
УДК 519.25

В.П. Долгин, канд. техн. наук, **И.В. Долгин**
Севастопольский национальный технический университет,
(Украина, 99053, Севастополь, ул. Университетская, 33,
e-mail: autosev@ukr.net)

Квадрант-критерий устойчивости динамических систем

Изложен метод критериальной оценки устойчивости динамических систем по результатам анализа трассы годографа характеристического уравнения операторной передаточной функции. Рассмотрен пример оценки устойчивости линейной замкнутой системы, содержащей иррациональные звенья и звено задержки. Представлены результаты численного моделирования системы в устойчивом и неустойчивом состояниях и на грани устойчивости.

Викладено метод критеріальної оцінки стійкості динамічних систем за наслідками аналізу траси годографа характеристичного рівняння операторної передавальної функції. Розглянуто приклад оцінки стійкості лінійної замкнутої системи, що містить ірраціональні ланки і ланку затримки. Представлено результати чисельного моделювання системи в стійкому, нестійкому станах і на межі стійкості.

Ключевые слова: передаточная функция, характеристическое уравнение, критерий устойчивости, динамическая система, комплексная плоскость.

Моделирование динамической системы включает исследование ее устойчивости. Оценка устойчивости может быть получена на основе переходной характеристики системы либо с помощью критериев [1—5]. Различают критерии алгебраические и частотные. Алгебраические критерии позволяют определять устойчивость линейных систем ограниченного порядка и неприменимы для других классов систем.

Частотные критерии более универсальны и удобны. Из частотных критериев наиболее широко применяются критерии Михайлова, Найквиста и их производные. Наиболее простую структуру имеет критерий устойчивости Михайлова, основанный на анализе характеристического полинома исследуемой динамической системы и позволяющий определять устойчивость системы по годографу характеристического полинома. Система считается устойчивой, если годограф проходит последовательно в положительном

© В.П. Долгин, И.В. Долгин, 2014

направлении (против часовой стрелки) число квадрантов, равное порядку характеристического полинома. Нарушение порядка прохождения квадрантов либо изменение их числа свидетельствует о неустойчивом режиме работы системы. Недостатком критерия является ограничение порядка характеристического полинома. Если полином более четвертого порядка, то снижается разрешающая способность метода, что затрудняет анализ поведения годографа характеристического полинома.

Постановка задачи. Задачу анализа поведения годографа можно модифицировать, заменив процедуру анализа годографа Михайлова процедурой анализа трассы прохождения годографом квадрантов. Для системы со стандартной операторной формой представления передаточной функции

$$W(p) = k \frac{F(p)}{Q(p)}, \quad (1)$$

где $F(p)$ — операторная форма числителя, k — коэффициент передачи, $Q(p)$ — операторная форма знаменателя, характеристическим полиномом является знаменатель операторной передаточной функции. Представим характеристический полином передаточной функции (1) в частотной форме:

$$Q(j\omega) = \prod_{i=1}^m Q_i(j\omega),$$

где $Q_i(j\omega) = (1 + j\omega T_i)^{v_i}$. Годограф характеристического полинома (годограф Михайлова), построенный в координатах $R(\omega) = \operatorname{Re}(Q(j\omega))$, $J(\omega) = \operatorname{Im}(Q(j\omega))$, где $R(\omega)$ и $J(\omega)$ — вещественная и мнимая составляющие алгебраической формы характеристического полинома $Q(j\omega) = R(\omega) + jJ(\omega)$, позволяет оценить устойчивость системы.

В случае изменения частоты ω в рабочем диапазоне $\omega = [0 \dots \omega_g]$, где ω_g — верхняя граничная частота (рад/с), частотные составляющие годографа $R(\omega)$ и $J(\omega)$ изменяются по степенной зависимости, поэтому начальный участок годографа неразличим при порядке характеристического полинома $q \geq 5$. Для преодоления указанного недостатка необходимо сформулировать задачу как оценку числа квадрантов, пересекаемых годографом Михайлова в диапазоне рабочих частот, что требует определения порядка характеристического полинома q и верхней граничной частоты ω_g .

Порядок характеристического полинома можно определить по наклону $S_q(\omega)$ логарифмической амплитудно-частотной характеристики $A_q(\omega) = \sqrt{R^2(\omega) + J^2(\omega)}$. По определению [1] для произвольной частоты ω_i наклон логарифмической амплитудно-частотной характеристики может

быть выражен отношением логарифмов ее приращения к приращению частоты:

$$S_q(\omega_i) = \frac{\lg(A_q(\omega_i)) - \lg(A_q(\omega_{i-1}))}{\lg(\omega_i) - \lg(\omega_{i-1})},$$

где ω_i и ω_{i-1} — текущее и предыдущее значения частоты. Приняв $\omega_i / \omega_{i-1} = 10$, после упрощений получим

$$S_q(\omega_i) = \lg\left(\frac{A_q(\omega_i)}{A_q(\omega_i/10)}\right). \quad (2)$$

При бесконечном увеличении частоты предельное значение (2) наклона амплитудно-частотной характеристики $S_q(\omega)$ характеристического полинома можно записать в виде

$$S_q(\omega)|_{\omega \rightarrow \infty} \rightarrow q, \quad (3)$$

где q — порядок характеристического полинома.

Граничная частота может быть оценена в результате решения относительно частоты ω нелинейного уравнения

$$\left|1 - \frac{q}{S_q(\omega)}\right| = \varepsilon, \quad (4)$$

где ε — допустимая погрешность.

Определив рабочий частотный диапазон (4) и порядок характеристического полинома (3), можно сформулировать условия построения трассы прохождения квадрантов годографом Михайлова. Для этого годограф Михайлова необходимо представить совокупностью точек на мнимой плоскости с учетом знака вещественной и мнимой составляющих характеристического полинома при изменении частоты ω . При этом координаты точек — единичные функции с меняющимся знаком:

$$\begin{aligned} R(\omega) &= \text{sing} [\text{Re}(Q(j\omega))], \\ J(\omega) &= \text{sing} [\text{Im}(Q(j\omega))], \\ \omega &= [0 \dots \omega_g], \end{aligned} \quad (5)$$

где $R(\omega)$ и $J(\omega)$ — вещественная и мнимая составляющие годографа, принимающие значения ± 1 в зависимости от знака вещественной $\text{Re}(Q(j\omega))$ и мнимой $\text{Im}(Q(j\omega))$ функций.

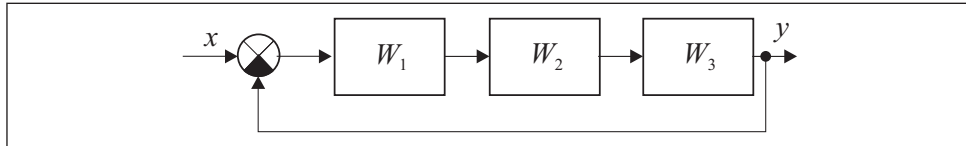


Рис. 1. Блок-схема системы

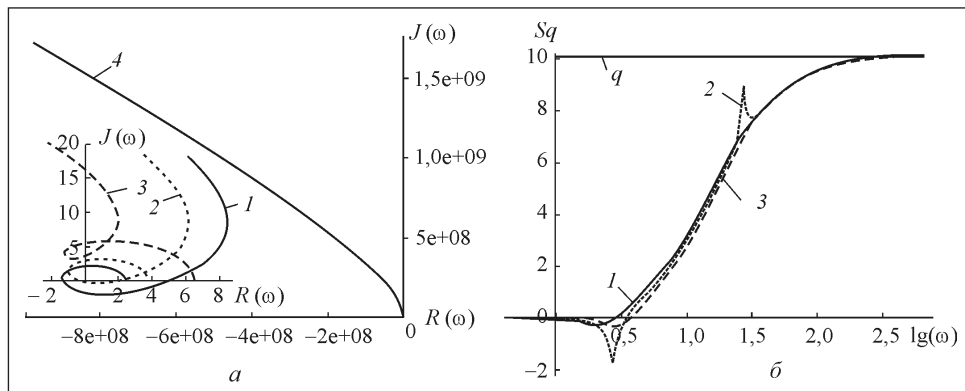


Рис. 2. Характеристики системы: *a* — начальные участки годографов в устойчивом (1) на грани устойчивости (2) и неустойчивом (3) состояниях, 4 — семейство годографов в тех же состояниях в рабочем частотном диапазоне; *б* — графики функций наклона амплитудно-частотной характеристики $S_q(\omega)$, рассчитанной по формуле (2), характеристического полинома $Q(j\omega)$ в устойчивом (1), на грани устойчивости (2) и неустойчивом (3) режимах; q — порядок характеристического полинома

Пример. На рис. 1 изображена блок-схема линейной динамической системы, состоящая из трех последовательно включенных блоков, охваченных отрицательной единичной обратной связью, с операторными передаточными функциями

$$W_1(p) = k \exp(-T_1 p), W_2(p) = (1 + T_2 p)^m, W_3(p) = (1 + T_3 p)^{-n},$$

где m и n могут быть дробными.

На рис. 2, *a* представлен построенный с помощью Maple-процедуры Quadrant Criterion годограф Михайлова $Q(j\omega)$ и его начальный участок для замкнутой системы с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{W_r(p)}{1 + W_r(p)},$$

где

$$W_r(p) = W_1(p)W_2(p)W_3(p) = k \frac{\exp(-T_1 p)(1 + T_2 p)^m}{(1 + T_3 p)^n},$$

и характеристическим полиномом

$$Q(p) = (1 + T_3 p)^n + k \exp(-T_1 p) (1 + T_2 p)^m,$$

где $T_1 = T_2 / 1,5$ с; $T_2 = 0,1$ с; $T_3 = 2T_2$ с; $m = 7,7$; $n = 10,1$. Из-за низкой разрешающей способности метода Михайлова семейство годографов 4 неразлично, годографы сливаются в один для указанных состояний работы системы. Характеристический полином является асимптотой семейства представленных функций наклона.

Предельный коэффициент передачи. Для построения годографов характеристического полинома в рассматриваемых режимах необходимо найти предельный коэффициент передачи, при котором система находится на грани устойчивости. Определим его по критерию Найквиста [1 — 5], решив систему уравнений

$$\operatorname{Re}(W_r(j\omega)) = -1,$$

$$\operatorname{Im}(W_r(j\omega)) = 0$$

относительно параметров ω и k . Предельный коэффициент передачи, при котором система находится на грани устойчивости, составил величину $k = k_1 = 2,76$ (см рис. 2, б, кривая 2). Частота, при которой получено решение для критической точки с координатами $\operatorname{Re}(W_r(j\omega)) = -1$, $\operatorname{Im}(W_r(j\omega)) = 0$, составила $\omega = 2,69$ рад/с. Кривые 1 и 3 построены для начальных участков годографов Михайлова при $k = k_1 / 2$ для устойчивой системы и $k = 2k_1$ для неустойчивой системы в интервале $R(\omega) = [-2, \dots, 8]$ и диапазоне частоты $\omega = [0, \dots, 5]$ рад/с. При тех же значениях k построено семейство 4 годографов Михайлова в диапазоне частоты $\omega = [0, \dots, 41]$ рад/с.

Графики характеристик наклона логарифмической амплитудно-частотной характеристики (2) построены в интервале частот $\omega = [0 \dots \omega_g]$, где верхняя граничная частота $\omega_g = 662$ рад/с определена по формуле (4) при найденном в результате решения (3) значении порядка характеристического полинома $q = 10,1$ и заданной погрешности $\varepsilon = 10^{-5}$.

Предлагаемые рекомендации позволяют построить непрерывную трассу годографа в рабочем диапазоне частот $\omega = [0 \dots \omega_g]$ с приемлемой разрешающей способностью

$$\begin{aligned} R_g(\omega) &= \operatorname{sing}(R(\omega)) B(\omega), \\ J_g(\omega) &= \operatorname{sing}(J(\omega)) B(\omega), \end{aligned} \quad (6)$$

где $B(\omega)$ — функция $B(\omega) = (\omega + 1)^\alpha$; $\alpha < 1$ — параметр формы. Для этого в выражение (5) введем параметр формы, позволяющий посредством выбора значения исключить наложение ветвей трассы годографа при порядке характеристического полинома $q > 4$. На рис. 3, а, в, д, изображены

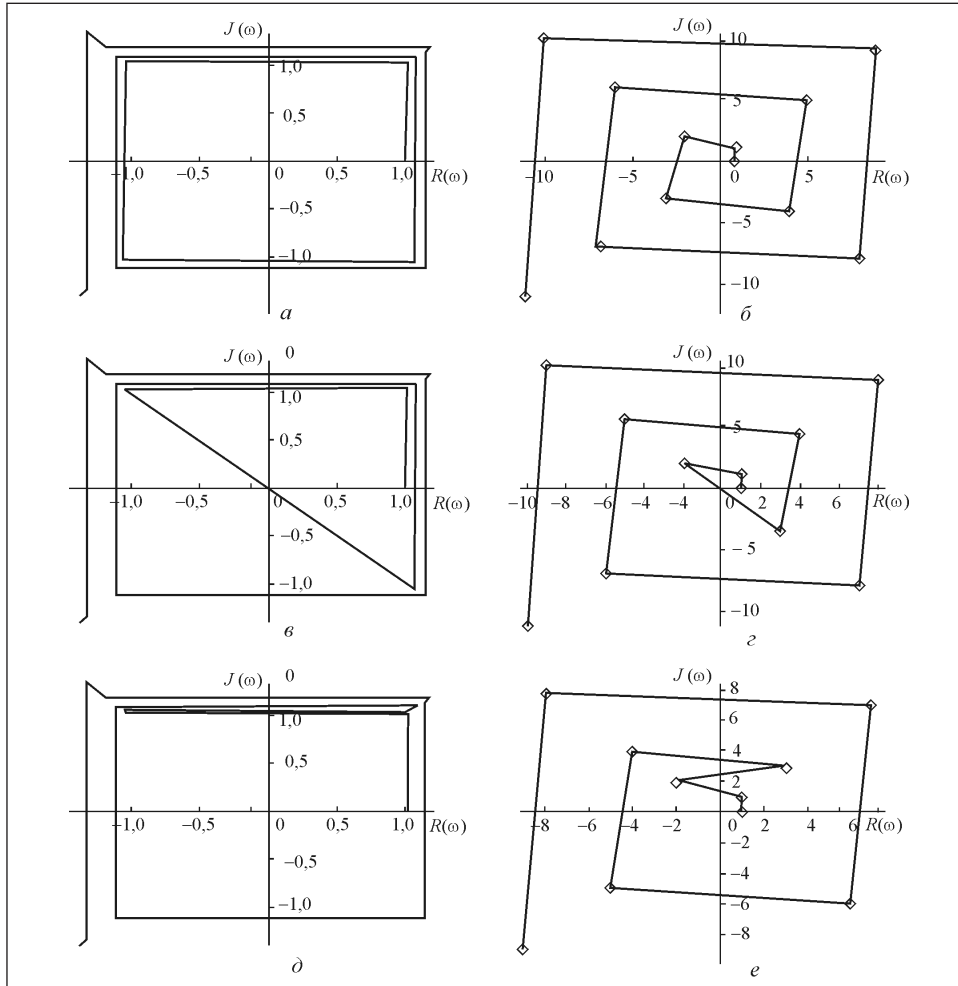


Рис. 3. Трассы годографа устойчивой системы (а, б), системы на грани устойчивости (в, г), неустойчивой системы (д, е)

трассы годографов, полученные в результате преобразования частотных составляющих (5) при $\alpha = 0,05$.

Регуляризация представления трассы годографа. Для систем высокого порядка непрерывная форма (6) представления трассы годографа (см. рис. 3, а, в, д) может оказаться неудобной вследствие неравномерного распределения его ветвей. В этом случае возможен способ представления трассы годографа с регулярным расположением ветвей. Тогда необходимо наносить на мнимую плоскость точки, соответствующие квадранту расположения ветви годографа, в момент пересечения годографом ее осей.

По мере изменения частоты годограф переходит из квадранта в квадрант, пересекая оси координат $R(\omega)$ и $J(\omega)$. Момент пересечения осей определяется по знаку произведения одной из частотных составляющих, $R(\omega_i)R(\omega_{i-1})$ или $J(\omega_i)J(\omega_{i-1})$, что сопровождается переходом годографа в другой квадрант. Фиксируя эти точки, строим трассу годографа, расстояния между точками задаем произвольно по любому закону. При необходимости можно задать равномерный закон распределения точек, выбрав между ними равные расстояния. В этом случае i -я точка годографа может быть нанесена на плоскость с координатами $[\text{sing}(R(\omega_i))i, \text{sing}(J(\omega_i))i]$. На рис. 3, б, г, е, приведены трассы годографов при равномерном распределении ветвей для рассмотренных состояний системы. Как видим, наглядность и удобство анализа при этом намного лучше.

Вывод

Введение квадрантного представления трассы годографа характеристического полинома передаточной функции расширяет функциональные возможности метода анализа устойчивости динамических систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Топчев Ю.И.* Атлас для проектирования систем автоматического регулирования. — М.: Машиностроение, 1989. — 752 с.
2. *Бесекерский В.А., Попов Е.П.* Теория систем автоматического управления. Изд. 4-е перераб. и доп. — СПб.: Изд-во «Профессия», 2003. — 752 с.
3. *Брюханов В.Н., Косое М.Г., Протопопов С.П. и др.* Теория автоматического управления: Учеб. для машиностроит. спец. вузов. Под ред. Ю.М. Соломенцева. — 3-е изд., стер. — М.: Высш. шк., 2000. — 268 с.
4. *Справочник по теории автоматического управления.* / Под ред. А.А. Красовского. — М.: Наука, гл. ред. Физ.-мат. лит., 1987. — 712 с.
5. *Мирошник И.В.* Теория автоматического управления. — СПб.: Питер, 2005. — 336 с.

V.P. Dolgin, I.V. Dolgin

QUADRANT-CRITERION OF STABILITY OF DYNAMIC SYSTEMS

The method of criterion estimation of stability of the dynamic systems by analysis results of the route of characteristic equalization hodograph of operator transfer function is expounded. The example of estimation of stability of the linear closed system containing irrational links and a link of delay is considered. The results of numeral design of the system in steady and unsteady states, and on verge of stability are presented.

Key words: transfer function, characteristic equation, stability criterion, dynamic system, complex plane.

REFERENCES

1. *Topcheyev Yu.I.* Atlas for Design of Automatic-Control Systems. — Moscow: Mashinostrieniye, 1989. — 752 p. (in Russian).
2. *Besekersky V.A., Popov E.P.* Theory of Automatic-Control Systems. — 4th ed. revised and suppl. — St.-Peterbourg: Professiya Publ., 2003. — 752 p. (in Russian).
3. *Bryukhanov V.N., Kosoye M.G., Protopopov S.P., et al.* Theory of Automatic-Control: Manual for Machine Build. Special. for Higher Ed. Inst / Ed by Yu.M.Solomentsev. — 3rd stereotype ed. — Moscow: Vysshaya shkola, 2000. — 268 p. (in Russian).
4. *Reference Book on the Theory of Automatic-Control / Ed by A.A. Krasovsky.* — Moscow: Nauka, Main Edit. Board Phys.-Math. Lit., 1987. — 712 p. (In Russian).
5. *Miroshnik I.V.* Theory of Automatic-Control. — St.-Peterbourg: Peter, 2005. — 336 p. (in Russian).

Поступила 28.04.14;
после доработки 05.06.14

ДОЛГИН Владимир Прохорович, канд. техн. наук, доцент кафедры автомобильного транспорта Севастопольского национального технического университета. В 1985 г. окончил Военно-морское инженерное училище им. Ф.Э. Дзержинского (г. Ленинград), а в 1965 г. — Севастопольский приборостроительный ин-т. Область научных исследований — адаптивные модели в системах управления техническими и технологическими объектами.

ДОЛГИН Игорь Владимирович, магистрант, топменеджер ООО RM TEREX. В 1987 г. окончил Военно-морское инженерное училище (г. Калининград), а в 2012 г. — Севастопольский национальный технический университет. Область научных исследований — оптимизация управления динамическими процессами.