УДК 004.021

В.А. Федорчук, д-р техн. наук, **А.И. Махович**
Каменец-Подольский национальный университет им. Ивана Огиенко
(Украина, 32300, Каменец-Подольский, ул. Огиенко, 61,
тел. (03849) 31642, e-mail: fedva@ukr.net; umismag@gmail.com)

Метод исследования динамики нестационарных тепловых процессов при наличии симметричных граничных условий

Рассмотрен метод исследования динамики нестационарных тепловых процессов с учетом особенности симметричных граничных условий.

Розглянуто метод дослідження динаміки нестаціонарних теплових процесів з врахуванням особливості симетричних граничних умов.

Ключевые слова: *моделирование тепловых процессов, симметричные граничные условия, универсальность выражений.*

Исследование процессов теплопроводности является важным этапом при решении задач проектирования элементов современных технических систем, поскольку надежность различных промышленных изделий, а также отдельных узлов и деталей, в значительной степени зависит от температурных режимов, при которых эти изделия и их отдельные части эксплуатируются. Сложность таких задач обусловлена характером исследуемых процессов, а также видом граничных и начальных условий [1, 2].

Базовыми математическими представлениями процессов теплопроводности являются дифференциальные уравнения в частных производных параболического типа, для численного решения которых в настоящее время можно использовать множество программных средств компьютерного моделирования (например, 3D-MAX, ANSYS, T-FLEX, MAYA, CATI и др.). При этом используются преимущественно сеточные методы, требующие больших вычислительных мощностей [3].

При решении оптимизационных задач, требующих высокой скорости вычислений, возникает необходимость в разработке универсальных и относительно простых методов численной реализации моделей динамики нестационарных тепловых процессов. Одним из способов решения данной проблемы является учет особенности объекта моделирования. В случае симметричных граничных условий первого, второго и третьего рода перспективным представляется метод сечений для получения аппроксимирующих выражений.

Получение аппроксимирующих уравнений нестационарных тепловых процессов методом сечений. Методику преобразования уравнений в частных производных в систему обыкновенных дифференциальных уравнений без потери общности рассмотрим на примере одномерного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t), \quad -1 \le x \le 1, \tag{1}$$

с граничными условиями первого рода $u(x,t)|_{x=\pm 1} = F_{\text{гр}1}(t)$, где $F_{\text{гр}1}(t)$ — входное воздействие, и начальным условием $u(x,t)|_{t=0} = E(x)$. Предполагаем, что решение $u(x,t)$ уравнения (1) может быть приближенно аппроксимировано рядом

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) Q_n(x),$$

в котором $Q_n(x)$ — известные функции, например x^n, x^{2n}, $\cos nx$ и другие, имеющие соответствующее число производных по x. Производные

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \ \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

с использованием граничных условий могут быть разложены в ряды по функциям $u(x,t)$:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t)\frac{\partial^2 Q_n(x)}{\partial x^2} = \sum_{i=1}^{\infty} D_i(x,x_i)\, u(x_i,t). \tag{2}$$

Коэффициенты $D_i(x, x_i)$ будем выражать через известные функции $Q_n(x)$, их производные и через граничные условия. Явный вид выражений для коэффициентов $D_i(x, x_i)$ можно определить различными способами. Можно построить интерполяционный полином Лагранжа

$$u(x,t) = u(x_0, t)\frac{(x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2)}{(x_0^2 - x_1^2)(x_0^2 - x_2^2)} +$$

$$+ u(x_1, t)\frac{(x^2 - x_0^2)(x^2 - x_2^2)}{(x_1^2 - x_0^2)(x_1^2 - x_2^2)} + u(x_2, t)\frac{(x^2 - x_0^2)(x^2 - x_1^2)}{(x_2^2 - x_0^2)(x_2^2 - x_1^2)},$$

проходящий через заданные опорные точки x_0, x_1, x_2, и выражения частных производных получать его дифференцированием по координате x.

Для задач, имеющих симметричное решение, выберем функцию $Q_n(x)=x^{2n}$ и ограничимся тремя членами ряда в (2). Выбрав опорные точки $x = 0$, $x_1 = 0{,}5$ и $x_2 = 1$, запишем

$$u(x,\,t)=u(0,\,t)\,\frac{\left(x^2-\dfrac{1}{4}\right)(x^2-1)}{\left(0-\dfrac{1}{4}\right)(0-1)}\;+$$

$$+u\left(\frac{1}{2},\,t\right)\frac{(x^2-0)(x^2-1)}{\left(\dfrac{1}{4}-0\right)\left(\dfrac{1}{4}-1\right)}+u\,(1,t)\,\frac{(x^2-0)\left(x^2-\dfrac{1}{4}\right)}{(1-0)\left(1-\dfrac{1}{4}\right)},$$

откуда

$$u(x,t)=(4x^4-5x^2+1)\,u(0,t)\,+$$

$$+\frac{16}{3}x^2(1-x^2)\,u\left(\frac{1}{2},\,t\right)+\frac{1}{3}x^2(4x^2-1)\,F_{\text{гр}1}(t). \qquad (3)$$

Дифференцируя (3) по x, получаем выражение частной производной первого порядка

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}=2x\,(8x^2-5)\,u(0,\,t)+\frac{32}{3}x\,(1-2x^2)\,u\left(\frac{1}{2},\,t\right)+\frac{2}{3}x\,(8x^2-1)\,F_{\text{гр}1}(t),$$

откуда

$$\frac{\partial^2 u\,(x,t)}{\partial x^2}=(48x^2-10)\,u\,(0,t)\,+$$

$$+\left(\frac{32}{3}-64x^2\right)u\left(\frac{1}{2},\,t\right)+\left(16x^2-\frac{2}{3}\right)F_{\text{гр}1}(t). \qquad (4)$$

Подставив в (1) выражение частной производной (4), запишем

$$\frac{\partial u\,(x,t)}{\partial t}=a^2(x)\Big[(48x^2-10)\,u(0,t)\,+$$

$$+\left(\frac{32}{3}-64x^2\right)u\left(\frac{1}{2},\,t\right)+\left(16x^2-\frac{2}{3}\right)F_{\text{гр}1}(t)\Big]+f\,(x,\,t). \qquad (5)$$

Полагая в (5) $x=0$ и $x=1/2$, получаем систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений для определения величин $u(0,t)$ и $u(1/2,t)$,

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial t}+a^2(0)\left[10u(0,t)-\frac{32}{3}u\left(\frac{1}{2},t\right)\right]=-\frac{2}{3}a^2(0)F_{\text{гр}1}(t)+f(0,t),$$

$$\frac{\partial u\left(\frac{1}{2},t\right)}{\partial t}+a^2\left(\frac{1}{2}\right)\left[-2u(0,t)+\frac{16}{3}u\left(\frac{1}{2},t\right)\right]=\frac{10}{3}a^2\left(\frac{1}{2}\right)F_{\text{гр}1}(t)+f\left(\frac{1}{2},t\right), \tag{6}$$

с заданными соответствующими начальными условиями. Решая систему (6), с учетом (3) получаем возможность вычислить значения функции $u(x,t)$ в любой точке.

Полученные выражения (6) справедливы для симметричных граничных условий первого рода. Если заданы граничные условия второго рода

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=\pm 1}=\pm F_{\text{гр}2}(t),$$

то аппроксимация частной производной второго порядка по переменной x функции $u(x,t)$ имеет вид

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=\frac{64}{7}(3x^2-1)\left[u(0,t)-u\left(\frac{1}{2},t\right)\right]+\frac{1}{7}(24x^2-1)F_{\text{гр}2}(t), \tag{7}$$

а частная производная первого порядка — соответственно вид

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}=\frac{64}{7}x(x^2-1)\left[u(0,t)-u\left(\frac{1}{2},t\right)\right]+\frac{1}{7}x(8x^2-1)F_{\text{гр}2}(t). \tag{8}$$

Проинтегрировав (8) по переменной x, получим выражение для вычисления функции $u(x,t)$ в произвольной точке в случае граничных условий второго рода:

$$u(x,t)=\frac{16}{7}x^2(x^2-2)\left[u(0,t)-u\left(\frac{1}{2},t\right)\right]+\frac{1}{7}x^2\left(2x^2-\frac{1}{2}\right)F_{\text{гр}2}(t)+u(0,t). \tag{9}$$

Непосредственной подстановкой в (9) значений x в опорных точках получаем соответствующие значения $u(0,t)$ и $u(1/2,t)$.

Подставив в (1) выражение частной производной (7), получим

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=$$

$$=\frac{1}{7}a^2(x)\left\{64(3x^2-1)\left[u(0,t)-u\left(\frac{1}{2},t\right)\right]+(24x^2-1)F_{\text{гр}2}(t)\right\}+f(x,t). \tag{10}$$

Для нахождения искомых функций $u(0,t)$ и $u(1/2,t)$ необходимо подставить в (10) по очереди $x=0$ и $x=1/2$, получить систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка ,

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial t}=\frac{1}{7}\,a^2(0)\left\{64\left[u\left(\frac{1}{2},t\right)-u(0,t)\right]-F_{\text{гр2}}(t)\right\}+f(0,t),$$

$$\frac{\partial u\left(\frac{1}{2},t\right)}{\partial t}=\frac{1}{7}\,a^2\left(\frac{1}{2}\right)\left\{16\left[u\left(\frac{1}{2},t\right)-u(0,t)\right]+5F_{\text{гр2}}(t)\right\}+f\left(\frac{1}{2},t\right),$$

и решить ее.

При заданных граничных условиях третьего рода

$$\left.\left[\pm\alpha u(x,t)+\beta\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right]\right|_{x=\pm 1}=F_{\text{гр3}}(t)$$

выражение для аппроксимации частной производной второго порядка по переменной x примет вид

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=\left[\frac{48(3\alpha+8\beta)x^2-30\alpha-128\beta}{3\alpha+14\beta}\right]u(0,t)+$$

$$+32\left[\frac{\alpha+4\beta-6(\alpha+2\beta)x^2}{3\alpha+14\beta}\right]u\left(\frac{1}{2},t\right)+\frac{48x^2-2}{3\alpha+14\beta}F_{\text{гр3}}(t). \qquad (11)$$

Частная производная первого порядка будет иметь вид

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}=\left[\frac{16(3\alpha+8\beta)x^3-(30\alpha+128\beta)x}{3\alpha+14\beta}\right]u(0,t)+$$

$$+\left[\frac{(32\alpha+128\beta)\,x-(64\alpha+128\beta)x^3}{3\alpha+14\beta}\right]u\left(\frac{1}{2},t\right)+2x\,\frac{8x^2-1}{3\alpha+14\beta}F_{\text{гр3}}(t),$$

а выражение для приближенного вычисления значений функции:

$$u(x,t)=\left[\frac{4(3\alpha+8\beta)x^4-(15\alpha+64\beta)\,x^2}{3\alpha+14\beta}\right]u(0,t)+$$

$$+\left[\frac{(16\alpha+64\beta)x^2-(16\alpha+32\beta)x^4}{3\alpha+14\beta}\right]u\left(\frac{1}{2},t\right)+x^2\,\frac{4x^2-1}{3\alpha+14\beta}F_{\text{гр3}}(t)+u(0,t). \qquad (12)$$

После подстановки соответствующих значений убеждаемся, что в точках $x = 0$ и $x = 1/2$ из выражения (12) можно получить соответственно значения $u\,(0, t)$ и $u\,(1/2, t)$.

Подставив в (1) выражение частной производной (11), получим

$$\frac{\partial u\,(x,t)}{\partial t} = \frac{a^2(x)}{3\alpha + 14\beta}\Big[(48\,(3\alpha + 8\beta)\,x^2 - 30\alpha - 128\beta)\,u\,(0,t) +$$

$$+32\,(\alpha + 4\beta - 6\,(\alpha + 2\beta)\,x^2)\;u\left(\frac{1}{2}, t\right) + 2\,(24x^2 - 1)\,F_{\text{гр3}}(t)\Big] + f\,(x,t)\,. \qquad (13)$$

Для определения искомых функций $u\,(0, t)$ и $u\,(1/2, t)$ необходимо подставить в (13) по очереди $x = 0$ и $x = 1/2$, получить систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и решить ее.

Формула аппроксимации частных производных и дифференциальные уравнения, полученные для задач с граничными условиями третьего рода, являются наиболее общими. Полагая $\beta = 0$ или $\alpha = 0$, из них определяют соответствующие выражения для задач с граничными условиями первого и второго рода, совпадающие с (4) и (7).

Исследование нестационарных тепловых процессов в неограниченной пластине с симметричными граничными условиями первого рода. Имеется неограниченная пластина толщиной $2R$ (рис. 1) с коэффициентом теплопроводности, зависящим от координаты x. Температура на границах пластины принудительно меняется по закону, заданному функцией времени $F_{\text{гр1}}(t)$. Внутри пластины действует источник тепла, мощность которого пропорциональна $f(t)$. В начальный момент времени задано распределение температуры по толщине. Необходимо найти распределение температуры в любой точке по толщине в любой момент времени.

В этом случае нестационарный тепловой процесс описывается одномерным уравнением теплопроводности (1), где коэффициент теплопроводности имеет вид

$$a^2(x) = \frac{b_2(a_0 - a_2 x^2)}{2a_2},\;\; a_0 - a_2 x^2 > 0,\;\; 0 < a_2 \le a_0,\;\; b_2 > 0,$$

а внутренний источник тепла $f\,(t) = b_1 e^{-b_1 t}$.

Для уравнения (1) заданы граничные условия,

$$T(x,t)|_{x=\pm 1} = F_{\text{гр1}}(t) = 1 - e^{-b_1 t} + (a_0 - a_2)\,e^{-b_2 t}\,,$$

и начальное условие

$$T(x,t)|_{t=0} = a_0 - a_2 x^2. \qquad (14)$$

Задача (1) имеет точное аналитическое решение:

$$T(x,t) = 1 - e^{-b_1 t} + (a_0 - a_2 x^2)\, e^{-b_2 t}.$$

Решение задачи будем искать методом сечений. Заменив в (1) частную производную второго порядка по пространственной переменной выражением (4), запишем:

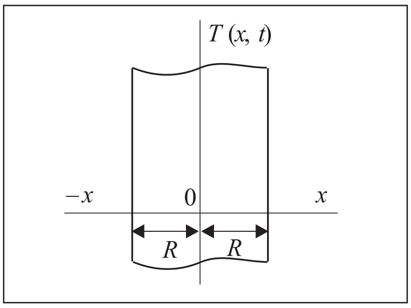

Рис. 1. Схематическое изображение объекта моделирования

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a^2(x)\left[(48x^2 - 10)\,T(0,t) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{32}{3} - 64x^2\right) T\left(\frac{1}{2}, t\right) + \left(16x^2 - \frac{2}{3}\right) F_{\text{гр}1}(t)\right] + f\,(x,t).$$

Полагая последовательно $x = 0$ и $x = 1/2$, получаем систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений для определения величин $T(0,t)$ и $T(1/2,t)$:

$$\frac{\partial T(0,t)}{\partial t} + a^2(0)\left[10T(0,t) - \frac{32}{3} T\left(\frac{1}{2}, t\right)\right] = -\frac{2}{3} a^2(0)\, F_{\text{гр}1}(t) + f\,(0,\, t),$$

$$\frac{\partial T\left(\frac{1}{2}, t\right)}{\partial t} + a^2\left(\frac{1}{2}\right)\left[-2T(0,t) + \frac{16}{3} T\left(\frac{1}{2}, t\right)\right] = \frac{10}{3} a^2\left(\frac{1}{2}\right) F_{\text{гр}1}(t) + f\left(\frac{1}{2}, t\right). \qquad (15)$$

Для уравнений (15) задаем соответствующие начальные условия, полученные из (14):

$$T(0,t)|_{t=0} = a_0,\; T(1/2,t)|_{t=0} = a_0 - (a_2/4). \qquad (16)$$

Решив систему (15), с учетом формулы (3) получим возможность вычислить значения функции $T\,(x,\, t)$ в любой точке:

$$T(x,t) = (4x^4 - 5x^2 + 1)\,T(0,t) +$$

$$+ \frac{16}{3} x^2 (1 - x^2)\, T\left(\frac{1}{2}, t\right) + \frac{1}{3} x^2 (4x^2 - 1)\, F_{\text{гр}1}(t). \qquad (17)$$

Уравнение (17) и система (15) могут быть решены при любых имеющих физический смысл значениях $a^2(x)$, $F_{\text{гр}1}(t)$, $f(x,t)$. Для примера выберем следующие значения коэффициентов: $a_0 = 2$; $a_2 = 0{,}5$; $b_1 = 0{,}1$; $b_2 = 0{,}5$. Тогда $a^2(0) = 1$; $a^2(1/2) = 15/16$; $f\,(0,t) = f\,(1/2,t) = 0{,}1b^{-0,1t}$; $F_{\text{гр}1}(t) = 1 - e^{-0,1t} + 1{,}5e^{-0,5t}$.

При выбранных коэффициентах система (15) примет вид

$$\frac{\partial T\,(0,t)}{\partial t} = -10T\,(0,t) + \frac{32}{3}T\left(\frac{1}{2},t\right) - \frac{2}{3} + \frac{23}{30}e^{-0,1t} - e^{-0,5t},$$
$$\frac{\partial T\left(\frac{1}{2},t\right)}{\partial t} = \frac{15}{8}T\,(0,t) - 5T\left(\frac{1}{2},t\right) + \frac{25}{8} + 3\;\frac{1}{40}e^{-0,1t} + \frac{75}{16}e^{-0,5t}. \qquad (18)$$

Полученная система (18) численно решена с помощью стандартного решателя в среде Matlab. Дискретизация по времени и пространственной координате проведена соответственно с шагом 0,0001 и 0,05. Полученные результаты использованы для численного решения в любой пространственной координате и в любой момент времени с помощью формулы (17), которая с учетом заданных коэффициентов имеет вид

$$T(x,t) = (4x^4 - 5x^2 + 1)\,T(0,t) +$$
$$+\frac{16}{3}x^2(1-x^2)\,T\left(\frac{1}{2},t\right) + \frac{1}{3}x^2(4x^2-1)(1-e^{-0,1t} + 1{,}5e^{-0,5t}).$$

Результаты вычислительного эксперимента представлены на рис. 2 (см. вклейку). При сравнении численного решения с аналитическим получена величина относительной погрешности $\delta\,(t,x)$ (рис. 3, см. вклейку).

Выводы

Аппроксимация дифференциального уравнения в частных производных системой обыкновенных дифференциальных уравнений позволила существенно упростить вычислительный алгоритм при условии обеспечения приемлемой точности решения.

С помощью предлагаемого метода получено решение рассматриваемой модельной задачи с погрешностью, не превышающей 0,05 %, что вполне приемлемо для выполнения инженерных расчетов в практических задачах. Умеренная точность компенсируется универсальностью полученных выражений, в которых учтены симметричные граничные условия первого, второго и третьего рода. Предлагаемый метод может быть эффективен в случае ограниченных вычислительных ресурсов, а также в задачах, требующих сверхбыстрого получения решений.

The method for studying of the dynamics of transient thermal processes, which takes into account the symmetric boundary conditions, is considered in the article.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Верлань А.Ф., Горошко И.О., Николаенко Ю.Е.* Компьютерное моделирование процессов передачи тепла в перспективных базовых несущих конструкциях стоечного типа с тепловыми трубами // Математичні машини і системи. — 2008. — № 2. — С. 90—99.
2. *Верлань А.Ф., Евдокимов В.Ф.* Электронное моделирование передаточных функций. — Київ : Техніка, 1970. — 232 с.
3. *Норри Д., де Фриз Ж.* Введение в метод конечных элементов: Пер с англ. — М. : Мир, 1981. — 304 с.

Поступила 22.04.14

ФЕДОРЧУК Владимир Анатольевич, д-р техн. наук, зав. кафедрой информатики Каменец-Подольского национального университета им. Ивана Огиенко. В 1984 г. окончил Каменец-Подольский государственный педагогический ин-т. Область научных исследований — математическое моделирование неоднородных электромеханических систем и объектов с распределенными параметрами.

МАХОВИЧ Александр Иванович, аспирант Каменец-Подольского национального университета им. Ивана Огиенко. В 1995 г. окончил Каменец-Подольский государственный педагогический ин-т. Область научных исследований — математическое моделирование объектов с распределенными параметрами, программирование.