УДК 517. 983. 54; 519. 67; 539.122

В.Н. Старков, д-р физ.- мат. наук, **А.А. Семенов**, канд. физ.- мат. наук
Ин-т физики НАН Украины
(Украина, 03028, Киев, пр. Науки, 46,
тел. 5257994, 5240496, e-mail: nikol12@voliacable.com, sem@iop.kiev.ua),
Е.В. Гомонай, д-р физ.- мат. наук
Физико-технический ин-т Национального технического
университета Украины «Киевский политехнический ин-т»
(Украина, 03056, Киев, пр. Победы, 37,
тел. 2367098, e-mail: Helen.gomonay@gmail.com)

Операторное уравнение первого рода в проблеме реконструкции статистики числа фотонов квантового света

Методами вычислительной физики реализован алгоритм исследования некорректной проблемы редукции шума, связанного с потерями, темными отсчетами и фоновым излучением, в статистике фотоотсчетов квантового света. Регуляризирующий оператор в уравнении первого рода позволяет напрямую восстановить функцию распределения числа фотонов из статистики фотоотсчетов при известных параметрах шума, что подтверждено вычислительными экспериментами.

Методами обчислювальної фізики реалізовано алгоритм дослідження некоректної задачі редукції шуму, пов’язаного із втратами, темними відліками і фоновим випромінюванням, в статистиці фотовідліків квантового світла. Регуляризуючий оператор в рівнянні першого роду дозволяє напряму відновити функцію розподілу числа фотонів із статистики фотовідліків при відомих параметрах шуму, що підтверджено обчислювальними експериментами.

Ключевые слова: *квантовая оптика, фотон, вероятность, некорректная задача, оператор.*

В настоящее время существенно возрос интерес к исследованию процессов, свойств и явлений в квантовой физике. Одним из наиболее важных направлений как в современных технологиях, так и в фундаментальных исследованиях, является фотоэлектрическое детектирование. В текущем десятилетии особый интерес связан с детектированием, различающим отдельные количества фотонов [1], что обусловлено существенным прогрессом в области квантовой оптики и квантовой обработки информации.

В основе процесса фотодетектирования лежит использование фотоэлектрического эффекта: атомы детектора излучают электроны под воздействием света. Число электронов можно определить, в частности, по величине соответствующего фототока. В идеальной ситуации число эмитированных электронов равно числу поглощенных фотонов. Однако на практике падающий фотон поглощается лишь с определенной вероятностью η, называемой квантовым выходом детектора. В современных детекторах эта величина может достигать значений, достаточно близких к единице [1]. Проблема заключается в том, что повышение квантового выхода в большинстве детекторов ведет к возрастанию числа ложных срабатываний детектора (так называемых темных отсчетов). Подобный эффект вызывает и фоновое излучение. Такой источник приводит к независимому аддитивному пуассоновскому шуму.

Следует также заметить, что большинство современных детекторов, различающих число фотонов, основано на технологии детекторных кластеров [1, 2]. Идея заключается в разбиении исходного пучка на множество составляющих лучей, каждый из которых анализируется отдельно. По числу сработавших детекторов делается вывод о количестве поглощенных фотонов. Такая методика имеет свои недостатки. Чтобы исключить возможные ошибки, необходимо с особой тщательностью подбирать число детекторов [3, 4].

Поскольку процесс детектирования фотонов является случайным, соответствующее моделирование требует вероятностного подхода. Теория фотодетектирования [5] предопределяет основной экспериментальный результат таких исследований — функцию распределения числа фотоотсчетов P_m, которая несет в себе информацию о потерях, связанных с неидеальностью квантового выхода и наличием темных отсчетов. Для того чтобы иметь возможность анализировать непосредственно световое излучение, необходимо исключить искажающую информацию при работе с истинной функцией распределения числа фотонов p_n. Особенность такого подхода состоит в том, что исследование математической компоненты его содержательной части сопряжено с необходимостью преодоления проблемы некорректности (неустойчивости) задачи.

Физическая формулировка рассматриваемой задачи заключается в следующем [6, 7]. Распределение вероятности фотоотсчетов P_m при конечном квантовом выходе детектора η и среднем числе шумовых отсчетов

ISSN 0204–3572. Electronic Modeling. 2014. V. 36. № 3

N_{nc}, связанных с темновым фототоком и фоновым излучением, определяется выражением [7, 8]

$$P_m = \sum_{n=0}^{+\infty} S_{mn}(\eta, N_{nc}) p_n, \qquad (1)$$

где S_{mn} — вероятность регистрации m фотоотсчетов в n-фотонном (Фоковском) состоянии; p_n — априорная (квантовая) вероятность найти это состояние. Величина S_{mn} вычисляется по формуле

$$S_{mn}(\eta, N_{nc}) = e^{-N_{nc}} N_{nc}^{m-n} \eta^n \frac{n!}{m!} L_n^{m-n}(N_{nc}(1-\eta^{-1})), \ m \geq n,$$

$$S_{mn}(\eta, N_{nc}) = e^{-N_{nc}} (1-\eta)^{n-m} \eta^m L_m^{m-n}(N_{nc}(1-\eta^{-1})), \ m \leq n,$$

где $L_n^{\alpha}(z)$ — полином Лагерра. Относительно квантовой вероятности p_n априори справедливы утверждения

$$p_n \geq 0, \qquad (2)$$

$$\sum_n p_n = 1. \qquad (3)$$

В результате целенаправленных поисков выражение (1) формально обращено аналитически [7] :

$$p_n = \sum_{m=0}^{+\infty} S_{nm}^{-1}(\eta, N_{nc}) P_m, \qquad (4)$$

где

$$S_{nm}^{-1}(\eta, N_{nc}) = \eta^{-n} \Phi(m+1, m-n+1; N_{nc}(\eta^{-1}-1)) e^{N_{nc}} \binom{m}{n} (1-\eta^{-1})^{m-n}, \ m \geq n,$$

$$S_{nm}^{-1}(\eta, N_{nc}) = \eta^{-n} \Phi(n+1, n-m+1; N_{nc}(\eta^{-1}-1)) e^{N_{nc}} \frac{(-N_{nc})^{n-m}}{(n-m)!}, \ m \leq n,$$

являются элементами матрицы, обратной к матрице $\{S_{mn}\}$; $\Phi(n, m; z)$ — гипергеометрическая функция Куммера.

В двух предельных случаях выражение (4) может быть упрощено. Так, в случае отсутствия шумовых отсчетов, когда $\overline{N}_{nc} = 0$, оно имеет вид [9]

$$p_n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \eta^{-n} (1-\eta^{-1})^{n-m} P_m.$$

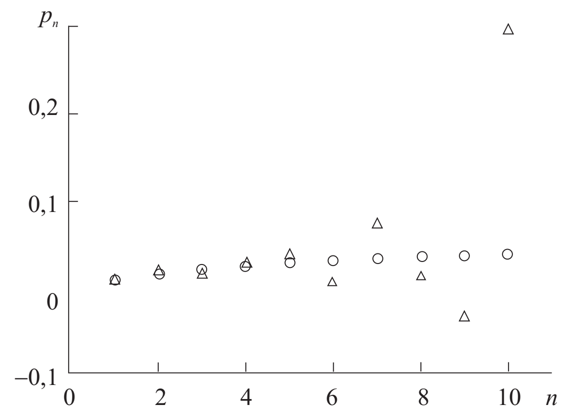

Рис. 1. Истинное распределение (○) числа фотонов p_n при хаотическом состоянии световой моды с добавленным фотоном [6] и результат прямого восстановления (Δ) числа фотонов согласно (4) при $N_{nc} = 0{,}748$; $\eta = 0{,}7764$

Во втором случае, при квантовом выходе $\eta = 1$значение p_n определяется по формуле

$$p_n = e^{\overline{N}_{nc}} \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{(-\overline{N}_{nc})^{m-n}}{(m-n)!} P_m.$$

В процессе проведения вычислительных экспериментов установлено, что выражение (4), как формальное обращение выражения (1), не обеспечивает удовлетворительных результатов в условиях реального эксперимента, поскольку малейшие погрешности в статистике фотоотсчетов P_m, связанные с экспериментальной процедурой, вызывают большие отклонения в реконструируемой статистике числа фотонов p_n (рис. 1).

Будем рассматривать метод, позволивший получить результаты [6], основа которых состоит в восстановлении статистики числа фотонов (задаваемой распределением вероятностей p_n) по измеряемой экспериментально статистике фотоотсчетов P_m. Представим математическую формулировку проблемы восстановления статистики числа фотонов. Статистика фотоотсчетов P_m связана со статистикой числа фотонов p_n операторным уравнением

$$u = Av, \; u \in U, \; v \in V, \tag{5}$$

где оператор A порожден матрицей $\{S_{mn}\}$ с элементами $S_{mn}(\eta, N_{nc})$ — вероятностями регистрации $m = 0, 1, 2, \ldots$ фотоотсчетов при наличии $n = 0,1,2, \ldots$ фотонов. Для обоснования этого утверждения использована следующая теорема [10].

Теорема 1. Для того чтобы матрица $\{S_{mn}\}$ представляла ограниченный линейный оператор, определенный всюду в действительном гильбертовом пространстве $V = l_2$, необходимо и достаточно выполнение при любых конечных q и r и любых $x_0, x_1, ..., x_q$; $y_0, y_1, ..., y_r$ неравенства

$$\left|\sum_{n=0}^{q}\sum_{m=0}^{r} S_{mn} x_n y_m\right| \le M \left(\sum_{n=0}^{q} x_n^2\right)^{1/2} \left(\sum_{m=0}^{r} y_m^2\right)^{1/2},$$

где M — фиксированное число; $x_0, x_1, ..., x_q$ — компоненты вектора $f = \sum_{k=0}^{\infty} x_k e_k \in l_2$; $y_0, y_1, ..., y_r$ — компоненты вектора $g = \sum_{k=0}^{\infty} y_k e_k \in l_2$; $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$ — ортонормированный базис в l_2.

Поскольку вместо точных значений $S_{mn}(\eta, N_{nc})$ и P_m, как правило, известны лишь их приближения $\widetilde{S}_{mn}(\eta, N_{nc})$ и $\widetilde{P}_m$, при проведении вычислительных экспериментов проверке подлежит в первую очередь соблюдение неравенства

$$\left|\sum_{n=0}^{q}\sum_{m=0}^{r} \widetilde{S}_{mn} x_n y_m\right| \le M \left(\sum_{n=0}^{q} x_n^2\right)^{1/2} \left(\sum_{m=0}^{r} y_m^2\right)^{1/2}. \qquad (6)$$

В случае подтверждения выполнения условий (6) исходную систему уравнений (1) можно записать в виде приближенного операторного уравнения с уровнем погрешности δ, h :

$$A_h v = u_\delta,\ u_\delta \in U,\ v \in V. \qquad (7)$$

При этом $\|u - u_\delta\| \le \delta$, $\|A - A_h\| \le h$. Условия (6) будут заведомо выполнены, если окажется справедливым более лаконичное соотношение

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \widetilde{S}_{mn} x_n y_m\right| = |(A_h f, g)| \le M\ \|f\|\,\|g\|.$$

Важнейшим этапом исследования свойств линейного матричного оператора A_h является определение его компактности (вполне непрерывности). Достаточным, но не необходимым условием компактности оператора A_h является конечность его абсолютной нормы, или сходимость ряда [10]:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \widetilde{S}_{mn}^2 < \infty. \qquad (8)$$

При соблюдении условия (8) можно утверждать, что уравнение (7) — это операторное уравнение первого рода, где $A_h \in \Lambda(V, U)$ — линейный компактный оператор, действующий из гильбертова пространства $V = l_2$ в гильбертово пространство $U = l_2$; $u_\delta = \{\widetilde{P}_0, \widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2, ..., \widetilde{P}_m, ...\} \in U$ — заданный элемент; $v = \{p_0, p_1, p_2, ..., p_n, ...\} \in V$ — искомый элемент; $\Lambda(V, U)$ — пространство всех ограниченных линейных операторов, определенных на V.

Компактность оператора A_h имеет принципиальное значение при выборе метода и построении алгоритма решения операторного уравнения первого рода (7), так как в бесконечномерном пространстве V компактный оператор A_h не может иметь ограниченного обратного оператора A_h^{-1} в пространстве U [11]. Это означает что формальное обращение (4) или попытка поиска решения задачи (7) в виде $v = A_h^{-1} u_\delta$ не приводит к удовлетворительным результатам в условиях реального эксперимента, поскольку бесконечно малые вариации в статистике фотоотсчетов P_m, связанные с экспериментальной процедурой, приводят к сколь угодно большим отклонениям в реконструируемой статистике числа фотонов p_n. Таким образом, решение задачи (7) неустойчиво, а задача является некорректно поставленной по Адамару [12—15].

Для преодоления проблемы некорректности задачи в рассмотрение вводится регуляризирующий оператор (регуляризатор) $R_\alpha(\delta, h, A_h)$ [12] такой, что

$$\lim_{\substack{\delta\to 0\\ h\to 0}} \sup_{\substack{A_h:\\ \|A-A_h\|_{V\to U}\le h}} \sup_{\substack{u_\delta:\\ \|u-u_\delta\|_U\le\delta}} \inf_{v\in A^{-1}u} \|v - R_\alpha(\delta, h, A_h)\, u_\delta\|_V = 0,$$

где $A^{-1}u$ — полный прообраз элемента u; α — параметр регуляризации.

При проведении экспериментальных исследований в лазерной физике, нелинейной оптике, квантовой оптике вместо точных данных задачи A и u известны лишь их приближения с уровнем погрешности δ, h: $\|u - u_\delta\| \le \delta$, $\|A - A_h\| \le h$, т.е. вместо (1) решается приближенное операторное уравнение $A_h v = u_\delta$, $u_\delta \in U$, $A_h \in \Lambda(V, U)$.

Конструктивное решение задачи заключается в аппроксимации нормального решения уравнения (5) (или решения (5) с наименьшей нормой в пространстве V) $v^+ \in \mathrm{Range}\,(A^+) = \overline{\mathrm{Range}\,(A^*)} = \mathrm{Ker}\,(A)^\perp$ приближенным решением уравнения (7). При этом следует учесть, что A^+ — линейный оператор, псевдообратный к оператору A, такой, что $A^+ : \mathrm{Range}\,(A^+) = \overline{\mathrm{Range}\,(A^*)} = \mathrm{Ker}\,(A)^\perp$, A^+ — непрерывный оператор, если $\mathrm{Range}\,(A) = \overline{\mathrm{Range}\,(A)}$.

Справедливо следующее утверждение [16]: нормальное решение $v^+ = A^+ u$ $(u \in \mathrm{Range}\,(A) \oplus \mathrm{Range}\,(A)^\perp)$ является единственным решением уравнения $A^* A v = A^* u$ $(v \in \overline{\mathrm{Range}\,(A^*)})$.

Как правило, математические модели (5) в экспериментальных исследованиях лазерной физики, нелинейной оптики, квантовой оптики обладают таким свойством, что $\mathrm{Range}\,(A) \neq \overline{\mathrm{Range}\,(\mathrm{A})}$ (например, A — линейный компактный оператор), т.е. решение операторного уравнения $Av = u$ представляет собой некорректно поставленную задачу. Решить задачу устойчивого приближения к точному решению уравнения (5) при неточно заданных исходных данных $u_\delta \in U, A_h \in \Lambda(V, U)$, $\|u - u_\delta\| \leq \delta, \|A - A_h\| \leq h$ с известными δ и h можно лишь одним из методов регуляризации. Среди них наиболее известен метод, теоретические основы которого были заложены в работах А.Н. Тихонова. В соответствии с этим методом для решения (7) вводится сглаживающий функционал (параметрический функционал Тихонова) [12]:

$$\Phi_\alpha[v, u_\delta] = \| A_h v - u_\delta \|_U^2 + \alpha \Omega[v], \tag{9}$$

где $\Omega[v]$ — стабилизирующий функционал (обычно $\Omega[v] = \| v \|_V^2$); $1 > \alpha > 0$ — параметр регуляризации; $\| A_h v - u_\delta \|_U^2$ — невязка уравнения (7) на элементе v. Определяется элемент v_α такой, что функционал (9) имеет на нем минимальное значение, т.е.

$$\Phi_\alpha[v_\alpha, u_\delta] = \inf_{v \in V} \Phi_\alpha[v, u_\delta]. \tag{10}$$

Если в (9) $\Omega[v] = \| v \|_V^2$, то уравнение Эйлера принимает достаточно простой вид: $\alpha v_\alpha + A_h^* A_h v_\alpha = A_h^* u_\delta$. При этом

$$v_\alpha = (\alpha E + A_h^* A_h)^{-1} A_h^* u_\delta = R_\alpha u_\delta, \tag{11}$$

где $R_\alpha = (\alpha E + A_h^* A_h)^{-1} A_h^*$. При $\delta, h \to 0$ должно и $\alpha \to 0$ в силу определения регуляризирующего оператора. Поэтому в качестве решения задачи (10) следует принять

$$v^+ = \lim_{\alpha \to 0} (\alpha E + A^* A)^{-1} A^* u \tag{12}$$

при $\Omega[v] = \| v \|_V^2$. Решение (12) — нормальное решение, т.е. при точных значениях v и A из всех решений уравнения $Av = u$, $u \in U$, $v \in V$, методом Тихонова выбирается нормальное решение. Формула (12) может быть записана в виде $v^+ = A^+ u$, где $A^+ = \lim_{\alpha \to 0} (\alpha E + A^* A)^{-1} A^*$ — оператор, псевдообратный к A. Если $\delta \neq 0$ и (или) $h \neq 0$, то метод дает решение v_α, которое является приближением к нормальному решению v^+. Справедливо следующее утверждение [17].

Теорема 2. Пусть $v^+ \in V$ — нормальное решение уравнения (5). Согласно методу (11), если $\alpha(\delta, h) \to 0$ так, что

$$\lim_{\delta,\ h \to 0} \frac{h^2 + \delta^2}{\alpha(\delta, h)} = 0,$$

то $\lim\limits_{\delta,\ h \to 0} \| v_{\alpha(\delta,\ h)} - v^+ \| = 0$.

Как правило, для решения сложной задачи имеется несколько методов. Это в полной мере относится и к некорректно поставленной задаче. В данном случае следует сослаться на важный класс регулязирующих алгоритмов, предложенный А.В. Бакушинским [17]. Идея подхода заключается в построении параметрического семейства функций $G = \{g_\alpha(\lambda),\ \alpha \in (0,1)\}$, измеримых по Борелю на полуоси $[0, \infty)$ и удовлетворяющих при $\forall \upsilon \in [0, \upsilon_*]$ условиям

$$\sup_{0 \le \lambda < \infty} \lambda^{\upsilon} |1 - \lambda g_\alpha(\lambda)| \le \chi_\upsilon \alpha^{\upsilon}, \tag{13}$$

$$\sup_{0 \le \lambda < \infty} \sqrt{\lambda} \, | g_\alpha(\lambda)| \le \chi_* \alpha^{-1/2}, \tag{14}$$

где $\upsilon_*, \chi_\upsilon, \chi_*$ — некоторые положительные константы, не зависящие от α. Система функций G называется порождающей для метода регуляризации

$$R = R_\alpha = g_\alpha(A_h^* A_h) A_h^*, \ g_\alpha \in G. \tag{15}$$

Параметр υ_* функции g_α называют квалификацией метода R_α, а параметр $\alpha = \alpha(\delta, h)$ — параметром регуляризации. Регуляризаторы (15) позволяют достичь оптимального порядка точности на классах уравнений (5) с истокопредставимыми решениями.

При исследовании задачи построения оптимальных методов решения некорректного уравнения (5) в рассмотрение вводится некоторое центрально-симметричное множество M, которое в теории некорректных задач имеет вид [18]

$$M_{\upsilon,\rho}(A) := \{ z : z = |A|^{\upsilon} w, \|w\|_V \le \rho \},$$

где $\upsilon > 0$, $\rho > 0$, $|A| = (A^* A)^{1/2}$. Элементы множества $M_{\upsilon,\rho}(A)$ называются истокопредставимыми. Известно, что если уравнение (5) имеет истокопредставимое решение $v^+ \in M_{\upsilon,\rho}(A)$, то v^+— наименьшее в метрике V решение (5). Кроме того, для $\forall \upsilon > 0$ справедливо соотношение $\mathrm{Range}\,(|A|^{\upsilon}) = \mathrm{Range}\,(A^*)$, т.е. элементы $|A|^{\upsilon} w$ образуют всюду плотное множество в подпространстве $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{A})^{\perp}$, которому принадлежит нормальное решение уравнения (5).

Множество регуляризаторов $\mathrm{R}_0 = \{g_\alpha(A_h^* A_h)A_h^*,\, g_\alpha \in G\} \subset \mathrm{R}$, включает в себя большинство известных методов регуляризации [18].

1. Регуляризатор метода Тихонова $R_\alpha = (\alpha E + A_h^* A_h)^{-1} A_h^*$ является элементом множества R_0 с порождающей функцией $g_\alpha(\lambda) = (\alpha + \lambda)^{-1}$ и параметрами $\chi_* = 1/2, \chi_\upsilon = \upsilon^\upsilon (1-\upsilon)^{(1-\upsilon)}$. Квалификация метода Тихонова $\upsilon_* = 1$.

2. Обобщенный регуляризатор метода Тихонова

$$R_\alpha = (\alpha^{q+1} E + (A_h^* A_h)^{q+1})^{-1} (A_h^* A_h)^q A_h^* \in \mathrm{R}_0\,,\; q \geq -1/2 \tag{16}$$

порождается функцией $g_\alpha(\lambda) = \lambda^q (\alpha^{q+1} + \lambda^{q+1})^{-1}$ при $\upsilon_* = q+1$.

3. Нестационарная итерационная схема метода Тихонова. Задается $v_0 = 0$. Последовательно находятся элементы v_k (k = 1, 2, ...,) как решения уравнений

$$\alpha_k v_k + A_h^* A_h v_k = \alpha_k v_{k-1} + A_h^* u_\delta\,,$$

$$(\, 0 < \alpha_k < \alpha_{k-1}, \text{ например, } \alpha_k = q^k, 0 < q < 1\,)\,. \tag{17}$$

Метод (17) порождается функцией

$$g_\alpha(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \prod_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{\alpha_i + \lambda}\right),\; \lambda \neq 0\,,$$

и удовлетворяет условиям (13), (14) для $\chi_\upsilon = O(\upsilon^\upsilon)$ при $0 < \upsilon \leq 1$ и $\chi_\upsilon = O(c^{\upsilon^\upsilon})$ при $1 < \upsilon$. Квалификация метода $\upsilon_* = \infty$.

4. Неявная итерационная схема (метод Факеева—Ларди). Задается $v_0 = 0$. Последовательно находятся элементы v_k из уравнения

$$\mu v_k + A_h^* A_h v_k = \mu v_{k-1} + A_h^* u_\delta,\;\; k = 1, 2, \ldots \;\; (0 < \mu = \mathrm{const})\,. \tag{18}$$

Итерационный метод (18) является регуляризирующим (15), если

$$g_\alpha(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \left(\frac{\mu}{\mu + \lambda}\right)^{1/\alpha}\right),\; \lambda \neq 0,\; 1/\alpha = k = 1, 2, \ldots\,.$$

Условия (13), (14) выполняются при $\chi_* = \mu^{-1/2}$, $\chi_\upsilon = (\upsilon\mu)^\upsilon$ и $k \geq \upsilon$. Квалификация метода $\upsilon_* = \infty$.

5. Метод асимптотической регуляризации, порождающая функция которого имеет вид

$$g_t(\lambda) = \int_0^t e^{-(t-s)\lambda}\, ds = \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-t\lambda}),$$

так что $1-\lambda g_t(\lambda)=e^{-t\lambda}$, а приближенное решение определяется формулой

$$v_t=(E-A_h^*A_h g_t(A_h^*A_h))v_0+g_t(A_h^*A_h))A_h^*u_\delta \tag{19}$$

для произвольных $t=\alpha^{-1}$. Условия (13), (14) в методе (19) выполняются при $\chi_*=0{,}6382$, $\chi_\upsilon=(\upsilon e)^\upsilon$. Квалификация метода $\upsilon_*=\infty$.

6. Явная итерационная схема (метод Ландвебера). Задается $v_0=0$. Последовательно находятся элементы v_k из уравнения

$$v_k=(E-\mu A_h^*A_h)\,v_{k-1}+\mu A_h^*u_\delta,\ \ k=1,2,\ldots\ \ (0<\mu<2/\|A_h\|^2). \tag{20}$$

Итерационный метод (20) порождается функцией

$$g_\alpha(\lambda)=\frac{1}{\lambda}\,(1-(1-\mu\lambda)^{1/\alpha}),\ \ \lambda\neq 0,$$

где параметр регуляризации α таков, что величина $1/\alpha$ принимает лишь целочисленные значения $1/\alpha=k=1,2,\ldots$. Условия (13), (14) выполняются при $\chi_*=\mu^{1/2}$, $\chi_\upsilon=(\upsilon/(\mu e))^\upsilon$. Квалификация метода $\upsilon_*=\infty$.

Основной результат теории некорректных задач по вычислению точных оценок приближения для уравнения (7) можно сформулировать следующим образом. Для уравнения (7) с приближенно заданными оператором A_h и правой частью u_δ при $\forall\ v>0$ порядок сходимости к истокопредставимому нормальному решению $v^+\in M_{\upsilon,\rho}(A)$ не превышает величины $\dfrac{\upsilon}{\upsilon+1}$, т.е. $\|v^+-R_\alpha u_\delta\|=O\,((\delta+h)^{\upsilon/(\upsilon+1)})$. Оптимальный порядок точности при указанных предположениях априори обеспечивает выбор параметра регуляризации α, удовлетворяющего условию $\alpha=c\,(\delta+h)^{2/(\upsilon+1)}$, $c=\mathrm{const}>0$.

В условиях отсутствия информации о точном значении параметра υ, определяющего множество $M_{\upsilon,\rho}(A)$, при практическом решении задачи (7) значение параметра регуляризации определяется непосредственно в процессе решения, т.е. осуществляется апостериорный выбор параметра α. Один из наиболее эффективных и распространенных способов апостериорного выбора параметра регуляризации α при решении (5) методом Тихонова (11) (в случае, когда $A=A_h$, $h=0$), называемый принципом невязки, предложен и обоснован В.А. Морозовым [19]. В соответствии с принципом невязки параметр α выбирается из условия

$$\|A\,v_\alpha-u_\delta\|=\delta, \tag{21}$$

где $v_\alpha=(\alpha E+A^*A)^{-1}A^*u_\delta$. На практике α выбирают так, чтобы функционал $\|A\,v_\alpha-u_\delta\|$ удовлетворял условию

$$\|A\,v_\alpha-u_\delta\|\in[a_1\delta,\ a_2\delta], \tag{22}$$

где $1 < a_1 < a_2$ — некоторые заранее заданные числа. В случае неточно заданного оператора A_h в работе [20] был предложен обобщенный принцип невязки, в соответствии с которым требуется выполнение условия

$$\| A_h v_\alpha - u_\delta \| \in [a_1(\delta + \| v_\alpha \| h),\ a_2(\delta + \| v_\alpha \| h)]\,. \tag{23}$$

Известно, что регуляризирующие алгоритмы (15), удовлетворяющие условиям (13), (14) совместно с принципом невязки (22) или обобщенным принципом невязки (23), позволяют найти решение задачи (5) с оптимальной по порядку точностью на множестве $M_{\upsilon,\rho}(A)$ для всех υ таких, что $0 < \upsilon < (2\upsilon_* - 1)$.

Для решения задачи (7) M. Defriese и C. De Mol объединили итерационный метод Ландвебера с апостериорным выбором параметра регуляризации α (числа итераций $1/\alpha = k_*$) [21]. Суть правила останова заключается в следующем. Итерационный процесс (11) продолжается, если

$$\| A_h v_k - u_\delta \| > \frac{2\delta}{2\delta - \mu \| A_h \|^2}\,,$$

и прекращается, если неравенство

$$\| A_h v_{k_*} - u_\delta \| \le \frac{2\delta}{2\delta - \mu \| A_h \|^2} \tag{24}$$

выполнено впервые. В качестве приближенного решения уравнения (7) принимается v_{k_*}.

Особенностью принципов (21), (22) и (24), как и многих других, является то обстоятельство, что в них величина погрешности δ правой части u_δ в уравнении (7) присутствует в явном виде. Однако в научных экспериментальных исследованиях в силу их уникальности определение погрешности δ нередко носит достаточно субъективный характер, как и выбор величин a_1 и a_2 в (22) или (23). Значительный уровень субъективности присутствует и при выборе метода регуляризации. Важную роль в этом случае играет наличие априорной или апостериорной информации о решении задачи [14], а также опыт проведения вычислительных экспериментов.

Для приближенного решения уравнения (7) в рассматриваемой конкретной задаче выбран итерационный метод Ландвебера (20):

$$v_k = (E - \mu A_h^* A_h)\, v_{k-1} + \mu A_h^* u_\delta,$$

$$k = 1, 2, \ldots\ (0 < \mu < 2/\|A_h\|^2),\ v_0 = 0\,.$$

Весомыми аргументами в пользу такого выбора послужили простота программной реализации метода, высокий уровень компьютерной совмес-

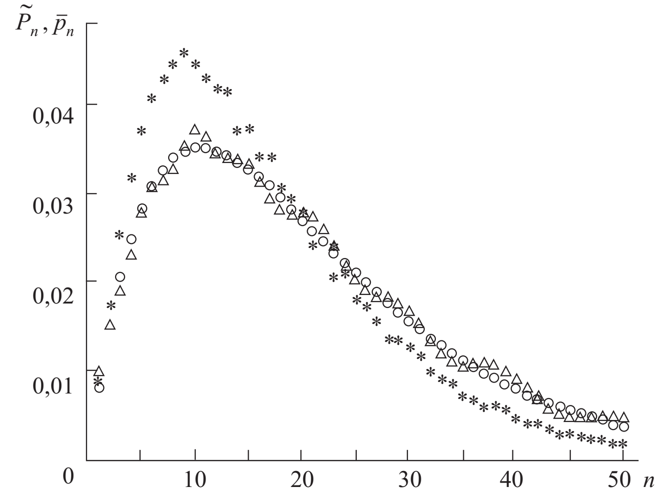

Рис. 2. Результаты вычислительного эксперимента: Δ — функция распределения числа фотонов p_n; ∗ — реконструированная функция распределения числа фотоотсчетов $\widetilde{P}_n$ для хаотического состояния световой моды с добавленным фотоном [6] методом регуляризации Ландвебера; ○ — истинная функция распределения числа фотонов $\bar{p}_n$

тимости и достаточный уровень эффективности как по числу итераций, так и по точности приближенного решения. При реализации метода Ландвебера необходимо определение параметра регуляризации α как момента останова итерационного процесса.

Предложенный подход к апостериорному определению числа итераций k_*, основан на использовании соотношения (3). При этом вводится функционал

$$\varphi\ [w] := \left| \sum_{n=0}^{\infty} |w_n| - 1 \right|, \qquad (25)$$

позволяющий построить алгоритм решения (7) с использованием (20).

На первом этапе фиксируется число итераций m_1, затем определяется множество $V_{m_1} = \{v_k = (E - \mu A_h^* A_h)\, v_{k-1} + \mu A_h^* u_\delta,\ k = 1, 2, \ldots, m_1\}$ приближенных решений уравнения (7). Множество V_{m_1} рассматривается как область определения функционала (25) $V_{m_1} = D_1(\varphi)$. Осуществляя в ходе вычислительного эксперимента анализ области значений функционала (25) и невязки $\| A_h v_k - u_\delta \|$ для различных m_1, принимаем за искомое следующее решение:

$$v_{k_*} = \arg \min_{\overline{k = m_0, m_1}} | \| v_k \|_1 - 1 |,$$

где $\| \cdot \|_1$ норма в пространстве l_1.

Для проверки работоспособности предложенного алгоритма проведен вычислительный эксперимент с уравнением (7) при наличии дополнительного условия (2). На рис. 2 приведены результаты вычислительного эксперимента, в процессе выполнения которого выяснилось, что

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\widetilde{S}_{mn}^{2} = 14{,}195$$

при заданных значениях $N_{nc} = 0{,}75$, $\eta = 0{,}77$, $\mu = 0{,}6$. Рабочее число итераций в этом примере $k_* = 101$, величина относительной невязки $(\|A_h v_{k_*} - u_\delta\| / \|u_\delta\|) = 0{,}0201875$. Относительная погрешность аппроксимации решения v^+ составила $(\| v_{k_*} - v^+\| / \|v^+\|) = 0{,}041438$.

Выводы

Предложено каноническое представление бесконечной системы линейных алгебраических уравнений, описывающей регистрируемый вектор плотности вероятностей фотоотсчетов с помощью вектора плотности квантовых вероятностей фотонов, в виде операторного уравнения первого рода. Указаны необходимые и достаточные условия линейности и непрерывности оператора, определенного во всем действительном гильбертовом пространстве l_2. Определено достаточное условие компактности исследуемого оператора. Представлен перечень методов регуляризации исходной некорректно поставленной задачи. Приведены результаты вычислительных экспериментов.

Using methods of computational physics the algorithm is implemented that allows investigating the ill-posed problem of noise reduction, connected with losses, dark counts and background radiation in photocounting statistics of quantum light. The regularizing operator in operator equation of the first kind allows direct restoration of photon distribution function from photon-number statistics with known noise parameters. This is confirmed by computational experiments.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Waks E., Diamanti E., Sanders B.C. et al.* Direct Observation of Non-classical Photon Statistics in Parametric Downconversion// Phys. Rev. Lett. — 2004. — 92. — 113602.
2. *Achilles D., Silberhoen C., Sliwa C. et al.* Fiber-assisted Detection with Photon Number Resolution// Opt. Lett. — 2003. — 28 (23) : 2387-9.
3. *Sperling J., Vogel W. and Agarwal G.S.* Correlation Measurements with on-off Detectors// Phys. Rev. — 2013. — A 88. — 043821.
4. *Sperling J., Vogel W. and Agarwal G.S.* Sub-Binomial Light// Phys. Rev. Lett. — 2012. — 109. — 093601.
5. *Mandel L. and Wolf E.* Optical Coherence and Quantum Optics. — Cambridge University Press, 1995.

6. *Starkov V.N., Semenov A.A., Gomonay H.V.* Numerical Reconstruction of Photon-number Statistics from Photocounting Statistics: Regularization of an Ill-posed Problem // Phys. Rev. — 2009. — A 80. — 013813.
7. *Semenov A.A., Turchin A.V., Gomonay H.V.* Detection of Quantum Light in the Presence of Noise // Phys. Rev. — 2008. — A 78. — 055803.
8. *Welsch D.-G., Vogel W., Opartny T.* Homodyne Detection and Quantum State Reconstruction // Progress in Optics. — 1999. — 39. — P. 63. 2. ... A 261, 20.
9. *Mandel L.* Squeezed States and Sub-Poissonian Photon Statistics // Phys. Rev. Lett. — 1982. — 49. — 136.
10. *Ахиезер Н.И., Глазман И.М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. — М. : Наука, 1966. — 544 с.
11. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М. : Наука, 1972. — 496 с.
12. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. — М. : Наука, 1966. — 288 с.
13. *Верлань А.Ф., Сизиков В.С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Спр. пособие. — Киев : Наук. думка. — 1986. — 544 с.
14. *Васин В.В., Агеев А.Л.* Некорректные задачи с априорной информацией. — Екатеринбург: Уральская издательская фирма «Наука», 1993. — 263 с.
15. *Сизиков В.С.* Обратные прикладные задачи и MatLab: Учеб. пособие. — СПб. : «Лань», 2011. — 256 с.
16. *Lowes A.K.* Inverse und schlecht gestellte Probleme. — Stuttgart: Teubner, 1989. — 205 p.
17. *Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.* Некорректные задачи. Численные методы и приложения. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 1989. — 199 с.
18. *Вайникко Г.М., Веретенников А.Ю.* Итерационные процедуры в некорректных задачах. — М. : Наука, 1986. — 182 с.
19. *Морозов В.А.* Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 1974. — 359 с.
20. *Гончарский А.В., Леонов А.С., Ягола А.Г.* Обобщенный принцип невязки. — Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1973. — **13**, № 2. — С. 294—302.
21. *Defrise M. and De Mol C.* A Note on Stopping Rules for Iterative Methods and Filtered svd // Inverse Problems: An Interdisciplinary Study. P.C. Sabatier, editor. Academic Press, 1987. — P. 261 — 268.

Поступила 26.02.14

СТАРКОВ Вячеслав Николаевич, д-р физ.-мат. наук, вед. науч. сотр. отдела теоретической физики Ин-та физики НАН Украины. В 1964 г. окончил Самарский государственный аэрокосмический университет им. С.П. Королева. Область научных исследований — некорректные и нелинейные проблемы вычислительной физики.

СЕМЕНОВ Андрей Александрович, канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр. отдела теоретической физики Ин-та физики НАН Украины. В 1994 г. окончил Киевский национальный университет им. Т. Шевченко. Область научных исследований — квантовая оптика.

ГОМОНАЙ Елена Васильевна, д-р физ.-мат. наук, профессор Физико-технического ин-та Национального технического университета Украины «Киевский политехнический ин-т». В 1985 г. окончила Московский физико-технический ин-т. Область научных исследований — квантовая оптика.