



УДК 051.3

В.В. Аристов, канд. техн. наук

Ин-т проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины
(Украина, 03164, Киев, ул. Генерала Наумова, 15,
тел. (044) 4243251, e-mail: vasily@aristov.com)

Модель многошаговых разностно-дифференциальных формул интегрирования с учетом влияния участка разгона

Предложена расширенная математическая модель многошаговых разностно-дифференциальных формул численного интегрирования для анализа влияния участков разгона на решение системы однородных дифференциальных уравнений. Разработан алгоритм их преобразования в эквивалентные по поведению одношаговые численные формулы. Предложены методы преобразования расширенной блочной матрицы в системную матрицу общей аналитической модели.

Запропоновано розширену математичну модель багатокрокових різницево-диференціальних формул чисельного інтегрування для аналізу впливу ділянок розгону на рішення систем однорідних диференціальних рівнянь. Розроблено алгоритм їх перетворення в еквівалентні по поведінці однокрокові чисельні формули. Запропоновано методи перетворення розширеної блокової матриці в системну матрицю загальної аналітичної моделі.

К л ю ч е в ы е с л о в а: численное интегрирование, многошаговые формулы интегрирования, передаточные функции, участок разгона, расширенная матрица, собственные числа, кольцевой тест.

Один из существенных параметров при выборе численного метода решения задачи Коши — объем вычислений правых частей системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Наиболее экономичными являются варианты на основе многошаговых прогнозирующих и корректирующих формул численного интегрирования (ФЧИ) [1]. Их общий недостаток — наличие участка разгона, что усложняет алгоритм, и может быть источником существенной дополнительной погрешности, частично или полностью искажающей результат решения задачи.

Полагая шаг интегрирования H постоянным, запишем общее представление ФЧИ в следующем виде:

$$y_{i+1} = \sum_{v=1}^n a_v y_{i+1-v} + \sum_{s=0}^m \sum_{l=l_0}^n c_{sl} H^{s+1} f_{i+1-l}^{(s)}, \quad (1)$$

© В.В. Аристов, 2013

где a_ν и c_{sl} — весовые коэффициенты соответственно для значений интеграла $y_{i+1-\nu}$ и производных $f_{i+1-l}^{(s)}$ при квантованных значениях независимой переменной $x = x_0 + (i+1-l)H$; \bar{n} и $(n-l_0)$ — число шагов H по независимой переменной, на интервалах которой должны быть определены соответственно значения интеграла и подынтегральной функции с ее m производными; l_0 — число шагов H назад от $(i+1)$ -й точки квантования (для явных формул $l_0 > 0$, а для неявных — $l_0 \leq 0$).

Будем рассматривать неявные ФЧИ только при $l_0 = 0$. Вариант (1) при $m > 0$ назовем разностно-дифференциальной формулой (РДФ), а без учета производных от подынтегральной функции

$$y_{i+1} = \sum_{\nu=1}^{\bar{n}} a_\nu y_{i+1-\nu} + H \sum_{l=l_0}^n c_{0l} f_{i+1-l}, \quad (2)$$

т.е. при $m = 0$, — разностной формулой (РФ).

Будем различать варианты **F**-интегрирования и **A**-интегрирования, так как передаточные функции могут быть различными: **F**-интегрирование соответствует случаю численного интегрирования независимой функции (системы функций) **F**, т.е. $f(x) = F(x)$, $f^{(k)}(x) = \mathbf{F}^{(k)}(x)$, а **A**-интегрирование — варианту решения системы однородных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{A}\mathbf{Y}, \quad \mathbf{Y}(x_0) = \mathbf{Y}_0, \quad (3)$$

с постоянными коэффициентами a_{ij} матрицы **A**, а именно $f(x) = \mathbf{A}\mathbf{Y}(x)$, $f^{(k)}(x) = \mathbf{A}^{(k+1)}\mathbf{Y}(x)$.

Прямая передаточная функция [1, 2] формулы (2) в дробно-рациональной записи имеет вид

$$S_0(p) = p \frac{\sum_{l=0}^n c_{0l} e^{p(1-l)}}{e^p - \sum_{\nu=1}^n a_\nu e^{p(1-\nu)}}$$

независимо от варианта интегрирования **A** или **F**. В случае РДФ подобное соотношение,

$$S_0(p) = p \frac{\sum_{l=0}^n \sum_{s=0}^m c_{sl} p^s e^{p(1-l)}}{e^p - \sum_{\nu=1}^n a_\nu e^{p(1-\nu)}},$$

записывается только для **F**-интегрирования. Общие формулы коэффициентов в обоих случаях интегрирования для любой многошаговой ФЧИ при каноническом представлении передаточных функций приведены в работах [2, 3].

По прямой передаточной функции $S_0(p)$ можно найти системную передаточную функцию

$$R_0(p) = \left[\frac{1}{S_0(p)} \right]^{-1} \quad (4)$$

на основе операций инверсии и обращения прямой. Передаточная функция (4) позволяет в области сходимости степенного ряда определить матрицу \mathbf{B}_0 новой системы ОДУ, решение которой в точках квантования $x = x_0 + (iH)$ эквивалентно результату численного интегрирования системы (3)

$$\bar{\mathbf{Y}}' = \mathbf{B}_0 \bar{\mathbf{Y}}, \quad \bar{\mathbf{Y}}(x_0) = \mathbf{Y}_0, \quad (5)$$

где

$$\mathbf{B}_0(\mathbf{A}, H, R_0(p)) = \mathbf{A} R_0(p)|_{p=H\mathbf{A}} = \sum_{r=0}^{\infty} \rho_r H^r \mathbf{A}^{r+1}. \quad (6)$$

В табл. 1 приведены коэффициенты a_v и c_{sl} для ряда многошаговых ФЧИ с различной локальной погрешностью $O(H)$. На рис. 1 в виде окружности, обозначенной 0, представлена в полярных координатах траектория результата решения различными методами 1 — 5 системы (3) с матрицей второго порядка

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad (7)$$

называемой «кольцевой тест». Аналитическим решением системы (3) при начальном векторе с компонентами $y_1(0) = 1$ и $y_2(0) = 0$ является функция $y_1(x) = \cos(x)$, а систем (5) и (6) с указанной матрицей \mathbf{A} — точное соотношение

$$y_1(x) = e^{\beta x} \cos(\xi x), \quad (8)$$

где

$$\beta = \sum_{r=1}^{\infty} \rho_{2r-1} H^{2r-1} (-1)^{r-1}, \quad \xi = \sum_{r=0}^{\infty} \rho_{2r} H^{2r} (-1)^r.$$

Приближенные значения y_1 для каждого метода при $H = 1/4$ приведены в табл. 1. Поскольку указанные ФЧИ достаточно высокоточные, возможная

Таблица 1

| Номер метода | Значение a_i при ν | | | | Значение c_{si} при l | | | | | $O(H)$ | Кольцевой тест |
|--------------|--------------------------|---|---|---|---------------------------|------------------------|-------------------|------------------------|--------------------------|--|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | | |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | $\frac{8}{3}$ | $-\frac{4}{3}$ | $\frac{8}{3}$ | 0 | $-\frac{14H^5}{45}y^{(5)}(x_g)$ | $y_1 \approx \cos(0,9996862938x)$ |
| 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | $\frac{251}{720}$ | $\frac{323}{360}$ | $-\frac{11}{30}$ | $\frac{53}{360}$ | $-\frac{19}{720}$ | $\frac{3H^6}{160}y^{(6)}(x_g)$ | $y_1 \approx e^{-0,00001738x} \cos(1,000005542x)$ |
| 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{55}{24}$ | $-\frac{59}{24}$ | $\frac{37}{24}$ | $-\frac{3}{8}$ | $\frac{251H^5}{720}y^{(5)}(x_g)$ | $y_1 \approx e^{-0,0005066x} \cos(0,99875297x)$ |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | $\frac{895721}{2488320}$ | $\frac{91501}{155520}$ | $\frac{163}{360}$ | $\frac{38131}{155520}$ | $\frac{258071}{2488320}$ | $\frac{419H^{11}}{179625600}y^{(11)}(x_g)$ | $y_1 \approx e^{3,26 \cdot 10^{-13}x} \cos(1,000000000000125x)$ |
| 5 | 1 | 0 | 0 | 0 | $\frac{3}{8}$ | $\frac{19}{24}$ | $-\frac{5}{24}$ | $\frac{1}{24}$ | 0 | $\frac{19H^5}{720}y^{(5)}(x_g)$ | $y_1 \approx e^{0,00002015x} \cos(1,000100753x)$ |

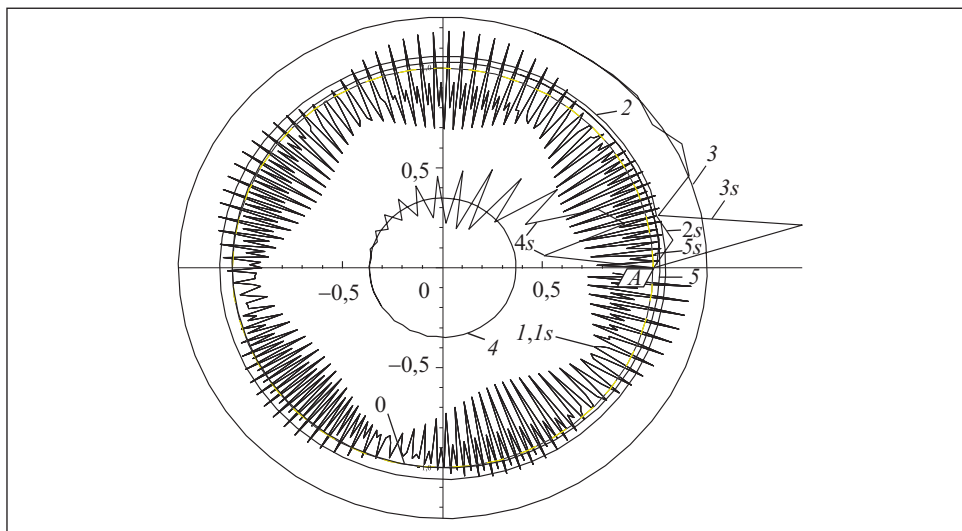


Рис. 1. Графики решений системы ОДУ (3) многошаговыми ФЧИ (см. табл. 1) при согласованном (0) и несогласованном (1–5) разгоне: 1 — четырехшаговая явная РФ Милна; 2 и 3 — четырехшаговые неявная и явная РФ Адамса; 4 — четырехшаговая неявная РФ; 5 — трехшаговая неявная РФ Адамса; 1s — 5s — стартовые участки

амплитудная погрешность решения ОДУ (3), зависящая от нечетных коэффициентов ρ_{2r-1} ряда (6), визуально будет заметна на графике 0 только через достаточно большое число периодов. В методе 1 данный вид погрешности решения отсутствует, так как все нечетные коэффициенты равны нулю. Изменение частоты колебаний в результате влияния методической погрешности ФЧИ зависит от четных коэффициентов ρ_{2r} и на рис. 1 не отображено.

Поскольку ФЧИ имеют различные передаточные функции, эквивалентные матрицы $\mathbf{B}_0(H)$ для каждого шага H также различны. Поэтому должны быть различными и значения вектора решения (8). При этом расхождение с аналитически точным решением ОДУ (3) увеличивается при возрастании значения H .

Для одношаговых РФ и РФ соотношения (5) и (6) однозначно описывают поведение вектора решения системы (3) при численном интегрировании соответствующей ФЧИ. Для многошаговых РФ и РФ эта однозначность отсутствует. Условием адекватности в точках квантования аналитического решения численному для многошаговых ФЧИ является выбор согласованного участка разгона. Далее без потери общности будем считать, что в формулах (1), (2) $n = \bar{n}$ и участок разгона n -шаговой ФЧИ расположен в пределах сетки аргумента $\{x_0 - (n-1)H \div x_0\}$.

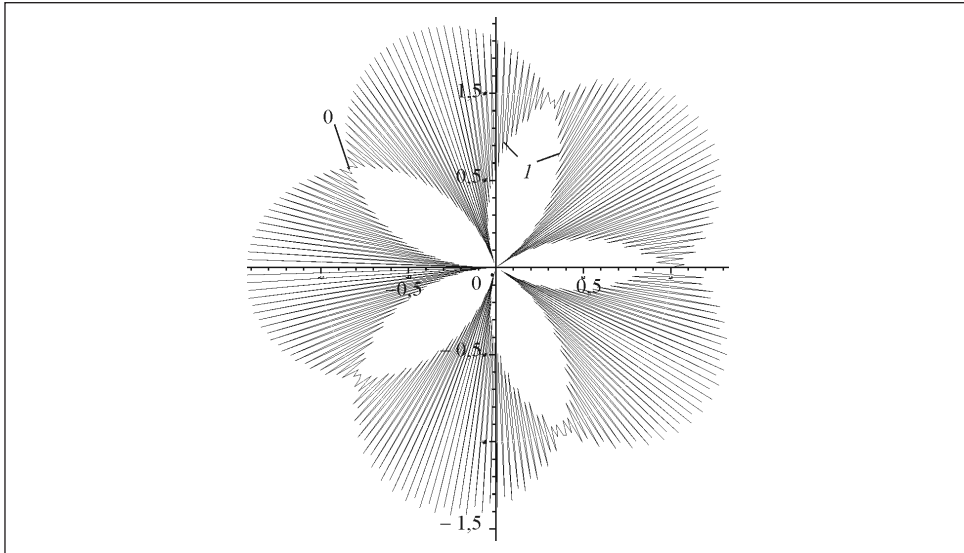


Рис. 2. Графики решений системы (3) методом 1 (см. рис. 1) при согласованном (0) и несогласованном (1) разгоне

Под согласованным участком разгона при \mathbf{A} -интегрировании понимаем такой выбор значений $\{\mathbf{Y}_{1-n}, \mathbf{Y}_{2-n}, \dots, \mathbf{Y}_{-1}\}$, при котором $\mathbf{Y}_{j-n} = e^{\mathbf{B}H(j-n)} \mathbf{Y}_0$. Если участок разгона не согласован с указанным требованием, то решение системы (3) может принимать экзотический вид, варианты которого для методов 1—5 приведены на рис. 1.

При изменении значений вектора решения на участке разгона может существенно измениться и все решение. Так, для метода 1 при шаге $H = 1/64$ и значениях вектора на участке разгона $\left\{ \begin{pmatrix} 0,7 \\ -0,3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0,1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,9 \\ -0,1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ решение соответствует графику 1 на рис. 1, при $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ — графику 1 на рис. 2. Разгон становится согласованным при значениях вектора

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0,9989015683 \\ -0,046857835 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,9995117585 \\ -0,031244913 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,9998779322 \\ -0,015624364 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

и графически соответствует идеальной единичной окружности 0 на рис. 1 и 2. Несогласованность разгона вызывает не всегда затухающий переходной колебательный процесс после участков разгона $2s—5s$ (см. рис. 1) и эффект изменения начального вектора \mathbf{Y}_0 в ОДУ (2) и (5). Поэтому траек-

тории решений 2—5 после переходных процессов 2s—5s не совпадают с единичной окружностью 0.

При практическом использовании многошаговых ФЧИ для организации численного решения систем дифференциальных уравнений обычно на участке разгона применяют какой-либо одношаговый метод, например Рунге—Кутты, того же порядка, что и основные формулы. В большинстве случаев этого достаточно, чтобы эффект рассогласования оказался незначительным. Однако принципиально он существует и может вызвать дополнительную потерю точности или сложность в получении достоверного решения.

Постановка задачи. Разработать математические модели для адекватного представления многошаговых РФ и РДФ (алгоритмов) численного интегрирования ОДУ с учетом информации на участке разгона.

Применим следующий алгоритм решения задачи: заменим многошаговые РДФ эквивалентными одношаговыми блочного типа, а затем найдем системную матрицу расширенной системы ОДУ с учетом участка разгона.

Эквивалентное преобразование многошаговых РДФ в одношаговые. Поскольку РФ (2) — частный случай РДФ (1), примем за основу формулу (1), и для варианта **A**-интегрирования системы ОДУ (3) представим ее в матрично-векторной форме, учитывая, что $\mathbf{f}_{i+1-l}^{(s)} = \mathbf{A}^{s+1} \mathbf{Y}_{i+1-l}$ и полагая $\bar{n} = n$:

$$\mathbf{Y}_{i+1} = \sum_{s=0}^m c_{s0} H^{s+1} \mathbf{A}^{s+1} \mathbf{Y}_{i+1} + \sum_{l=1}^n a_l \mathbf{Y}_{i+1-l} + \sum_{l=1}^n \sum_{s=0}^m c_{sl} H^{s+1} \mathbf{A}^{s+1} \mathbf{Y}_{i+1-l}.$$

Выполнив группирование

$$\left(\mathbf{E} - \sum_{s=0}^m c_{s0} H^{s+1} \mathbf{A}^{s+1} \right) \mathbf{Y}_{i+1} = \sum_{l=1}^n \left(a_l \mathbf{E} + \sum_{s=0}^m c_{sl} H^{s+1} \mathbf{A}^{s+1} \right) \mathbf{Y}_{i+1-l},$$

получим

$$\mathbf{Y}_{i+1} = \left(\mathbf{E} - \sum_{s=0}^m c_{s0} H^{s+1} \mathbf{A}^{s+1} \right)^{-1} \sum_{l=1}^n \left(a_l \mathbf{E} + \sum_{s=0}^m c_{sl} H^{s+1} \mathbf{A}^{s+1} \right) \mathbf{Y}_{i+1-l}.$$

Изменив порядок суммирования по i , запишем

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{i+1} = & \left(\mathbf{E} - \sum_{s=0}^m c_{s0} H^{s+1} \mathbf{A}^{s+1} \right)^{-1} \left[\left(a_n \mathbf{E} + \sum_{s=0}^m c_{sn} H^{s+1} \mathbf{A}^{s+1} \right) \mathbf{Y}_{i+1-n} + \dots \right. \\ & \left. \dots + \left(a_1 \mathbf{E} + \sum_{s=0}^m c_{s1} H^{s+1} \mathbf{A}^{s+1} \right) \mathbf{Y}_i \right]. \end{aligned}$$

Обозначив

$$\widehat{\mathbf{G}}_R = \left(\mathbf{E} - \sum_{s=0}^m c_{s0} H^{s+1} \mathbf{A}^{s+1} \right)^{-1}, \quad \overline{\mathbf{G}}_{1,n+1-l} = \widehat{\mathbf{G}}_R \left(a_l \mathbf{E} + \sum_{s=0}^m c_{sl} H^{s+1} \mathbf{A}^{s+1} \right),$$

при

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{G}}_{1,1} &= \widehat{\mathbf{G}}_R \left(a_n \mathbf{E} + \sum_{s=0}^m c_{sn} H^{s+1} \mathbf{A}^{s+1} \right), \quad \overline{\mathbf{G}}_{1,2} = \widehat{\mathbf{G}}_R \left(a_{n-1} \mathbf{E} + \sum_{s=0}^m c_{s,n-1} H^{s+1} \mathbf{A}^{s+1} \right), \\ \overline{\mathbf{G}}_{1,3} &= \widehat{\mathbf{G}}_R \left(a_{n-2} \mathbf{E} + \sum_{s=0}^m c_{s,n-2} H^{s+1} \mathbf{A}^{s+1} \right), \dots \\ \dots, \overline{\mathbf{G}}_{1,n-1} &= \widehat{\mathbf{G}}_R \left(a_2 \mathbf{E} + \sum_{s=0}^m c_{s2} H^{s+1} \mathbf{A}^{s+1} \right), \\ \overline{\mathbf{G}}_{1,n} &= \widehat{\mathbf{G}}_R \left(a_1 \mathbf{E} + \sum_{s=0}^m c_{s1} H^{s+1} \mathbf{A}^{s+1} \right) \end{aligned}$$

получим соотношение для вектора \mathbf{Y}_{i+1} как функцию от дискретных значений вектора в предыдущих точках:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{i+1} &= \sum_{l=1}^n \overline{\mathbf{G}}_{1,l} \mathbf{Y}_{i-n+1} = \overline{\mathbf{G}}_{1,1} \mathbf{Y}_{i-n+1} + \overline{\mathbf{G}}_{1,2} \mathbf{Y}_{i-n+2} + \overline{\mathbf{G}}_{1,3} \mathbf{Y}_{i-n+3} + \dots \\ &\dots + \overline{\mathbf{G}}_{1,n-1} \mathbf{Y}_{i-1} + \overline{\mathbf{G}}_{1,n} \mathbf{Y}_i. \end{aligned}$$

Поскольку во все матричные выражения входит только исходная матрица \mathbf{A} и единичная диагональная \mathbf{E} , все новые матрицы \mathbf{G}_k будут взаимно перестановочными. Найдем соотношение для \mathbf{Y}_{i+2} :

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{i+2} &= \sum_{l=1}^n \overline{\mathbf{G}}_{1,l} \mathbf{Y}_{i+1-n+l} = \sum_{l=1}^{n-1} \overline{\mathbf{G}}_{1,l} \mathbf{Y}_{i+1-n+l} + \overline{\mathbf{G}}_{1,n} \mathbf{Y}_{i+1} = \\ &= \overline{\mathbf{G}}_{1,1} \mathbf{Y}_{i-n+2} + \overline{\mathbf{G}}_{1,2} \mathbf{Y}_{i-n+3} + \overline{\mathbf{G}}_{1,3} \mathbf{Y}_{i-n+4} + \dots + \overline{\mathbf{G}}_{1,n-1} \mathbf{Y}_i + \overline{\mathbf{G}}_{1,n} \mathbf{Y}_{i+1} = \\ &= \overline{\mathbf{G}}_{1,1} \mathbf{Y}_{i-n+2} + \overline{\mathbf{G}}_{1,2} \mathbf{Y}_{i-n+3} + \dots + \overline{\mathbf{G}}_{1,n-2} \mathbf{Y}_{i-1} + \overline{\mathbf{G}}_{1,n-1} \mathbf{Y}_i + \\ &+ \overline{\mathbf{G}}_{1,n} (\overline{\mathbf{G}}_{1,1} \mathbf{Y}_{i-n+1} + \overline{\mathbf{G}}_{1,2} \mathbf{Y}_{i-n+2} + \overline{\mathbf{G}}_{1,3} \mathbf{Y}_{i-n+3} + \dots + \overline{\mathbf{G}}_{1,n-1} \mathbf{Y}_{i-1} + \overline{\mathbf{G}}_{1,n} \mathbf{Y}_i), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{i+2} &= \sum_{l=1}^n \overline{\mathbf{G}}_{2,l} \mathbf{Y}_{i-n+l} = \overline{\mathbf{G}}_{2,1} \mathbf{Y}_{i-n+1} + \overline{\mathbf{G}}_{2,2} \mathbf{Y}_{i-n+2} + \\ &+ \overline{\mathbf{G}}_{2,3} \mathbf{Y}_{i-n+3} + \dots + \overline{\mathbf{G}}_{2,n-1} \mathbf{Y}_{i-1} + \overline{\mathbf{G}}_{2,n} \mathbf{Y}_i, \end{aligned}$$

где $\overline{\mathbf{G}}_{2,1} = \overline{\mathbf{G}}_{1,n} \overline{\mathbf{G}}_{1,1}$, $\overline{\mathbf{G}}_{2,2} = \overline{\mathbf{G}}_{1,n} \overline{\mathbf{G}}_{1,2} + \overline{\mathbf{G}}_{1,1}$, $\overline{\mathbf{G}}_{2,3} = \overline{\mathbf{G}}_{1,n} \overline{\mathbf{G}}_{1,3} + \overline{\mathbf{G}}_{1,2}$, ..., $\overline{\mathbf{G}}_{2,n-1} = \overline{\mathbf{G}}_{1,n} \overline{\mathbf{G}}_{1,n-1} + \overline{\mathbf{G}}_{1,n-2}$, $\overline{\mathbf{G}}_{2,n} = \overline{\mathbf{G}}_{1,n} \overline{\mathbf{G}}_{1,n} + \overline{\mathbf{G}}_{1,n-1}$. Введя нулевую матрицу $\overline{\mathbf{G}}_{1,0} = \mathbf{0}$, запишем выражение для матриц $\overline{\mathbf{G}}_{2,l}$: $\overline{\mathbf{G}}_{2,l} = \overline{\mathbf{G}}_{1,l-1} + \overline{\mathbf{G}}_{1,n} \overline{\mathbf{G}}_{1,l}$. Итак, соотношение для \mathbf{Y}_{i+2} принимает вид

$$\mathbf{Y}_{i+2} = \sum_{l=1}^n \overline{\mathbf{G}}_{2,l} \mathbf{Y}_{i-n+l}.$$

Соотношение для следующего шага,

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{i+3} = \sum_{l=1}^n \overline{\mathbf{G}}_{2,l} \mathbf{Y}_{i+1-n+l} &= \overline{\mathbf{G}}_{2,1} \mathbf{Y}_{i+1-n+l} + \overline{\mathbf{G}}_{2,2} \mathbf{Y}_{i+1-n+2} + \overline{\mathbf{G}}_{2,3} \mathbf{Y}_{i+1-n+3} + \dots \\ &\dots + \overline{\mathbf{G}}_{2,n-1} \mathbf{Y}_i + \overline{\mathbf{G}}_{2,n} \mathbf{Y}_{i+1}, \end{aligned}$$

находим, используя соотношение для предыдущего шага, из которого аналогично предыдущему получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{i+3} &= \overline{\mathbf{G}}_{2,1} \mathbf{Y}_{i-n+2} + \overline{\mathbf{G}}_{2,2} \mathbf{Y}_{i-n+3} + \overline{\mathbf{G}}_{2,3} \mathbf{Y}_{i-n+4} + \dots + \overline{\mathbf{G}}_{2,n-1} \mathbf{Y}_i + \\ &+ \overline{\mathbf{G}}_{2,n} (\overline{\mathbf{G}}_{1,1} \mathbf{Y}_{i-n+1} + \overline{\mathbf{G}}_{1,2} \mathbf{Y}_{i-n+2} + \overline{\mathbf{G}}_{1,3} \mathbf{Y}_{i-n+3} + \dots + \overline{\mathbf{G}}_{1,n-1} \mathbf{Y}_{i-1} + \overline{\mathbf{G}}_{1,n} \mathbf{Y}_i), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{i+3} &= \sum_{l=1}^n \overline{\mathbf{G}}_{3,l} \mathbf{Y}_{i-n+l} = \overline{\mathbf{G}}_{3,1} \mathbf{Y}_{i-n+l} + \overline{\mathbf{G}}_{3,2} \mathbf{Y}_{i-n+2} + \overline{\mathbf{G}}_{3,3} \mathbf{Y}_{i-n+3} + \dots \\ &\dots + \overline{\mathbf{G}}_{3,n-1} \mathbf{Y}_{i-1} + \overline{\mathbf{G}}_{3,n} \mathbf{Y}_i. \end{aligned}$$

Введя нулевую матрицу $\overline{\mathbf{G}}_{2,0} = \mathbf{0}$, запишем выражение для матриц $\overline{\mathbf{G}}_{3,l}$: $\overline{\mathbf{G}}_{3,l} = \overline{\mathbf{G}}_{2,l-1} + \overline{\mathbf{G}}_{2,n} \overline{\mathbf{G}}_{1,l}$. Аналогично для n -го шага получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{i+n} &= \sum_{l=1}^n \overline{\mathbf{G}}_{n,l} \mathbf{Y}_{i-n+l} = \overline{\mathbf{G}}_{n,1} \mathbf{Y}_{i-n+l} + \overline{\mathbf{G}}_{n,2} \mathbf{Y}_{i-n+2} + \overline{\mathbf{G}}_{n,3} \mathbf{Y}_{i-n+3} + \dots \\ &\dots + \overline{\mathbf{G}}_{n,n-1} \mathbf{Y}_{i-1} + \overline{\mathbf{G}}_{n,n} \mathbf{Y}_i. \end{aligned}$$

При $\overline{\mathbf{G}}_{n-1,0} = \mathbf{0}$ запишем выражение для матриц $\overline{\mathbf{G}}_{n,l}$:

$$\overline{\mathbf{G}}_{n,l} = \overline{\mathbf{G}}_{n-1,l-1} + \overline{\mathbf{G}}_{n-1,n} \overline{\mathbf{G}}_{1,l}.$$

Одна j -я блочная итерация с шагом nH содержит последовательность n i -х итераций с шагом H . Итак, выражения для блочных итераций имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{i+1} &= \sum_{l=1}^n \overline{\mathbf{G}}_{1,l} \mathbf{Y}_{i-n+l}, \mathbf{Y}_{i+2} = \sum_{l=1}^n \overline{\mathbf{G}}_{2,l} \mathbf{Y}_{i-n+l}, \mathbf{Y}_{i+3} = \sum_{l=1}^n \overline{\mathbf{G}}_{3,l} \mathbf{Y}_{i-n+l}, \dots \\ &\dots, \mathbf{Y}_{i+n} = \sum_{l=1}^n \overline{\mathbf{G}}_{n,l} \mathbf{Y}_{i-n+l}. \end{aligned}$$

Прибавим и вычтем из каждого уравнения для Y_{i+k} значение Y_{i+k-n} , а также умножим и разделим на nH . Тогда

$$\begin{aligned}
 Y_{i+1} &= Y_{i-n+1} + nH((\bar{G}_{1,1} - E)Y_{i-n+1} + \bar{G}_{1,2}Y_{i-n+2} + \bar{G}_{1,3}Y_{i-n+3} + \dots \\
 &\quad \dots + \bar{G}_{1,n-1}Y_{i-1} + \bar{G}_{1,n}Y_i) / nH, \\
 Y_{i+2} &= Y_{i-n+2} + nH(\bar{G}_{2,1}Y_{i-n+1} + (\bar{G}_{2,2} - E)Y_{i-n+2} + \bar{G}_{2,3}Y_{i-n+3} + \dots \\
 &\quad \dots + \bar{G}_{2,n-1}Y_{i-1} + \bar{G}_{2,n}Y_i) / nH, \\
 Y_{i+3} &= Y_{i-n+3} + nH(\bar{G}_{3,1}Y_{i-n+1} + \bar{G}_{3,2}Y_{i-n+2} + (\bar{G}_{3,3} - E)Y_{i-n+3} + \dots \\
 &\quad \dots + \bar{G}_{3,n-1}Y_{i-1} + \bar{G}_{3,n}Y_i) / nH, \dots, \\
 Y_{i+n} &= Y_i + nH(\bar{G}_{n,1}Y_{i-n+1} + \bar{G}_{n,2}Y_{i-n+2} + \bar{G}_{n,3}Y_{i-n+3} + \dots \\
 &\quad \dots + \bar{G}_{n,n-1}Y_{i-1} + (\bar{G}_{n,n} - E)Y_i) / nH.
 \end{aligned}$$

Запишем блочную итерацию в виде $W_{j+1} = \bar{G}W_j$, где W_j — расширенный блочный вектор, в качестве компонентов содержащий n векторов Y_{i-n+l} ,

$$\begin{aligned}
 W_j &= |Y_{i+1-n} \quad Y_{i+2-n} \quad Y_{i+3-n} \quad \dots \quad Y_{i-1} \quad Y_i|^T, \\
 W_{j+1} &= |Y_{i+1} \quad Y_{i+2} \quad Y_{i+3} \quad \dots \quad Y_{i+n-1} \quad Y_{i+n}|^T; \tag{9}
 \end{aligned}$$

\bar{G} — расширенная блочная матрица,

$$\bar{G} = \begin{vmatrix} \bar{G}_{1,1} & \bar{G}_{1,2} & \dots & \bar{G}_{1,n} \\ \bar{G}_{2,1} & \bar{G}_{2,2} & \dots & \bar{G}_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{G}_{n,1} & \bar{G}_{n,2} & \dots & \bar{G}_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Выполним эквивалентные преобразования блочного уравнения

$$\begin{aligned}
 W_{j+1} &= \bar{G}W_j + W_j - EW_j = W_j + (\bar{G} - E)W_j = \\
 &= W_j + nH(\bar{G} - E) / nHW_j = W_j + nHGW_j.
 \end{aligned}$$

В итоге получаем одношаговую процедуру

$$W_{j+1} = W_j + hGW_j \tag{10}$$

численного решения расширенной системы ОДУ

$$W' = GW \tag{11}$$

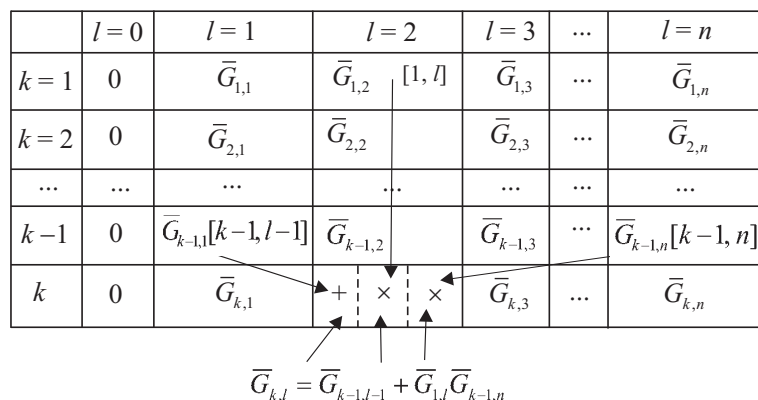


Рис. 3. Схема формирования блочных элементов матрицы **G**

явным методом Эйлера с шагом $h = nH$ и вектором начальных условий

$$\mathbf{W}_0 = |\mathbf{Y}((n-1)H) \mathbf{Y}((n-2)H) \mathbf{Y}((n-3)H) \dots \mathbf{Y}(-H) \mathbf{Y}(0)|^T. \quad (12)$$

Вектор \mathbf{W}_0 состоит из совокупности начальных значений частных векторов на n -шаговом участке разгона, применяемой для решения исходной системы ОДУ (3) многошаговой РДФ (1), а вектор решения \mathbf{W}_j представляет совокупность (9) n частных векторов $\mathbf{Y}_{nj+1-n}, \dots, \mathbf{Y}_{nj-v}, \dots, \mathbf{Y}_{nj}$, сдвинутых по аргументу x на величину vH . Матрица **G** имеет вид

$$\mathbf{G} = \frac{1}{nH} \begin{vmatrix} \bar{\mathbf{G}}_{1,1} - \mathbf{E} & \bar{\mathbf{G}}_{1,2} & \dots & \bar{\mathbf{G}}_{1,n} \\ \bar{\mathbf{G}}_{2,1} & \bar{\mathbf{G}}_{2,2} - \mathbf{E} & \dots & \bar{\mathbf{G}}_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{\mathbf{G}}_{n,1} & \bar{\mathbf{G}}_{n,2} & \dots & \bar{\mathbf{G}}_{n,n} - \mathbf{E} \end{vmatrix}, \quad (13)$$

где

$$\bar{\mathbf{G}}_{k,l} = \bar{\mathbf{G}}_{k-1,l-1} + \bar{\mathbf{G}}_{k-1,n} \bar{\mathbf{G}}_{1,l}; \quad \bar{\mathbf{G}}_{k-1,0} = \mathbf{0}, \quad k = 2, \dots, n, \quad l = 1, \dots, n;$$

$$\bar{\mathbf{G}}_{1,l} = \bar{\mathbf{G}}_R \left(a_{n+1-l} \mathbf{E} + \sum_{s=0}^m c_{s,n+1-l} H^{s+1} \mathbf{A}^{s+1} \right), \quad \bar{\mathbf{G}}_R = \left(\mathbf{E} - \sum_{s=0}^m c_{s0} H^{s+1} \mathbf{A}^{s+1} \right)^{-1}.$$

Матрица (13) расширенной системы ОДУ (11) зависит от параметров исходной матрицы **A**, от коэффициентов $c_{s,j}$ РДФ и от шага численного интегрирования H . Порядок формирования матрицы **G** представлен на рис. 3.

Вариант программной реализации в виде процедуры AtoG ($\mathbf{A}, \mathbf{C}, H$) на языке Maple:

```

AtoG := proc(A1 :: Matrix, C1 :: array, H1 :: algebraic)
local m1, n1, d1, i1, i2, r1, r2, Gr, Gn, B1, B2;
d1, m1 := Dimension(A1): m1, n1 := Dimension(convert(C1, Matrix)):
m1 := m1 - 2: n1 := n1 - 1: Gr := Matrix(d1, d1, []):
for i1 to d1 do Gr[i1, i1] := 1: end do:
B1 := Matrix(d1, d1, []): B1 := Gr:
for r1 from 0 to m1 do B1 := MatrixMatrixMultiply(B1, A1):
Gr := Gr - B1*C1[r1+2,1]*H1^(r1+1): end do:
Gr := MatrixInverse(Gr): Gn := Matrix(d1*n1, d1*n1, []):
for i2 to n1 do
for i1 to n1 do
if i2 = 1 then
B1 := A1: B2 := Matrix(d1, d1, []):
for r1 to d1 do B2[r1, r1] := C1[1, n1+1 - i1]: end do:
for r1 from 0 to m1 do B2 := B2 + B1*C1[r1+2, n1+2-i1]*H1^(r1+1):
B1 := MatrixMatrixMultiply(B1, A1): end do:
B2 := MatrixMatrixMultiply(Gr, B2):
else if i1=1 then B2 := Matrix(d1, d1, []) else B2 := SubMatrix(Gn,
[((i2-2)*d1+1)..(i2-1)*d1], [(i1-2)*d1+1)..(i1-1)*d1]): end if:
B2 := B2+MatrixMatrixMultiply(SubMatrix(Gn, [(i2-2)*d1+1)..(i2-1)*d1],
[((n1-1)*d1+1)..n1*d1]), SubMatrix(Gn, [1..d1], [(i1-1)*d1+1)..i1*d1)):
end if:
for r1 to d1 do
for r2 to d1 do Gn[((i2-1)*d1+r1), ((i1-1)*d1+r2)] := B2[r1,r2]: end do:
end do:
end do:
end do:
r2 := n1*d1: for r1 to r2 do Gn[r1,r1] := Gn[r1, r1] - 1: end do:
Gn := Gn/(n1*H1): Gn;
end proc:

```

С помощью данной процедуры для любой многошаговой ФЧИ (1), задаваемой массивом ее коэффициентов \mathbf{C} , и матрицы \mathbf{A} для ОДУ (3) произвольного порядка формируется матрица \mathbf{G} либо для конкретного значения шага интегрирования, либо как аналитическая функция от H . Для явной ФЧИ I (см. табл. 1) и матрицы \mathbf{A} (7) из (13) получаем матрицу $\mathbf{G}(H)$,

а для неявной ФЧИ 5 при шаге $H = 1/8$ — матрицу \mathbf{G} :

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} -2,66731628 & -0,01385843 & 0,00324807 & 0,06929219 & 2,64847746 & -0,38803627 \\ 0,01385843 & -2,66731628 & -0,06929219 & 0,00324807 & 0,38803627 & 2,64847746 \\ -0,00266177 & -0,01366938 & -2,65400740 & 0,05448847 & 2,57719585 & -0,70148679 \\ 0,01366938 & -0,00266177 & -0,05448847 & -2,65400740 & 0,70148679 & 2,57719585 \\ -0,00427338 & -0,01322258 & 0,01870515 & 0,05244351 & -0,19646635 & -1,01723056 \\ 0,01322258 & -0,00427338 & -0,05244351 & 0,01870515 & 1,01723056 & -0,19646635 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Пара {ОДУ (11) и ФЧИ (10)} квазиэквивалентна паре {ОДУ (3) и ФЧИ (1)}: обе они имеют одинаковые значения компонент векторов решения, однако размерность их векторов отличается в n раз. Но более существенное отличие заключается в том, что паре {ОДУ (3) и ФЧИ (1)} соответствует система ОДУ (5),(6), эквивалентная только при согласованном разгоне, а паре {ОДУ (11) и ФЧИ (10)} — система ОДУ

$$\overline{\mathbf{W}}' = \mathbf{B}\overline{\mathbf{W}}, \quad \overline{\mathbf{W}}(x_0) = \overline{\mathbf{W}}_0, \quad (16)$$

эквивалентная при произвольном разгоне (12), где

$$\mathbf{B}(\mathbf{G}, nH, R_0^E(p)) = \mathbf{G} R_0^E(p)|_{p=nHG} = \sum_{r=0}^{\infty} \rho_r (nH)^r \mathbf{G}^{r+1} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-nH)^r}{r+1} \mathbf{G}^{r+1}. \quad (17)$$

На рис. 4 представлены результаты вычислений по полученным соотношениям для четырехшаговой ФЧИ. Расширенный вектор (9) содержит n векторов \mathbf{Y}_{i-n+l} , поэтому на рис. 4, а, представлено по одной компоненте каждого вектора \mathbf{Y}_{i-n+l} . Кривые 1—4 соответствуют решению системы ОДУ (16) с заданным участком разгона (при $j = 0$). На рис. 4, б, кривые 1—4 представлены в координатах итераций i , штриховая и пунктирная кривые соответствуют численному интегрированию исходной системы ОДУ данным многошаговым методом с учетом любых задаваемых значений вектора на участке разгона.

Поскольку непрерывное (не дискретное) решение системы (16) в области сходимости метода получения матрицы \mathbf{B} адекватно отображает в точках квантования i дискретные значения численного интегрирования, исследования ФЧИ с учетом участка разгона можно проводить на основе исследований свойств матрицы \mathbf{B} , например ее собственных чисел и векторов.

Рассмотрим неявный метод Адамса 5 (см. табл. 1) с матрицей (7) в уравнении (3) при шаге $H = 1/8$. Матрица \mathbf{B}_0 (6) системы ОДУ (5), эквивалентной численному интегрированию для согласованного разгона, имеет вид

$$\mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} 0,000000634 & -1,0000064 \\ 1,0000064 & 0,000000634 \end{pmatrix}$$

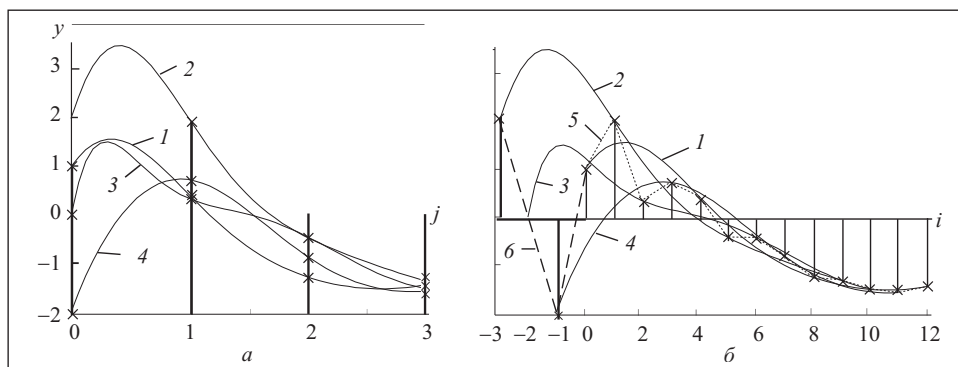


Рис. 4. Графики составных компонентов вектора численного интегрирования по явной четырехшаговой формуле Адамса: 1 и 2 — аппроксимация значений Y_{4j} и Y_{4j-1} ; 3 и 4 — аппроксимация значений Y_{4j-2} и Y_{4j-3} ; 5 — аппроксимация значений Y_i ; б — участок разгона Y_i ; - - - — последовательность значений компонент вектора на участке интегрирования ($i = 0 \div 12$); \dots — на участке разгона ($i = -3 \div 0$); \times — точки итераций $j = 1, 2, 3$, выполняемых с шагом $h = nH$ (значения получены по (10))

согласно ФЧИ, отличающейся от матрицы (7). Поэтому решение (5), например для первой компоненты вектора, имеет вид $Y_1(x) \approx e^{-0,000000634x} (Y_{10} \cos(1,0000064x) - Y_{20} \sin(1,0000064x))$ и отображает лишь влияние методической погрешности аппроксимации ФЧИ 5. При учете разгона из расширенной матрицы (15) формируется системная матрица

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -21,67469 & 2,656626 & 27,88221 & 39,72838 & -0,80596 & -41,07515 \\ -2,656626 & -21,67469 & -39,72838 & 27,88221 & 41,07515 & -0,80596 \\ -0,213267 & 0,014194 & -20,60835 & 2,585653 & 21,10475 & -0,949314 \\ -0,014194 & -0,213267 & -2,585653 & -20,60835 & 0,949314 & 21,10475 \\ -0,010074 & -0,109448 & -0,162894 & 0,561436 & 0,214304 & -1,428215 \\ 0,109448 & -0,010074 & -0,561436 & -0,162894 & 1,428215 & 0,214304 \end{pmatrix},$$

имеющая собственные числа

$$\text{Eig } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0,000000634065 + i 1,000006405 \\ 0,000000634065 - i 1,000006405 \\ -21,84874482 + i 5,774095736 \\ -21,84874482 - i 5,774095736 \\ -20,2199984 + i 0,9600249392 \\ -20,2199984 - i 0,9600249392 \end{pmatrix},$$

и при задании значений вектора

$$\mathbf{W}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

на несогласованном участке разгона компонента вектора решения

$$Y_1(x) \approx e^{-0,0000065x} (1,0140198 \cos(1,0000064x) - 0,06721176 \sin(1,0000064x)) + \\ + 25 + e^{-20,22x} (0,06192374 \cos(0,960025x) + 0,11686226 \sin(0,960025x)) - \\ - e^{-21,84874x} (0,07594356 \cos(5,774095x) - 0,0496505 \sin(5,774095x))$$

дополнительно содержит затухающие составляющие с круговыми частотами 0,960025 и 5,774095, отличными от основной (1,0000064).

Для явной четырехшаговой ФЧИ 3 (см. табл. 1) при $H = 1/4$ по расширенной матрице

$$\mathbf{G} = \begin{vmatrix} -1 & 0,093750 & 0 & -0,385416 & 0 & 0,614583 & 1 & -0,572916 \\ -0,093750 & -1 & 0,385416 & 0 & -0,614583 & 0 & 0,572916 & 1 \\ 0,0537109 & 0,093750 & -1,220811 & -0,291666 & 0,352105 & 0,229166 & 0,671766 & -0,531250 \\ -0,093750 & 0,053710 & 0,291666 & -1,220811 & -0,229166 & 0,352105 & 0,531250 & 0,671766 \\ 0,049804 & 0,062978 & -0,151041 & -0,165160 & -0,894314 & 0,121189 & 0,719509 & -0,686949 \\ -0,062978 & 0,049804 & 0,165160 & -0,151041 & -0,121189 & -0,894314 & 0,686949 & 0,719509 \\ 0,064401 & 0,067454 & -0,214957 & -0,214332 & 0,271146 & 0,277038 & -0,568369 & -0,977978 \\ -0,067454 & 0,064401 & 0,214332 & -0,214957 & -0,277038 & 0,271146 & 0,977978 & -0,568369 \end{vmatrix}$$

формируется расширенная системная матрица

$$\mathbf{B} = \begin{vmatrix} -4,676477 & -0,988547 & 1,390876 & -0,900651 & -5,182230 & -1,085664 & 6,533703 & 5,635323 \\ 0,988547 & -4,676477 & 0,900651 & 1,390876 & 1,085664 & -5,182230 & -5,635323 & 6,533703 \\ -0,528311 & 0,612534 & -2,504530 & -3,506746 & -2,072500 & 3,114853 & 4,580043 & 0,806391 \\ -0,612534 & -0,528311 & 3,506746 & -2,504530 & -3,114853 & -2,072500 & -0,806391 & 4,580043 \\ -0,075599 & 0,429379 & -0,217514 & -1,152690 & -3,000125 & -0,691928 & 2,969538 & 1,297262 \\ -0,429379 & -0,075599 & 1,152690 & -0,217514 & 0,691928 & -3,000125 & -1,297262 & 2,969538 \\ -0,121618 & 0,278394 & 0,424387 & -0,715130 & -1,014791 & 0,672338 & 0,712637 & -1,095964 \\ -0,278394 & -0,121618 & 0,715130 & 0,424387 & -0,672338 & -1,014791 & 1,095964 & 0,712637 \end{vmatrix}$$

имеющая набор собственных чисел:

$$\text{Eig } \mathbf{B} = \begin{vmatrix} -0,00050735 + i 0,99875367 \\ -0,00050735 - i 0,99875367 \\ -1,23828347 + i 2,47634704 \\ -1,23828347 - i 2,47634704 \\ -4,56123361 + i 1,24212303 \\ -4,56123361 - i 1,24212303 \\ -3,66847055 + i 1,56596214 \\ -3,66847055 - i 1,56596214 \end{vmatrix}$$

Поэтому в спектре решения будут содержаться четыре компоненты с различными круговыми частотами w_s и затуханием β_s : $w_1 = 0,99875367$, $\beta_1 = -0,00050735$; $w_2 = 2,47634704$, $\beta_2 = -1,23828347$; $w_3 = 1,24212303$, $\beta_3 = -4,56123361$; $w_4 = 1,56596214$, $\beta_4 = -3,66847055$.

Первая составляющая определяет решение ОДУ (3) с методической погрешностью аппроксимации ФЧИ, а остальные $n - 1$ для n -шаговой ФЧИ — дополнительные методические погрешности формулы интегрирования. Если участок разгона согласован, то амплитуда дополнительных колебаний равна нулю. Однако эти дополнительные погрешности возникают не только при формировании участка разгона, но и в дальнейшем процессе численного интегрирования, например в результате погрешностей округлений или возмущений в данных решаемой системы ОДУ.

Рассмотрим четырехшаговую ФЧИ Милна I (см. табл. 1). Системная матрица для (14) при шаге $H = 1/64$ имеет вид

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0,031270 & -0,000290 & -0,013903 & -0,666715 & 0,027792 & 0,333357 & -0,013907 & -0,667004 \\ 0,000290 & 0,031270 & 0,666715 & -0,013903 & -0,333357 & 0,027792 & 0,667005 & -0,013907 \\ -0,013907 & -0,667005 & 0,003478 & 0,000290 & -0,000007 & -0,667005 & 0 & 0,333937 \\ 0,667005 & -0,013907 & -0,000290 & 0,003478 & 0,667005 & -0,000007 & -0,333937 & 0 \\ 0 & 0,333937 & 0,000007 & -0,667005 & -0,003478 & 0,0002897 & 0,013907 & -0,667005 \\ -0,333937 & 0 & 0,667005 & 0,000007 & -0,000290 & -0,003478 & 0,667005 & 0,013907 \\ 0,013907 & -0,667005 & -0,027792 & 0,333357 & 0,013903 & -0,666715 & -0,031270 & -0,000290 \\ 0,667005 & 0,013907 & -0,333357 & -0,027792 & 0,666715 & 0,013903 & 0,000290 & 0,031270 \end{pmatrix}$$

а ее собственные числа —

$$\text{Eig } \mathbf{B} \left(\frac{1}{64} \right) = \begin{pmatrix} +i 0,99999999546975938 \\ -i 0,99999999546975938 \\ +i 1,66696824365243156 \\ -i 1,66696824365243156 \\ +i 0,340432055873875594 \\ -i 0,340432055873875594 \\ +i 0,326536192308422790 \\ -i 0,326536192308422790 \end{pmatrix}$$

с нулевыми реальными составляющими. Поэтому ни одна из четырех колебательных функций при малых шагах ($H < 0,43300891005$) для ОДУ (3), (7) не затухает.

На рис. 5 представлен вид компонентов вектора решения (16). Эти компоненты являются огибающими высокочастотных колебаний графика I на рис. 1 в случае несогласованного разгона. При согласованном разгоне компоненты $1-4$ трансформируются в кривую 5. Изменение спектрального состава в зависимости от шага интегрирования приведено в табл. 2.

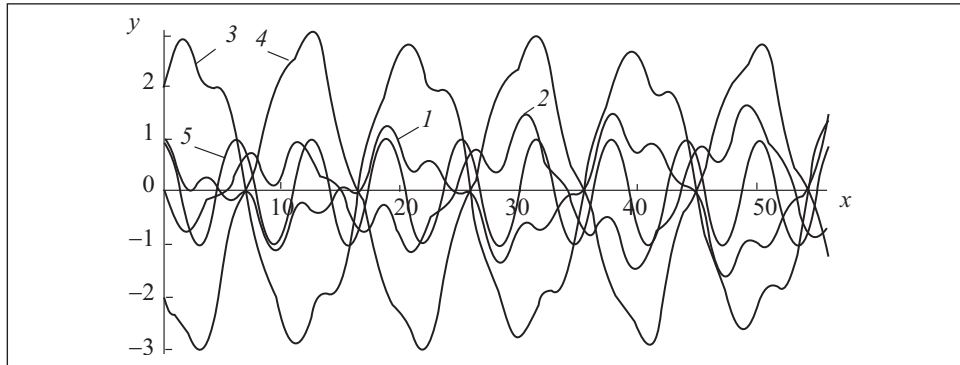


Рис. 5. Графики компонентов вектора численного интегрирования по ФЧИ 1 (1 — 4); 5 — решение ОДУ (5)

Варианты ускоренного преобразования. Формула (17) определяет базовый вариант преобразования расширенной матрицы \mathbf{G} в системную матрицу \mathbf{B} . Поскольку \mathbf{B} является основой системы ОДУ (16), которая представляет собой модель совокупности РДФ и исходной ОДУ (3), любая модификация \mathbf{G} и (или) алгоритма преобразования ее в матрицу \mathbf{B} должна приводить к одной и той же матрице \mathbf{B} . Следует различать два типа ФЧИ. Первый тип — исследуемая многошаговая РДФ (1), второй тип — вспомогательная одношаговая ФЧИ для интегрирования расширенной системы ОДУ. Однако назначение вспомогательной ФЧИ — не численное интегрирование расширенной системы, а получение подходящего варианта расширенной системы и использование коэффициентов ее передаточной функции для формирования системной матрицы \mathbf{B} . Поскольку ФЧИ для базового варианта соответствует явной формуле Эйлера (10), матрица \mathbf{B} (17) может быть представлена в виде матричного логарифма $\mathbf{B} = 1 / (nH) \ln (\mathbf{E} + nH\mathbf{G})$.

Матричный логарифм вычисляют точными методами [4—6] посредством нахождения и преобразования собственных чисел и векторов или жордановой декомпозиции. Рассмотрим аппроксимационные варианты его представления степенными рядами.

Во многих случаях для многошаговых РДФ степенной ряд матричного логарифма (17) либо не сходится, либо сходится крайне медленно. Так, для метода 1 (см. табл. 1) при максимальном шаге $H = 0,15$ он сходится за 46 итераций, а для метода 4 при максимальном шаге $H = 1/4$ — за 1120 итераций. В трех остальных случаях процесс вычислений \mathbf{B} расходится при любом шаге H .

В работах [2, 4] рассмотрены варианты вычислений матричного алгоритма на основе рядов, отличных от (17), позволяющие увеличить шаг H и

существенно уменьшить длину степенного матричного ряда. Рассмотрим модификацию матрицы \mathbf{G} для иных одношаговых ФЧИ разностного и разностно-дифференциального типа.

В а р и а н т 1. Вместо явной ФЧИ Эйлера (10) для расширенной системы ОДУ (11) возьмем обобщенную одношаговую разностную ФЧИ. Согласно (2) соотношение для одношаговой РФ при решении ОДУ принимает вид $\mathbf{W}_{i+1} = \mathbf{W}_i + h\mathbf{G}^M (c_{00}\mathbf{W}_{i+1} + c_{01}\mathbf{W}_i)$, где $h = nH$ — шаг блочного интегрирования, а \mathbf{G}^M — искомая расширенная матрица, которой присвоен

Таблица 2

| H | Значения ω_s и β_s для номера гармоники s | | | |
|---------------|--|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | $\frac{0,1962729422}{0}$ | $\frac{0,04451245754}{-0,814851161}$ | $\frac{0,04451236799}{+0,814851736}$ | $\frac{0,09184372913}{0}$ |
| 3/2 | $\frac{0,3122190972}{0}$ | $\frac{0,09727593857}{-0,9034849916}$ | $\frac{0,09727593890}{+0,9034849873}$ | $\frac{0,1121649872}{0}$ |
| 1 | $\frac{0,6603337675}{0}$ | $\frac{0,2582578957}{-0,9466318175}$ | $\frac{0,2582578789}{+0,9466318111}$ | $\frac{0,1439906132}{0}$ |
| 1/2 | $\frac{0,9945476651}{0}$ | $\frac{0,9730475992}{-0,6116984013}$ | $\frac{0,9730475988}{+0,6116984011}$ | $\frac{0,20094492}{0}$ |
| 0,44 | $\frac{0,9968037931}{0}$ | $\frac{1,181114742}{-0,2237026060}$ | $\frac{1,181114743}{+0,2237026059}$ | $\frac{0,2109583715}{0}$ |
| 0,43312 | $\frac{0,9970065692}{0}$ | $\frac{1,208761289}{-0,02815239925}$ | $\frac{1,208761289}{+0,02815239929}$ | $\frac{0,2121709047}{0}$ |
| 0,43300891005 | $\frac{0,9970097596}{0}$ | $\frac{1,214508689}{0}$ | $\frac{1,203921447}{0}$ | $\frac{0,212190598}{0}$ |
| 0,43 | $\frac{0,9970951823}{0}$ | $\frac{1,37183338}{0}$ | $\frac{1,071360668}{0}$ | $\frac{0,2127253952}{0}$ |
| 1/4 | $\frac{0,9996862882}{0}$ | $\frac{1,757665278}{0}$ | $\frac{0,5074611598}{0}$ | $\frac{0,2505319618}{0}$ |
| 1/8 | $\frac{0,9999808553}{0}$ | $\frac{1,686683212}{0}$ | $\frac{0,4007707072}{0}$ | $\frac{0,2859316508}{0}$ |
| 1/64 | $\frac{0,9999999954}{0}$ | $\frac{1,6669682436}{0}$ | $\frac{0,3404320558}{0}$ | $\frac{0,3265361923}{0}$ |

Примечание: над чертой — значение ω_s , под чертой — β_s .

индекс M в отличие от прежней \mathbf{G}^E . Это соотношение должно быть тождественно равным исходному

$$\mathbf{W}_{i+1} = \mathbf{W}_i + h\mathbf{G}^E \mathbf{W}_i. \quad (18)$$

Поэтому $h\mathbf{G}^M (c_{00}\mathbf{W}_{i+1} + c_{01}\mathbf{W}_i) = h\mathbf{G}^E \mathbf{W}_i$, или $h\mathbf{G}^M (c_{00}(\mathbf{E} + h\mathbf{G}^E) + c_{01}\mathbf{E}) = h\mathbf{G}^E$, и тогда

$$\mathbf{G}^M = ((c_{00} + c_{01})\mathbf{E} + c_{00}h\mathbf{G}^E)^{-1} \mathbf{G}^E. \quad (19)$$

При $c_{00} = c_{01} = 1/2$ ФЧИ (18) будет соответствовать формуле трапеции с коэффициентами ρ_r системной канонической передаточной функции (КПФ) $\{\rho_{2r-1} = 0, \rho_{2r} = 2^{-2r} / (2r + 1)\}$. Тестирование по табл. 1 с использованием модификации $\mathbf{G}^T = 2(2\mathbf{E} + c_{00}h\mathbf{G}^E)^{-1} \mathbf{G}^E$ и свертки

$$\mathbf{V} = \mathbf{G}^T R_0^T(p)|_{p=nH\mathbf{G}^T} = \sum_{r=0}^{\infty} \rho_r (nH)^r (\mathbf{G}^T)^{r+1} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(nH)^{2r}}{2^{2r} (2r + 1)} (\mathbf{G}^T)^{2r+1}$$

показало, что для точности, равной шести десятичным знакам, число членов ряда уменьшается почти на порядок: шесть вместо 46 для ФЧИ 1 и 225 вместо 1120 для ФЧИ 4 (см. табл. 1).

В а р и а н т 2. Вместо ФЧИ Эйлера для расширенной системы ОДУ (11) возьмем ФЧИ Обрешкова с учетом высшей производной первого порядка от подынтегральной функции

$$\mathbf{W}_{i+1} = \mathbf{W}_i + \frac{h}{2} \mathbf{G}^{Ob1} (\mathbf{W}_{i+1} + \mathbf{W}_i) + \frac{h^2}{12} (\mathbf{G}^{Ob1})^2 (\mathbf{W}_i - \mathbf{W}_{i+1}), \quad (20)$$

где $h = nH$. Из (18) и (20) получаем квадратное матричное уравнение

$$\frac{h^2 \mathbf{G}^E}{12} (\mathbf{G}^{Ob1})^2 - \left(\mathbf{E} + \frac{h\mathbf{G}^E}{2} \right) \mathbf{G}^{Ob1} + \mathbf{G}^E = 0,$$

из которого следует

$$\mathbf{G}^{Ob1} = \frac{6}{h^2} (\mathbf{G}^E)^{-1} \left(\mathbf{E} + \frac{h}{2} \mathbf{G}^E - \sqrt{\mathbf{E} + h\mathbf{G}^E - \frac{h^2}{12} (\mathbf{G}^E)^2} \right). \quad (21)$$

Для этой ФЧИ формула коэффициентов системной КПФ имеет вид [2]

$$\rho_r = \frac{\cos\left(\frac{2r-1}{6}\pi\right) \cos\left(\frac{r}{2}\pi\right)}{2^{r-1} 3^{\frac{r+1}{2}} (r+1)}$$

Поэтому системная матрица определяется с помощью четных коэффициентов ρ_{2r} рядом

$$\mathbf{B} = \sum_{r=0}^{\infty} \rho_{2r} (nH)^{2r} (\mathbf{G}^{Ob1})^{2r+1} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{4r-1}{6}\pi\right) \cos(r\pi)}{2^{2r-1} 3^{\frac{2r+1}{2}} (2r+1)} (nH)^{2r} (\mathbf{G}^{Ob1})^{2r+1}, \quad (22)$$

который имеет достаточно высокую сходимость. Для всех ФЧИ из табл. 1 ряд (22) сходится в определенных диапазонах шага H .

В а р и а н т 3. Для получения новой расширенной матрицы \mathbf{G}^M перепишем одношаговую ФЧИ с учетом производной первого порядка (20) в обобщенном виде с двумя неопределенными коэффициентами k_1 и k_2 :

$$\mathbf{W}_{i+1} = \mathbf{W}_i + k_1 h \mathbf{G}^M (\mathbf{W}_{i+1} + \mathbf{W}_i) + k_2 h^2 (\mathbf{G}^M)^2 (\mathbf{W}_i - \mathbf{W}_{i+1}).$$

После несложных преобразований получаем соотношение

$$\mathbf{G}^M = \frac{1}{2k_2 h^2} (\mathbf{G}^E)^{-1} (\mathbf{E} + h(1-k_1) \mathbf{G}^E - \sqrt{\mathbf{E} + 2(1-k_1) h \mathbf{G}^E + (1-2k_1 + k_1^2 - 4k_2) h^2 (\mathbf{G}^E)^2}),$$

которое можно использовать для получения различных расширенных матриц. Например, приравняв в подкоренном выражении коэффициент $(1-2k_1 + k_1^2 - 4k_2)$ нулю и выбрав $k_1 = 1/2$, получим $k_2 = 1/16$ и соотношение для новой расширенной матрицы

$$\mathbf{G}^M = \frac{8}{h^2} (\mathbf{G}^E)^{-1} \left(\mathbf{E} + \frac{h}{2} \mathbf{G}^E - \sqrt{\mathbf{E} + h \mathbf{G}^E} \right), \quad (23)$$

соответствующее ФЧИ

$$\mathbf{W}_{i+1} = \mathbf{W}_i + \frac{h}{2} \mathbf{G}^M (\mathbf{W}_{i+1} + \mathbf{W}_i) + \frac{h^2}{16} (\mathbf{G}^M)^2 (\mathbf{W}_i - \mathbf{W}_{i+1}). \quad (24)$$

Соотношение (23) более простое, чем (21), но ценность формулы (24), несмотря на ее меньшую точность, состоит в том, что значения коэффициентов системной КПФ $\rho_{2r} = 2^{-4r} / (2r+1)$ уменьшаются значительно быстрее, чем для формулы (20), а это обуславливает более высокую сходимость нового ряда для получения системной матрицы

$$\mathbf{B} = \sum_{r=0}^{\infty} \rho_{2r} (nH)^{2r} (\mathbf{G}^M)^{2r+1} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(2r+1)2^{4r}} (nH)^{2r} (\mathbf{G}^M)^{2r+1}.$$

Последующие варианты преобразования матрицы \mathbf{G} в матрицу \mathbf{B} можно получить на основе иных одношаговых формул интегрирования. Так, если взять за основу ФЧИ Обрешкова с учетом первой и второй производных, которая в данном случае будет иметь вид

$$\mathbf{W}_{i+1} = \mathbf{W}_i + \frac{h}{2} \mathbf{G}^{Ob2} (\mathbf{W}_{i+1} + \mathbf{W}_i) + \frac{h^2}{10} (\mathbf{G}^{Ob2})^2 (\mathbf{W}_i - \mathbf{W}_{i+1}) + \frac{h^3}{120} (\mathbf{G}^{Ob2})^3 (\mathbf{W}_{i+1} + \mathbf{W}_i),$$

то получим высокую сходимость ряда $\mathbf{B} = \sum_{r=0}^{\infty} \rho_{2r} (nH)^{2r} (\mathbf{G}^{Ob2})^{2r+1}$. Однако

при этом значительно возрастает сложность получения матрицы \mathbf{G}^{Ob2} из кубического уравнения

$$(\mathbf{G}^{Ob2})^3 \left(\frac{h^2}{60} \mathbf{E} + \frac{h^3}{120} \mathbf{G}^E \right) - (\mathbf{G}^{Ob2})^2 \frac{h^2 \mathbf{G}^E}{10} + \mathbf{G}^{Ob2} \left(\mathbf{E} + \frac{h \mathbf{G}^E}{2} \right) - \mathbf{G}^E = 0.$$

Для сравнения в табл. 3 приведено число итераций преобразования матрицы \mathbf{G} в матрицу \mathbf{B} с погрешностью 10^{-6} различными методами для

Таблица 3

| Метод | Формула | Число итераций при H | | | | | | |
|-------|-----------|------------------------|------|------|------|------|------|------|
| | | 2 | 1 | 1/2 | 1/4 | 1/8 | 1/16 | 1/32 |
| 1 | Эйлера | — | — | — | — | 46 | 12 | 7 |
| | Трапеции | — | — | — | — | 6 | 3 | 3 |
| | Обрешкова | — | 125 | 22 | 16 | 6 | 4 | 4 |
| | (24) | 100 | 32 | 20 | 14 | 6 | 4 | 2 |
| 2 | Обрешкова | 2300 | 2400 | 3600 | — | — | — | — |
| | (24) | 120 | 170 | 260 | 6500 | 1250 | 1480 | 2170 |
| 3 | Обрешкова | — | 210 | 205 | 330 | 690 | 1600 | 3600 |
| | (24) | 70 | 90 | 55 | 80 | 320 | 430 | 420 |
| 4 | Эйлера | — | — | — | 1120 | 820 | 690 | 700 |
| | Трапеции | — | — | — | 225 | 170 | 155 | 145 |
| | Обрешкова | 110 | 64 | 52 | 46 | 40 | 40 | 40 |
| | (24) | 54 | 34 | 28 | 26 | 26 | 30 | 26 |
| 5 | Обрешкова | 1000 | 1400 | 2620 | — | — | — | — |
| | (24) | 200 | 240 | 330 | 520 | 920 | 1580 | 2900 |

ФЧИ 1— 5 из табл. 1. Во всех случаях наиболее эффективной является модификация по варианту 3. Программа такого преобразования, оформленная в виде процедуры пакета Maple, имеет следующий вид:

```
EKSystB := proc(G1::Matrix, h1::algebraic, k1::integer, r1::integer)
  local G2, B2, B1, B0, f, i1, d1, h0; global n;
  Digits:=r1: d1:= RowDimension(G1): f:= (i, j) -> if i=j then 1 else 0 end if;
  h0:=h1*n: B0:= Matrix(d1, f)+h0*G1/2 - MatrixPower(evalf((Matrix(d1, f)+h0*G1)),1/2);
  G2:=MatrixMatrixMultiply(MatrixInverse(G1),B0)*8/h0^2:B0:=G2: B1:= G2: B2:= MatrixPower(G2, 2);
  for i1 from 2 by 2 to k1 do
    B1:= evalf[r1](MatrixMatrixMultiply(B1, B2*h0^2)): B0:= B0 + B1/((i1+1)*4^i1)
  end do: B0;
end proc;
```

Входными данными программы являются матрица G^E , шаг H , разрядность вычислений и число членов ряда, а результатом — компоненты системной матрицы B .

Выводы

Предложенная аналитическая модель совокупности многошаговых РДФ и ОДУ тождественно отображает результат численного интегрирования с учетом возмущений как на участке разгона, так и в процессе последующих вычислений. Аналитические решения можно определять по собственным числам и векторам эквивалентной системной матрицы B . Разработанные процедуры на языке Maple позволяют упростить процесс исследований многошаговых ФЧИ.

An augmented mathematical model of multistage difference-differential formulas of numerical integration for the analysis of the effect of speed-up regions on solution of the system of homogeneous differential equations has been proposed. The algorithm of their transformation into equivalent in behavior one-stage numerical formulas has been developed. Methods of transformation of the extended block matrix into the system matrix of the general analytical model have been proposed.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хэмминг Р.Р. Численные методы анализа. — М. : Наука, 1968. — 400 с.
2. Аристов В.В. Функциональные макрооперации: Основы итерационных алгоритмов. — Киев : Наук. думка, 1992. — 280 с.
3. Аристов В.В. Математические модели итерационных соотношений обобщенных CORDIC-алгоритмов // Электрон. моделирование. — 2011. — 33, № 1. — С. 3—29.
4. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. — М. : Наука, 1988. — 552 с.

5. *Culver W.J.* On the existence and uniqueness of the real logarithm of a matrix // Proc. of the American Mathematical Society. — 1966. — 17, № 5. — P. 1146—1151.
6. *Higham N.* The Matrix Logarithm: from Theory to Computation // 6-th European Congress of Mathematics, July 2012. — 53 p. — <http://www.ma.man.ac.uk/~higham>
7. *Аристов В.В.* Применение канонических передаточных функций для анализа, синтеза и преобразования итерационных алгоритмов // Там же. — 1996. — **18**, № 4. — С. 74 — 81.

Поступила 12.09.13

АРИСТОВ Василий Васильевич, канд. техн. наук, вед. науч. сотр. Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины. В 1963 г. окончил Харьковский политехнический ин-т. Область научных исследований — теория и реализация итерационных алгоритмов макроопераций, численные методы решения дифференциальных уравнений, схемотехника и архитектура специализированных устройств, геоинформационные системы, радиотехника.