_{22}: \{R_1(t) < r < R_2(t), 0 < t < T, 0 < h - z(r, t) < h\}$;

$$\chi_3 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p_3}{\partial r} \right) = \frac{\partial p_3}{\partial t} \quad (4)$$

в области $D_3: \{R_2 < r < L, 0 < t < T\}$;

$$p_{21}(r, t) = p_{22}(r, t) + \Delta\gamma z(r, t) + h\gamma_2, \quad \Delta\gamma = \gamma_1 - \gamma_2 > 0; \quad (5)$$

$$R_i(0) = R_{i,0}, \quad p_1(r, 0) = \varphi_1(r), \quad r_0 \leq r \leq R_1(0), \quad p_{2i}(r, 0) = \varphi_{2i}(r) \quad (i=1, 2);$$

$$R_i(0) \leq r \leq R_2(0), \quad p_3(r, 0) = \varphi_3(r), \quad R_2(0) \leq r \leq L, \quad (6)$$

и краевые условия:

$$\left[A \frac{\partial p_1(r, t)}{\partial r} + B p_1(r, t) \right]_{r=r_0} = f(t), \quad 0 \leq t \leq T; \quad (7)$$

$$\left[C p_3(r, t) + D \frac{\partial p_3(r, t)}{\partial r} \right]_{r=L} = \varphi(t), \quad 0 \leq t \leq T; \quad (8)$$

$$p_1(r, t)|_{r=R_1(t)} = p_{22}(r, t)|_{r=R_1(t)} + h\gamma_1, \quad 0 \leq t \leq T; \quad (9)$$

$$\frac{kh}{\mu_1} \frac{\partial p_1(r, t)}{\partial r} \Big|_{r=R_1(t)} = \frac{kh}{\mu_1} \frac{\partial p_{21}(r, t)}{\partial r} \Big|_{r=R_1(t)}, \quad 0 \leq t \leq T; \quad (10)$$

$$p_{21}(r, t)|_{r=R_2(t)} = p_3(r, t)|_{r=R_2(t)}, \quad 0 \leq t \leq T; \quad (11)$$

$$\frac{kh}{\mu_2} \frac{\partial p_{22}(r, t)}{\partial r} \Big|_{r=R_2(t)} = \frac{kh}{\mu_2} \frac{\partial p_3(r, t)}{\partial r} \Big|_{r=R_2(t)}, \quad 0 \leq t \leq T; \quad (12)$$

$$\frac{dR_i(t)}{dt} = \beta_{3-i} \frac{\partial p_{23-i}(r, t)}{\partial r} \Big|_{r=R_i(t)} \quad (i=1, 2), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (13)$$

Здесь обозначено

$$\chi_1 = \chi_{21} = \frac{kK_1}{m\mu_1}; \quad \chi_{22} = \chi_3 = \frac{kK_2}{m\mu_2}; \quad \mu_0 = \mu_2\mu_1^{-1};$$

$$\alpha_i(p_{2i}) = K_i + (p_{2i} - p_0); \quad \beta_{3-i} = -\frac{k}{m\mu_{3-i}} \quad (i=1, 2);$$

k — проницаемость; m — пористость пласта; K_i — совместный модуль упругости соответствующей жидкости и пористой среды, $i = 1, 2$; p_1, p_{21}, p_3 — давления на подошве; p_{22} — давление на кровле пласта. Значения коэффициентов A, B, C, D и функций $f(t)$ и $\varphi(t)$ определяются краевыми условиями (7) и (8), записанными в общем виде для всех комбинаций условий 1-го и 2-го рода, задаваемых на нагнетательной скважине и внешнем контуре.

Предполагается, что выполнены условия сопряжения и подвижные границы $R_1(t)$, $R_2(t)$ не совпадают между собой и с концами рассматриваемого отрезка $[r_0, L]$:

$$f(0) = \varphi_1(r_0), \quad \varphi(0) = \varphi_3(L), \quad \varphi_1(R_1(0)) = \varphi_2(R_1(0)), \\ \varphi_2(R_2(0)) = \varphi_3(R_2(0)), \quad R_1(0) \neq r_0, \quad R_1(0) \neq R_2(0), \quad R_3(0) \neq L.$$

Метод численного решения. Для решения задачи введены безразмерные переменные

$$\frac{r}{L_0} = r^*, \quad \frac{t}{T_0} = t^*, \quad \frac{p(r, t)}{P_0} = p^*(r^*, t^*), \quad \frac{z}{h} = z^*,$$

где L_0 , T_0 , P_0 — известные размерные параметры (далее звездочка опущена), и применен метод выпрямления фронтов [9]:

$$s_i = [r - R_{i-1}(t)][R_i(t) - R_{i-1}(t)]^{-1} + (i-1), \quad t = t \quad (i = \overline{1, 3}).$$

Здесь $i = 1$ относится к области D_1 , $i = 2$ — к областям D_{21} и D_{22} , а $i = 3$ — к области D_3 . Тогда исходные области D_1 , D_{2k} ($k = 1, 2$) и D_3 можно преобразовать в прямоугольные:

$$D_1^* = \{0 < s_1 < 1, 0 < t < T\}, \\ D_{2k}^* = \{1 < s_2 < 2, 0 < t < T\}, \quad k = 1, 2, \\ D_3^* = \{2 < s_3 < 3, 0 < t < T\}.$$

При этом внутренняя граница, поверхности раздела $R_1(t)$, $R_2(t)$ и внешняя граница «выпрямляются» и определяются уравнениями $s_{i-1} - 1 = i - 1$, $i = \overline{1, 4}$. В результате исходная задача (1)—(13) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} = a_1^2 [R_1(t) - r_0]^{-2} \frac{\partial^2 P_1}{\partial s_1^2} + a_1^2 \{ [s_1 (R_1(t) - r_0) + \\ + r_0] [R_1(t) - r_0] \}^{-1} \frac{\partial P_1}{\partial s_1} + s_1 \dot{R}_1(t) [R_1(t) - r_0]^{-1} \frac{\partial P_1}{\partial s_1} \quad (14)$$

в области $D_1^* : \{0 < s_1 < 1, 0 < t < T\}$;

$$z_k \frac{\partial P_{2k}}{\partial t} = a_{2k}^2 [R_2(t) - R_1(t)]^{-2} \frac{\partial}{\partial s_2} \left(z_k \frac{\partial P_{2k}}{\partial s_2} \right) + a_{2k}^2 \{ [(s_2 - 1)(R_2(t) - R_1(t)) + \\ + R_1(t)]^{-1} [R_2(t) - R_1(t)]^{-1} + (2 - s_2) \dot{R}_k(t) [R_2(t) - R_1(t)]^{-1} \} \frac{\partial P_{2k}}{\partial s_2} +$$

$$+\alpha_k \left[\frac{\partial z_k}{\partial t} + \frac{\partial z_k}{\partial s_2} \frac{ds_2}{dt} \right] \quad (15)$$

в области $D_{2k}^* : \{1 < s_2 < 2, 0 < t < T\}$, $k = 1, 2$, $z_k = \begin{cases} z & \text{при } k=1, \\ 1-z & \text{при } k=2; \end{cases}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_3}{\partial t} = & a_3^2 [R_3(t) - R_2(t)]^{-2} \frac{\partial^2 P_3}{\partial s_3^2} + a_3^2 \{ [(s_3 - 2)(R_3(t) - R_2(t)) + \\ & + R_2(t)]^{-1} [R_3(t) - R_2(t)]^{-1} + (3 - s_3) \dot{R}_2(t) [R_3(t) - R_2(t)]^{-1} \} \frac{\partial P_3}{\partial s_3} \end{aligned} \quad (16)$$

в области $D_3^* : \{2 < s_3 < 3, 0 < t < T\}$;

$$\begin{aligned} R_k(0) &= R_{k,0}, \quad P_1(s_1^0, 0) = \phi_1(s_1^0), \quad 0 \leq s_1^0 \leq 1, \\ P_{2k}(s_2^0, 0) &= \phi_{2,k}(s_2^0), \quad 1 \leq s_2^0 \leq 2, \quad (k = 1, 2), \\ P_3(s_3^0, 0) &= \phi_3(s_3^0), \quad 2 \leq s_3^0 \leq 3; \end{aligned} \quad (17)$$

$$\left[A^* (R_1(t) - R_0(t))^{-1} \frac{\partial P_1}{\partial s_1} + B^* P_1 \right]_{s_1=0} = f^*(t), \quad 0 \leq t \leq T; \quad (18)$$

$$\left[C^* P_3 + D^* (R_3(t) - R_2(t))^{-1} \frac{\partial P_3}{\partial s_3} \right]_{s_3=3} = \varphi^*(t), \quad 0 \leq t \leq T; \quad (19)$$

$$P_1(s_1, t)|_{s_1=1} = P_{22}(s_1, t)|_{s_1=1} + H\gamma_1, \quad 0 \leq t \leq T; \quad (20)$$

$$P_3(s_2, t)|_{s_2=2} = P_{21}(s_2, t)|_{s_2=2}, \quad 0 \leq t \leq T; \quad (21)$$

$$\alpha_1 \left((R_1(t) - r_0)^{-1} \frac{\partial P_1}{\partial s_1} \right)_{s_1=1} = \alpha_1 \left((R_2(t) - R_1(t))^{-1} \frac{\partial P_{21}}{\partial s_2} \right)_{s_2=1}, \quad 0 \leq t \leq T; \quad (22)$$

$$\alpha_2 \left((R_2(t) - R_1(t))^{-1} \frac{\partial P_{22}}{\partial s_2} \right)_{s_2=2} = \alpha_2 \left((R_3(t) - R_2(t))^{-1} \frac{\partial P_3}{\partial s_3} \right)_{s_3=2}, \quad 0 \leq t \leq T; \quad (23)$$

$$\frac{dR_i(t)}{dt} = a_{ki} \left((R_i(t) - R_{i-1}(t))^{-1} \frac{\partial P_{3-i}}{\partial s_i} \right)_{s_i=i}, \quad i=1, 2, \quad 0 \leq t \leq T; \quad (24)$$

$$P_{21}(s_2, t) = P_{22}(s_2, t) + \Delta \gamma z(s_2, t) + H\gamma_2, \quad \{1 \leq s_2 \leq 2, 0 \leq t \leq T\}, \quad (25)$$

где $a_1^2 = \chi_1 T_0 L_0^{-2}$; $a_{2k}^2 = \chi_{2k} T_0 L_0^{-2}$; $a_3^2 = \chi_3 T_0 L_0^{-2}$; $H = h P_0^{-1}$; $\alpha_i = kh \mu_i^{-1}$; $a_{ki} = \beta_{3-i} T_0 P_0 L_0^{-2}$, $i=1,2$; $\mu_0 = \mu_2 \mu_1^{-1}$; $s_i^0 = [r - R_{i-1}(0)][R_i(0) - R_{i-1}(0)]^{-1} + (i-1)$, $i=1,2,3$; $A^* = A P_0 L_0^{-1}$; $B^* = B P_0$; $C^* = C P_0$; $D^* = D P_0 L_0^{-1}$.

Итерационно-разностная схема. Для численного решения составлена неявная двухслойная итерационно-разностная схема. С этой целью введена в рассмотрение неравномерная пространственно-временная сетка узлов [10]:

$$\begin{aligned} \overline{\Omega}_{ij} = \{ (s_i, t_j) : 0 = s_0 < s_1 < \dots < s_{N_1} = 1 < s_{N_1+1} < s_{N_1+2} < \dots < s_{N_1+N_2} = \\ = 2 < s_{N_1+N_2+1} < s_{N_1+N_2+2} < \dots < s_{N_1+N_2+N_3} = 3, s_{i+1} = s_i + \nabla_{i+1}, \\ i = \overline{0, N_1 + N_2 + N_3 - 1}; 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_M = T, t_{j+1} = t_j + \Delta t_j, j = \overline{0, M-1} \}. \end{aligned}$$

Тогда неизвестные величины на $(j+1)$ -м временном слое определяются посредством решения следующей итерационно-разностной задачи:

$$\begin{aligned} & [\alpha_k^{(n)} c_{k,i_k+1} (1 + c_{k,i_k+1})^{-1} + \beta_k^{(n)} + \gamma_k^{(n)}] P_{k,i_k+1,j+1}^{(n)} - \\ & - [\alpha_k^{(n)} c_{k,i_k+1} + (\beta_k^{(n)} + \gamma_k^{(n)}) (1 - c_{k,i_k+1}) + 1] P_{k,i_k,j+1}^{(n)} + \\ & + [\alpha_k^{(n)} c_{k,i_k+1} (1 + c_{k,i_k+1})^{-1} - (\beta_k^{(n)} - \gamma_k^{(n)})] c_{k,i_k+1} P_{k,i_k-1,j+1}^{(n)} = -P_{k,i_k,j}, \\ & k = 1, 3, i_1 = \overline{1, N_1 - 1}, i_3 = \overline{N_1 + N_2 + 1, N_1 + N_2 + N_3 - 1}, \quad (26) \\ & j = \overline{0, M-1}, n = 1, 2, 3, \dots; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [\alpha_k^{(n)} c_{2,i_k+1} (1 + c_{2,i_k+1})^{-1} + \beta_k^{(n)} + \gamma_k^{(n)} + (-1)^{3-l} \delta_k^{(n)}] P_{k,i_k+1,j+1}^{(n)} - \\ & - [\alpha_k^{(n)} c_{2,i_k+1} + (\beta_k^{(n)} + \gamma_k^{(n)} + (-1)^{3-l} \delta_k^{(n)}) (1 - c_{2,i_k+1}) + e_k + \varepsilon_k^{(n-1)}] P_{k,i_k,j+1}^{(n)} + \\ & + [\alpha_k^{(n)} c_{2,i_k+1} (1 + c_{2,i_k+1})^{-1} - \beta_k^{(n)} - \gamma_k^{(n)} - (-1)^{3-l} \delta_k^{(n)}] c_{2,i_k+1} P_{k,i_k-1,j+1}^{(n)} + \\ & + \bar{\gamma}_k^{(n)} P_{3-k,i_k+1,j+1}^{(n)} - [\bar{\gamma}_k^{(n)} (1 - c_{2,i_k+1}) - \varepsilon_k^{(n-1)}] P_{3-k,i_k,j+1}^{(n)} + \bar{\gamma}_k^{(n)} c_{2,i_k+1} P_{3-k,i_k-1,j+1}^{(n)} = \\ & = e_k P_{3-k,i_k,j} - (e_k + \varepsilon_k^{(n-1)}) P_{k,i_k,j}, \quad (27) \end{aligned}$$

$$k = 21, 22, i_k = \overline{N_1 + 1, N_1 + N_2 - 1}, j = \overline{0, M-1}, n = 1, 2, 3, \dots, l = 1, 2;$$

$$R_k(0) = R_{k,0}, k = 21, 22, P_{1,i,0} = \Phi_{1,i}, i = \overline{0, N_1};$$

$$P_{k,i,0} = \Phi_{k,i}, k = 21, 22, i = \overline{N_1, N_1 + N_2};$$

$$P_{3,i,0} = \Phi_{3,i}, i = \overline{N_1 + N_2, N_1 + N_2 + N_3};$$

$$P_{21,i,j+1}^{(n)} = P_{22,i,j+1}^{(n)} + H(\Delta\gamma_{i,j+1}^{(n-1)} + \gamma_2), \quad i = \overline{N_1, N_1 + N_2}, \quad j = \overline{0, M-1}; \quad (28)$$

$$A^* P_{1,1,j+1}^{(n)} - \left[A^* - B^* \nabla_1 (R_{1,j+1}^{(n)} - R_0) \right] P_{1,0,j+1}^{(n)} = f_{j+1} \nabla_1 (R_{1,j+1}^{(n)} - R_0),$$

$$j = \overline{0, M-1}; \quad (29)$$

$$\left[C^* \nabla_{N_1+N_2+N_3} (R_3 - R_{2,j+1}^{(n)}) + D^* \right] P_{3,N_1+N_2+N_3,j+1}^{(n)} - D^* P_{3,N_1+N_2+N_3,j+1}^{(n)} =$$

$$= \varphi_{j+1} \nabla_{N_1+N_2+N_3} (R_3 - R_{2,j+1}^{(n)}), \quad j = \overline{0, M-1}; \quad (30)$$

$$P_{1,N_1,j+1}^{(n)} = P_{22,N_1,j+1}^{(n)} + H \gamma_1, \quad j = \overline{0, M-1}; \quad (31)$$

$$P_{21,N_1+1,j+1}^{(n)} - (1 + c_0^{(n)}) P_{21,N_1,j+1}^{(n)} + c_0^{(n)} P_{1,N_1-1,j+1}^{(n)} = 0, \quad j = \overline{0, M-1}; \quad (32)$$

$$P_{3,N_1+N_2,j+1}^{(n)} = P_{21,N_1+N_2,j+1}^{(n)}, \quad j = \overline{0, M-1}; \quad (33)$$

$$\bar{c}_0^{(n)} P_{3,N_1+N_2+1,j+1}^{(n)} - (1 + \bar{c}_0^{(n)}) P_{21,N_1+N_2,j+1}^{(n)} + P_{21,N_1+N_2-1,j+1}^{(n)} = 0, \quad (34)$$

$$j = \overline{0, M-1};$$

$$R_{1,j+1}^{(n)} = R_{1,j} + \alpha_1^* \nabla_{j+1} [(R_{2,j+1}^{(n-1)} - R_{1,j+1}^{(n-1)}) \nabla_{N_1+1}]^{-1} [P_{22,N_1+1,j+1}^{(n-1)} - P_{22,N_1,j+1}^{(n-1)}]; \quad (35)$$

$$R_{2,j+1}^{(n)} = R_{2,j} + \alpha_2^* \nabla_{j+1} [(R_{2,j+1}^{(n-1)} - R_{1,j+1}^{(n-1)}) \nabla_{N_1+N_2}]^{-1} [P_{21,N_1+N_2,j+1}^{(n-1)} -$$

$$- P_{21,N_1+N_2-1,j+1}^{(n-1)}], \quad j = \overline{0, M-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (36)$$

где введены обозначения:

$$\alpha_k^{(n)} = 2 a_k^2 \nabla_{j+1} [(R_{m_k,j+1}^{(n)} - R_{m_k-1,j+1}^{(n)}) \nabla_{i+1}]^{-2}, \quad k = 1, 21, 22, 3,$$

$$m_1 = 1, \quad m_{21} = m_{22} = 2, \quad m_3 = 3;$$

$$\gamma_k^{(n)} = (t_k - 1 - s_i) (R_{r_k,j+1}^{(n)} - R_{r_k,j}^{(n)}) [2 \nabla_{i+1} (R_{m_k,j+1}^{(n)} - R_{m_k-1,j+1}^{(n)})]^{-1}, \quad k = 1, 3,$$

$$m_1 = r_1 = t_1 = 1, \quad m_3 = 3, \quad r_3 = 2, \quad t_3 = 4;$$

$$\gamma_k^{(n)} = \bar{\gamma}^{(n)} (e_k^{(n-1)} + \varepsilon_k^{(n-1)}), \quad \bar{\gamma}_k^{(n)} = \bar{\gamma}^{(n)} e_k^{(n-1)}, \quad k = 1, 2;$$

$$\bar{\gamma}^{(n)} = [(R_{2,j+1}^{(n)} - R_{2,j}^{(n)}) -$$

$$- (2 - s_i) (R_{2,j+1}^{(n)} - R_{2,j}^{(n)} - R_{1,j+1}^{(n)} + R_{1,j}^{(n)})] [2 \nabla_{i+1} (R_{2,j+1}^{(n)} - R_{1,j+1}^{(n)})]^{-1};$$

$$\delta_k^{(n)} = a_k^2 \nabla_{j+1} [4 \nabla_{i+1} (R_{2,j+1}^{(n)} - R_{1,j+1}^{(n)})]^{-2} [(P_{21,i+1,j+1}^{(n-1)} - P_{22,i+1,j+1}^{(n-1)}) -$$

$$\begin{aligned}
 & -(1-c_{2,i+1})(P_{21,i,j+1}^{(n-1)} - P_{22,i,j+1}^{(n-1)}) - c_{2,i+1}(P_{21,i-1,j+1}^{(n-1)} - P_{22,i-1,j+1}^{(n-1)}), \quad k=1, 2; \\
 e_k^{(n-1)} &= K_k P_0^{-1} + (P_{k,i,j+1}^{(n-1)} - 1), \quad \varepsilon_k^{(n-1)} = (-1)^{k-1} (P_{21,i,j+1}^{(n-1)} - P_{22,i,j+1}^{(n-1)} - H \gamma_{3-k}); \\
 c_0^{(n)} &= (R_{2,j+1}^{(n)} - R_{1,j+1}^{(n)})(R_{1,j+1}^{(n)} - R_{0,j+1}^{(n)})^{-1}; \\
 \bar{c}_0^{(n)} &= (R_{2,j+1}^{(n)} - R_{1,j+1}^{(n)})(R_{3,j+1}^{(n)} - R_{2,j+1}^{(n)})^{-1}; \\
 \beta_k^{(n)} &= a_k^2 \nabla_{j+1} \{2 \nabla_{i_k+1} [(s_{m_k, i_k} - t_k)(R_{m_k, j+1}^{(n)} - R_{m_k-1, j+1}^{(n)}) + \\
 & \quad + R_{m_k-1, j+1}^{(n)}] (R_{m_k, j+1}^{(n)} - R_{m_k-1, j+1}^{(n)})\}^{-1}, \\
 k &= 1, 2, 1, 2, 2, 3, \quad t_1 = 0, \quad m_1 = t_{21} = t_{22} = 1, \quad m_{21} = m_{22} = t_3 = 2, \quad m_3 = 3; \\
 a_k^2 &= T_0 \chi_k R_0^{-2}, \quad k=1, 2, 1, 2, 2, 3, \quad \alpha_\ell^* = -\beta_{3-\ell} T_0 P_0 R_0^{-2}, \quad \ell=1, 2.
 \end{aligned}$$

Из (29), (26) при $k=1$, (31), (32), (27) при $k=21$ и 22 с учетом (28), (33), (34), (26) при $k=3$ и (30) получаем систему линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{aligned}
 & a_{1,0,j+1}^{(n)} P_{1,1,j+1}^{(n)} - b_{1,0,j+1}^{(n)} P_{1,0,j+1}^{(n)} = D_{1,0}; \\
 & a_{1,i,j+1}^{(n)} P_{1,i+1,j+1}^{(n)} - b_{1,i,j+1}^{(n)} P_{1,i,j+1}^{(n)} + c_{1,i,j+1}^{(n)} P_{1,i-1,j+1}^{(n)} = D_{1,i}, \quad i = \overline{1, N_1-1}; \\
 & a_{21,i,j+1}^{(n)} P_{1,i+1,j+1}^{(n)} - b_{21,i,j+1}^{(n)} P_{1,i,j+1}^{(n)} + c_{21,i,j+1}^{(n)} P_{1,i-1,j+1}^{(n)} + d_{21,i,j+1}^{(n)} P_{2,i+1,j+1}^{(n)} - \\
 & \quad - e_{21,i,j+1}^{(n)} P_{2,i,j+1}^{(n)} + f_{21,i,j+1}^{(n)} P_{2,i-1,j+1}^{(n)} = D_{21,i}; \quad (37) \\
 & a_{22,i,j+1}^{(n)} P_{1,i+1,j+1}^{(n)} - b_{22,i,j+1}^{(n)} P_{1,i,j+1}^{(n)} + c_{22,i,j+1}^{(n)} P_{1,i-1,j+1}^{(n)} + d_{22,i,j+1}^{(n)} P_{2,i+1,j+1}^{(n)} - \\
 & \quad - e_{22,i,j+1}^{(n)} P_{2,i,j+1}^{(n)} + f_{22,i,j+1}^{(n)} P_{2,i-1,j+1}^{(n)} = D_{22,i}, \quad i = \overline{N_1, N_1 + N_2}; \\
 & a_{3,i,j+1}^{(n)} P_{3,i+1,j+1}^{(n)} - b_{3,i,j+1}^{(n)} P_{3,i,j+1}^{(n)} + c_{3,i,j+1}^{(n)} P_{3,i-1,j+1}^{(n)} = D_{3,i}, \\
 & \quad i = \overline{N_1 + N_2 + 1, N_1 + N_2 + N_3 - 1}; \\
 & \quad - b_{3, N_1 + N_2 + N_3, j+1}^{(n)} P_{3, N_1 + N_2 + N_3, j+1}^{(n)} + \\
 & \quad + c_{3, N_1 + N_2 + N_3, j+1}^{(n)} P_{3, N_1 + N_2 + N_3 - 1, j+1}^{(n)} = D_{3, N_1 + N_2 + N_3}.
 \end{aligned}$$

Поскольку задача (26)—(36) нелинейна, для ее решения применен метод итераций. Применяемый итерационный процесс заключается в следующем: принимая за нулевые приближения $R_{1,j+1}^{(0)}$, $R_{2,j+1}^{(0)}$ и $P_{i,j+1}^{(0)}$, значения, полученные экстраполяцией из двух предыдущих временных слоев, с

помощью (35) и (36) находим $R_{1,j+1}^{(1)}$ и $R_{2,j+1}^{(1)}$. Затем, решая систему (37), определяем все значения $P_{i,j+1}^{(1)}$. Аналогично определяются все последующие приближения.

На каждой итерации для решения системы линейных алгебраических уравнений (37) применялось следующее видоизменение метода прогонки, представляющее собой сочетание метода обычной и матричной прогонки. Записываем решение в следующем виде (для простоты записи приведены только индексы положения):

$$P_{k,i_k} = \alpha_{k,i_k} P_{k,i_k+1} + \beta_{k,i_k}, \quad k = 1 \text{ в } D_1, k = 3 \text{ в } D_3$$

при $i_1 = \overline{0, N_1 - 1}$, $i_3 = \overline{N_1 + N_2 + 1, N_1 + N_2 + N_3}$,

(38)

$$P_{1,i} = \alpha_{1,i} P_{1,i+1} + \gamma_{1,i} P_{2,i+1} + \beta_{1,i}, \quad P_{2,i} = \alpha_{2,i} P_{1,i+1} + \gamma_{2,i} P_{2,i+1} + \beta_{2,i},$$

$i = \overline{N_1, N_1 + N_2}$.

(39)

Осуществляем прямую прогонку для вычисления прогоночных коэффициентов $\alpha_{k,i_k}, \beta_{k,i_k}$ ($k = 1, 3$), $\alpha_{k,i}, \gamma_{k,i}, \beta_{k,i}$ ($k = 21, 22$) по формулам

$$\alpha_{k,i_k} = \frac{a_{k,i_k}}{b_{k,i_k} - \alpha_{k,i_k-1} c_{k,i_k}}, \quad \beta_{k,i_k} = \frac{\beta_{k,i_k-1} c_{k,i_k-1} - D_{k,i_k}}{b_{k,i_k} - \alpha_{k,i_k-1} c_{k,i_k}}, \quad k = 1, 3, i_1 = \overline{0, N_1 - 1},$$

$$i_3 = \overline{N_1 + N_2 + 1, N_1 + N_2 + N_3};$$

$$\alpha_{1,i} = \frac{a_{2,i} y_{1,i} - a_{1,i} y_{2,i}}{x_{1,i} y_{2,i} - x_{2,i} y_{1,i}}, \quad \alpha_{2,i} = \frac{a_{1,i} x_{2,i} - a_{2,i} x_{1,i}}{x_{1,i} y_{2,i} - x_{2,i} y_{1,i}},$$

$$\gamma_{1,i} = \frac{d_{2,i} y_{1,i} - d_{1,i} y_{2,i}}{x_{1,i} y_{2,i} - x_{2,i} y_{1,i}}, \quad \gamma_{2,i} = \frac{d_{1,i} x_{2,i} - d_{2,i} x_{1,i}}{x_{1,i} y_{2,i} - x_{2,i} y_{1,i}},$$

$$\beta_{1,i} = \frac{D_{2,i}^0 y_{1,i} - D_{1,i}^0 y_{2,i}}{x_{1,i} y_{2,i} - x_{2,i} y_{1,i}}, \quad \beta_{2,i} = \frac{D_{1,i}^0 x_{2,i} - D_{2,i}^0 x_{1,i}}{x_{1,i} y_{2,i} - x_{2,i} y_{1,i}}, \quad i = \overline{N_1, N_1 + N_2},$$

где $x_{k,i} = c_{k,i} \alpha_{1,i-1} + f_{k,i} \alpha_{2,i-1} - b_{k,i}$, $y_{k,i} = c_{k,i} \gamma_{1,i-1} + f_{k,i} \gamma_{2,i-1} - e_{k,i}$; $D_{k,i}^0 = c_{k,i} \beta_{1,i-1} + f_{k,i} \beta_{2,i-1} - D_{k,i}$, $k = 21, 22$. Обратная прогонка выполняется по формуле (38) при $i_3 = \overline{N_1 + N_2 + N_3, N_1 + N_2 + N_3 - 1, \dots, N_1 + N_2 + 1}$, затем по формулам (39) при $i = \overline{N_1 + N_2, N_1 + N_2 - 1, \dots, N_1}$ и, наконец, по формуле (38) при $i_1 = \overline{N_1 - 1, N_1 - 2, \dots, 1, 0}$. Итерационный процесс завершается при некотором значении $n = K + 1$, для которого выполняются условия $\max_{i,j+1} |P_{k,j+1}^{(K+1)} - P_{k,j+1}^{(K)}| \leq \varepsilon_1$, $\max_{j+1} |R_{i,j+1}^{(K+1)} - R_{i,j+1}^{(K)}| \leq \varepsilon_2$, $\varepsilon_m = \text{const} > 0$, $m = 1, 2$, $k = 1, 2$ где ε_m — заданная точность вычислений.

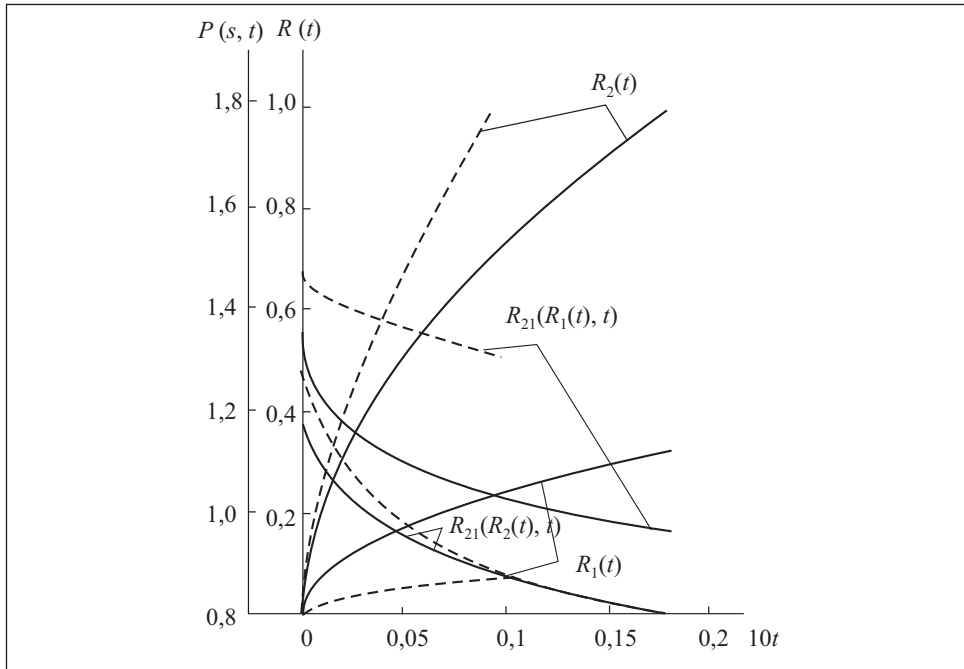


Рис. 2. Графики зависимости значений подвижных границ R_1 , R_2 и соответствующих давлений от значения t : --- $\mu_0 = 12$; — $\mu_0 = 3$

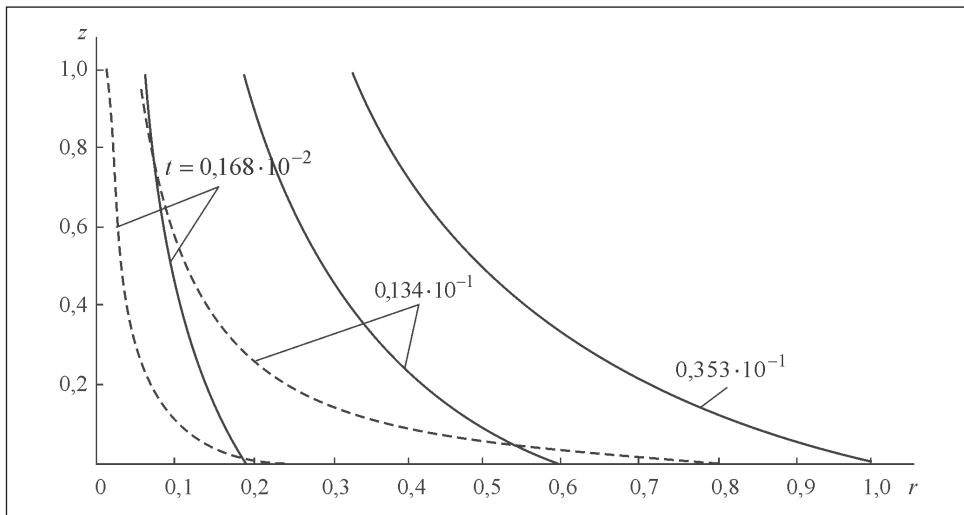


Рис. 3. Графики зависимости положения ВНК от значения t : --- $\mu_0 = 12$; — $\mu_0 = 3$ (для наглядности приведены в координатах (r, z))

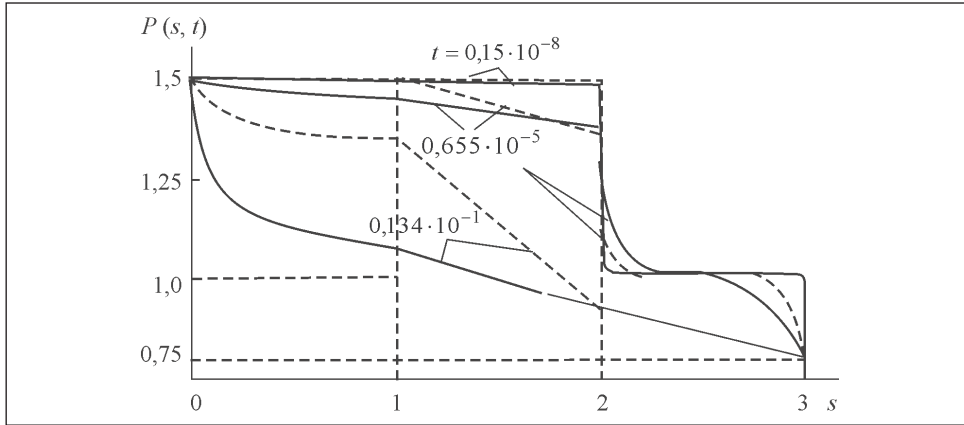


Рис. 4. Графики распределения давления на подошве пласта в различные моменты времени t : --- $\mu_0 = 12$; — $\mu_0 = 3$

Таблица 1

$t \cdot 10^5$	$R_1(t) \cdot 10^2$	$R_2(t) \cdot 10^2$	$z(s_2, t) \cdot 10$	$P_{21}(R_1(t), t)$	$P_{21}(R_2(t), t)$	$P_{22}(R_1(t), t)$	$P_{22}(R_2(t), t)$
$0,1 \cdot 10^{-4}$	<u>0,1100</u>	<u>0,1203</u>	<u>4,895</u>	<u>1,492</u>	<u>1,475</u>	<u>1,472</u>	<u>1,457</u>
	0,1100	0,1200	4,989	1,085	1,092	1,077	1,000
$0,3 \cdot 10^{-4}$	<u>0,1100</u>	<u>0,1208</u>	<u>4,681</u>	<u>1,493</u>	<u>1,477</u>	<u>1,473</u>	<u>1,459</u>
	0,1100	0,1202	4,950	1,126	1,122	1,117	1,000
$0,15 \cdot 10^{-3}$	<u>0,1102</u>	<u>0,1230</u>	<u>3,842</u>	<u>1,495</u>	<u>1,480</u>	<u>1,475</u>	<u>1,462</u>
	0,1100	0,1209	4,717	1,197	1,194	1,188	1,000
$0,63 \cdot 10^{-3}$	<u>0,1104</u>	<u>0,1289</u>	<u>2,459</u>	<u>1,496</u>	<u>1,479</u>	<u>1,476</u>	<u>1,461</u>
	0,1102	0,1239	4,065	1,278	1,275	1,267	0,999
$2,55 \cdot 10^{-3}$	<u>0,1112</u>	<u>0,1455</u>	<u>1,481</u>	<u>1,497</u>	<u>1,470</u>	<u>1,477</u>	<u>1,452</u>
	0,1108	0,1346	3,130	1,357	1,353	1,339	0,999
$1,023 \cdot 10^{-2}$	<u>0,1150</u>	<u>0,1912</u>	<u>1,212</u>	<u>1,497</u>	<u>1,450</u>	<u>1,477</u>	<u>1,432</u>
	0,1143	0,1701	2,588	1,411	1,406	1,377	0,998
$4,095 \cdot 10^{-2}$	<u>0,1322</u>	<u>0,3069</u>	<u>1,249</u>	<u>1,496</u>	<u>1,419</u>	<u>1,476</u>	<u>1,401</u>
	0,1300	0,2679	2,498	1,429	1,419	1,368	0,996
$1,64 \cdot 10^{-1}$	<u>0,1904</u>	<u>0,5666</u>	<u>1,357</u>	<u>1,493</u>	<u>1,389</u>	<u>1,473</u>	<u>1,371</u>
	0,1838	0,4926	2,544	1,434	1,411	1,344	0,991
$6,55 \cdot 10^{-1}$	<u>0,3351</u>	<u>1,1053</u>	<u>1,423</u>	<u>1,484</u>	<u>1,366</u>	<u>1,464</u>	<u>1,348</u>
	0,3207	0,9619	2,567	1,442	1,399	1,326	0,982
$26,2 \cdot 10^{-1}$	<u>0,6382</u>	<u>2,1803</u>	<u>1,444</u>	<u>1,470</u>	<u>1,352</u>	<u>1,450</u>	<u>1,334</u>
	0,6158	1,9079	2,571	1,458	1,392	1,317	0,962
10,49	<u>0,3275</u>	<u>4,4102</u>	<u>1,447</u>	<u>1,449</u>	<u>1,314</u>	<u>1,429</u>	<u>1,296</u>
	1,2115	3,7869	2,571	1,442	1,353	1,279	0,941
41,94	<u>1,8548</u>	<u>9,5954</u>	<u>1,445</u>	<u>1,411</u>	<u>1,245</u>	<u>1,391</u>	<u>1,227</u>
	2,3872	7,4866	2,571	1,373	1,262	1,190	0,923

Результаты численного эксперимента для задачи (1)—(13) получены при следующих условиях: $a_1^2 = a_{21}^2 = 92,06784$; $a_{22}^2 = a_3^2 = 29,44512$; $k_1 = k_{21} = k_{22} = k_3 = 1$ д; $\mu_0 = 3, 6, 9, 12$; $\Delta\gamma = 100$ кг/м³; 200 кг/м³; $P_0 = 50$ атм; $L_0 = 100$ м; $h = 10; 20; 100$ м; $f(t) = 75; 150$ атм; $\varphi(t) = 40$ атм; $T_0 = 1$ год.

На рис. 2—4 представлены результаты, соответствующие случаю $f(t) = 75$ атм; $h = 10$ м; $\Delta\gamma = 100$ кг/м³; $A = D = 0, B = C = 1$.

В табл. 1, 2 приведены значения подвижных границ $R_1(t)$ и $R_2(t)$, давлений на этих границах и ВНК $z(s_2, t)$ в точке $s_2 = 1,5$ в различные моменты времени при $h = 10$ м, $\Delta\gamma = 100$ кг/м³ для следующих случаев:

- 1 — $\mu_0 = 6, f(t) = 75$ атм, $A = D = 0, B = C = 1$;
- 2 — $\mu_0 = 3, f(t) = \varphi(t) = 10^3$ м³/сут, $A \neq 0, B = C = 0, D \neq 0$;
- 3 — $\mu_0 = 3, f(t) = 75$ атм, $\Delta\gamma = 200$ кг/м³, $A = D = 0, B = C = 1$;
- 4 — $\mu_0 = 3, f(t) = 75$ атм, $h = 100$ м, $A = D = 0, B = C = 1$.

Таблица 2

$t \cdot 10^5$	$R_1(t) \cdot 10^2$	$R_2(t) \cdot 10^2$	$z(s_2, t) \cdot 10$	$P_{21}(R_1(t), t)$	$P_{21}(R_2(t), t)$	$P_{22}(R_1(t), t)$	$P_{22}(R_2(t), t)$
0,1·10 ⁻⁴	0,1100	0,1203	4,930	1,485	1,461	1,465	1,445
	0,1100	0,1204	4,889	1,485	1,456	1,285	1,276
0,3·10 ⁻⁴	0,1101	0,1207	4,792	1,488	1,468	1,468	1,452
	0,1100	0,1210	4,696	1,488	1,462	1,288	1,282
0,15·10 ⁻³	0,1102	0,1227	4,307	1,492	1,475	1,472	1,459
	0,1097	0,1235	4,141	1,492	1,469	1,292	1,289
0,63·10 ⁻³	0,1104	0,1280	3,562	1,494	1,476	1,474	1,460
	0,1087	0,1302	3,634	1,495	1,469	1,295	1,289
2,55·10 ⁻³	0,1112	0,1430	2,928	1,495	1,470	1,475	1,454
	0,1064	0,1476	3,348	1,497	1,461	1,297	1,281
1,023·10 ⁻²	0,1150	0,1850	2,633	1,494	1,452	1,474	1,436
	0,1044	0,1933	3,164	1,498	1,442	1,298	1,262
4,095·10 ⁻²	0,1322	0,2932	2,592	1,488	1,422	1,468	1,406
	0,1124	0,3056	3,047	1,495	1,412	1,295	1,232
1,64·10 ⁻¹	0,1904	0,5368	2,617	1,472	1,390	1,452	1,374
	0,1971	0,5552	2,957	1,481	1,381	1,281	1,201
6,55·10 ⁻¹	0,3351	1,0402	2,623	1,449	1,363	1,429	1,347
	0,2763	0,0703	2,902	1,458	1,355	1,258	1,175
26,2·10 ⁻¹	0,6382	2,0378	2,622	1,423	1,336	1,403	1,320
	0,5256	2,0933	2,885	1,432	1,329	1,232	1,149
10,49	1,3275	4,2447	2,609	1,370	1,264	1,350	1,249
	1,1147	4,3482	2,850	1,380	1,257	1,180	1,077
41,94	2,8548	9,0735	2,596	1,309	1,192	1,289	1,176
	2,4454	9,2670	2,823	1,320	1,185	1,120	1,005

В табл. 1 над чертой указаны значения для случая 1, а под чертой — для случая 2. В табл. 2 над чертой указаны значения для случая 3, а под чертой — для случая 4.

Таким образом, результаты численного эксперимента позволяют сделать следующие выводы:

1. Давление на границах $R_1(t)$ и $R_2(t)$ в течение небольшого начального промежутка времени возрастает, достигает некоторого максимума, а затем начинает снижаться. При этом с увеличением значения μ_0 наблюдается увеличение промежутка времени между моментами достижения максимальных значений на этих границах.

2. Граница ВНК $z(s_2, t)$ с увеличением времени процесса вытеснения, сохраняя форму параболы, стремится к прямой линии. При этом, начиная с некоторого момента времени форма ВНК практически не изменяется.

3. Увеличение мощности продуктивного пласта приводит к увеличению протяженности области границы раздела.

4. Разность плотностей не оказывает существенного влияния на характер процесса.

5. С увеличением значения μ_0 протяженность границы раздела возрастает, несколько ускоряется достижение максимального значения давления на границах $R_1(t)$ и $R_2(t)$, и удлиняется продолжительность его сохранения. Стремление границы ВНК к прямой линии значительно замедляется. Следует заметить, что величина μ_0 оказывает основное влияние на характер процесса.

6. Учет силы тяжести качественно изменяет картину физического процесса вытеснения и оказывает влияние на характер вычислительного процесса.

Выводы

Математическое моделирование процесса движения двух несмешивающихся жидкостей позволило на основе численного исследования нестационарной задачи с подвижными границами и применения гидродинамической модели предельно-анизотропного пласта (случай $k_z = \infty$) исследовать влияние на процесс ряда гидродинамических параметров: отношения вязкостей, разности плотностей, мощности пласта. В результате установлено, что отношение вязкостей флюидов оказывает основное влияние на характер процесса. Разность плотностей и мощность пласта существенного влияния на процесс не оказывают.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Михайлов Г.К. Применение модели предельно-анизотропных грунтов для оценки решений некоторых краевых задач о движении потока грунтовых вод по водоупору // Инж. сб. АН СССР. — 1953. — XV. — С. 159—168.
2. Чарный И.А. Методы расчета перемещения границы раздела нефти и воды в пластах // Изв. АН СССР. ОТН. — 1954. — № 4. — С. 107—120.
3. Чарный И.А. Подземная гидрогазодинамика. — М. : Гостоптехиздат, 1963. — 396 с.
4. Зигангареев М.А., Теплов Ю.А. Расчеты перемещения водо-нефтяного контакта в наклонном пласте и сравнение их с данными моделирования // Тр. ВНИИ нефтегаз. — 1966. — Вып. 47. — С.142—150.
5. Алихашкин Я.И. Численное интегрирование уравнения автомодельного движения границы раздела двух жидкостей в пористой среде // Изв. АН СССР. ОТН. Мех. и машиностр. — 1961. — № 5. — С. 159—162.
6. Веригин Н.Н., Саркисян В.С., Шибанов А.В. Об определении границы раздела двух несмешивающихся жидкостей в пористой среде // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1973. — № 6. — С. 155—163.
7. Веригин Н.Н., Саркисян В.С. О фильтрации двух жидкостей с разной плотностью и вязкостью при закачке в галерею с постоянным расходом // ДАН СССР. — 1974. — 218, № 3. — С. 536—539.
8. Саркисян В.С. О закачке в скважину с учетом различия плотностей нагнетаемой и вытесняемой жидкостей // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1975. — № 6. — С. 67—73.
9. Будак Б.М., Гольдман Н.Л., Успенский А.Б. Разностные схемы с выпрямлением фронтов для решения многофронтовых задач типа Стефана // Вычислит. методы и прогр. Сб. работ ВЦ МГУ. — 1967. — Вып. VI. — С. 206—216.
10. Мустафаев Р.А. Численное решение некоторых двухфазных задач типа Веригина // Изв. АН Азерб. ССР. Сер. физ.-техн. и мат. наук. — 1972. — № 1. — С. 69—75.

R.A. Mustafaev

MATHEMATICAL MODELING AN UNSTEADY PROCESS
OF MOTION TWO NON-MIXING LIQUIDS IN POROUS MEDIUM
WITH ALLOWANCE FOR ANISOTROPY OF STRATUM PERMEABILITY

The process of forcing oil out with immiscible water in the round stratum of final radius at various viscosities and densities of liquids in case of plane radial flow is considered. Iterative difference scheme with combination of straightening of fronts with the method of finite differences is composed for the numerical solution. Alteration methods passage, consisting of the combination of methods of ordinary and matrix passage, is proposed. Results of numerical experiment evidence that the relation of liquids viscosity renders the main influence on the character of force-out process, and allowance for gravity qualitatively changes the picture of the physical process.

Key words: unsteady moving-boundaries problem, mathematical modeling, limited-anisotropic stratum model, method of straightening of fronts, iterative difference scheme.

REFERENCES

1. Mikhailov G.K. Application of limited-anisotropic soils model for evaluation of solutions of some boundary value problems about movement of flow of soil waters by water confining stratum // Engin. Collection Acad. Sc. USSR. — 1953. — Vol. XV. — P. 159—168 (in Russian).

2. *Charnyi I.A.* Methods of calculating the travel of oil and water interface in stratum // Proc. Acad. Sc. USSR. — 1954. — No 4. — P. 107—120 (in Russian).
3. *Charnyi I.A.* Underground Gas Dynamics. — Moscow: Gostoptekhizdat (State Chief Techn. Publ.), 1963. — 396 p. (in Russian).
4. *Zigangareev M.A., Teplov Yu.A.* Calculations of change of water-oil interface in sloping stratum and their comparison with modeling data // Proc. VNII (All-Union Res. Inst) «Neftegaz». — Issue 47. — P. 142—150 (in Russian).
5. *Alikhashkin Ya.I.* Numerical integration of equation of automodel movement of two immiscible liquids interface in the porous medium // Proc. Acad. Sc. USSR. DTS. Mechan. and Machine Build. — 1961. — No 5. — C. 159—162 (in Russian).
6. *Verigin N.N., Sarkisyan V.S., Shibanov A.B.* On determining interface of two immiscible liquids in the porous medium // Proc. Acad. Sc. USSR, Int. J. Geol. — 1973. — No 6. — P. 155—163 (in Russian).
7. *Verigin N.N., Sarkisyan V.S.* On filtration of two liquids with different densities and viscosities under pumping into gallery with constant discharge // Trans. Acad. Sc. USSR. — 1974. — Vol. 218. — No 3. — P. 536—539 (in Russian).
8. *Sarkisyan V.S.* On pumping into hole with allowance for different densities of infused and displaced liquids // Proc. Acad. Sc. USSR. Int. J. Geol. — 1975. — No 6. — P. 67—73 (in Russian).
9. *Budak B.M., Goldman N.L., Uspenskii A.B.* Difference schemes with straightening of fronts for solution of multifront Stefan type problems // Comput. Meth. and Program., Coll. Works. — CC Moscow. State. Univ. — 1967. — Issue VI. — P. 206—216 (in Russian).
10. *Mustafaev R.A.* Numerical solution of certain two-phase problems of the Verigin type // Proc. Acad. Sc. Azerb.SSR, Ser. Phys.-Tech. and. Math. Sc. — 1972. — No 1. — P. 69—75 (in Russian).

Поступила 24.01.14;
после доработки 23.07.14

МУСТАФАЕВ Рамиз Ага Джафар оглы, канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр. Ин-та кибернетики Национальной академии наук Азербайджана. В 1962 г. окончил Азербайджанский госуниверситет им. С.М. Кирова (г. Баку). Область научных исследований — разработка численных схем и численных алгоритмов для математического и компьютерного моделирования процессов, описываемых нестационарными задачами с подвижными границами.